

Існування границі в розумінні Чезаро обмеженого розв'язку еволюційного рівняння в банаховому просторі

Одержано критерій існування границі в розумінні Чезаро $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\xi) d\xi\right)$ обмеженого розв'язку $y(t)$ задачі $dy(t)/dt = Ay(t)$, $y(0) = y_0$, $t \in [0, \infty)$, де A — лінійний замкнений оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ в рефлексивному банаховому просторі E , при умові, що існує достатньо малий інтервал $(0, \delta)$, який належить множині регулярних точок $\rho(A)$ оператора A .

Получен критерій существования предела в смысле Чезаро $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\xi) d\xi\right)$ ограниченного решения $y(t)$ задачи $dy(t)/dt = Ay(t)$, $y(0) = y_0$, $t \in [0, \infty)$, где A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$ в рефлексивном банаховом пространстве E , при условии, что найдется достаточно малый интервал $(0, \delta)$, принадлежащий множеству регулярных точек $\rho(A)$ оператора A .

У даній роботі вивчається питання про існування границі в розумінні Чезаро обмеженого розв'язку еволюційного рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, де A — лінійний замкнений оператор, область визначення $D(A)$ якого щільна в рефлексивному банаховому просторі E . Зауважимо, що у випадку скінченновимірному простору E обмежений розв'язок еволюційного рівняння має границю в розумінні Чезаро для будь-якого лінійного оператора A . Це легко встановити, використовуючи жорданову форму матриці оператора.

Нагадаємо, що $(C-1) \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t y(\xi) d\xi$ ($(C-1) - \lim$ — границя в розумінні Чезаро, [1, с. 519]), а $(A) - \lim$ — границя за Абелем, яка згідно з [1] дорівнює $\lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} y(\xi) d\xi$. Основні факти, необхідні надалі, викладені в [1, 2].

Теорема. Нехай A — лінійний замкнений оператор зі щільною в рефлексивному банаховому просторі E областю визначення $D(A)$, причому знайдеться таке $\delta > 0$, що інтервал $(0, \delta)$ належить множині регулярних точок $\rho(A)$ оператора A . Тоді обмежений розв'язок $y(t)$ еволюційного рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, має границю в розумінні Чезаро, якщо

$$i \text{ тільки якщо існує } \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \lambda R_{\lambda} y(0) \text{ і } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\xi) d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \lambda R_{\lambda} y(0).$$

Доведення. Зауважимо, що для обмеженого розв'язку $y(t)$ еволюційного рівняння границя в сенсі Чезаро збігається з границею в сенсі Абеля [3, с. 92], тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\xi) d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} y(\xi) d\xi.$$

Звідси, оскільки

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} y(\xi) d\xi = - \int_0^{\infty} y(\xi) de^{-\lambda \xi} = y(0) + \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} Ay(\xi) d\xi,$$

то

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} (\lambda I - A) y(\xi) d\xi = R_0(0).$$

На підставі цього, враховуючи, що $\lambda I - A$ замкнений, одержуємо $(\lambda I - A) \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} y(\xi) d\xi = y(0)$ і, як наслідок, $\int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} y(\xi) d\xi = R_{\lambda} y(0)$ для $\lambda \in (0, \delta)$. З останньої рівності маємо

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} y(\xi) d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \lambda R_{\lambda} y(0),$$

що і завершує доведення теореми.

Наслідок 1. Нехай A — лінійний замкнений оператор зі щільною κ рефлексивному банаховому просторі E областю визначення $D(A)$, для якого $0 \notin \sigma(A)$, де $\sigma(A)$ — спектр оператора A . Тоді границя в розумінні Чезаро обмеженого розв'язку $y(t)$ еволюційного рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, дорівнює нулю.

Доведення. Оскільки множина регулярних точок $\rho(A)$ відкрита, то знайдеться деяке таке $\delta > 0$, що інтервал $(0, \delta)$ належить $\rho(A)$. Тоді в силу теореми

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\xi) d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \lambda R_{\lambda} y(0) = 0 R_0 y(0) = 0.$$

Наслідок 2. Нехай A — генератор обмеженої напівгрупи $U(t)$ класу C_0 в рефлексивному банаховому просторі E . Тоді будь-який розв'язок $y(t)$ еволюційного рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, має границю в розумінні Чезаро і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\xi) d\xi = Py(0),$$

де P — проєктор на ядро $\text{Ker } A$ оператора A .

Доведення. Оскільки напівгрупа $U(t)$ обмежена, то кожен розв'язок рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$ також обмежений. Як і в доведенні леми 1 [4], $\lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \lambda R_{\lambda} y(0) = Py(0)$, звідки в силу теореми

$$(C - 1) \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Py(0).$$

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 830 с.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1967.— 464 с.
3. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения.— Киев: Вища шк., 1989.— 120 с.
4. Горбачук Е. Л. Решение одной обратной задачи для эволюционного уравнения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 9.— С. 1262—1265.

Одержано 14.02.92