УДК 517.9

А. К. Прикарпатський, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів),
Б. М. Філь, канд. фіз.-мат. наук (Львів. політехн. ін-т)

Категорія топологічних джет-многовидів та деякі застосування в теорії нелінійних нескінченновимірних динамічних систем

З метою дослідження точних скінченновимірних апроксимацій нелінійних динамічних систем на нескінченновимірних функціональних многовидах пропонується нова категорія топологічних джет-многовидів. Вивчаються диференціально-геометричні структури на них та їх застосування в теорії інтегровності в квадратурах нелінійних динамічних систем типу Лакса.

С целью исследования точных конечномерных аппроксимаций нелинейных динамических систем на бесконечномерных функциональных многообразиях предлагается новая категория топологических джет-многообразий. Изучаются дифференциально-геометрические структуры на них и их приложения в теории интегрируемости в квадратурах нелинейных динамических систем типа Лакса.

1. Нехай заданий деякий функціональний векторний простір $M \subset\!\!\!\to C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ гладких функцій на осі $\mathbb{R}$. Як функціональний многовид він є нескінченновимірним, що являє собою значну трудність з точки зору його використання як фазового простору для нелінійних динамічних систем та вивчення їх інтегровності в квадратурах за Ліувіллем [1—4]. Становить також значну трудність використання [5] на нескінченновимірних многовидах диференціально-геометричних та теоретико-групових методів дослідження. Виходячи з цього пропонується нова диференціально-топологічна конструкція — категорія топологічних джет-многовидів, що є зручною саме при дослідженні інтегровності нелінійних динамічних систем на нескінченновимірних функціональних многовидах. Цю конструкцію ми також узагальнюємо на випадок нескінченновимірних супермноговидів, що широко використовуються у задачах сучасної квантової фізики та статистичної механіки.

2. Розглянемо скінченновимірний простір $\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{k+1}$, $m, k \in \mathbb{Z}_+$, і в ньому довільну точку $[u^{(k)}] = (u = u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)})$. Визначимо тепер у просторі $\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{k+1}$ дію векторного поля $\frac{d}{dx}: \overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{k+1} \to \overset{(m)}{\otimes} T(\mathbb{R}^{k+1})$ за правилом

$$\frac{d}{dx} u^{(i)} = u^{(i+1)}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

$$\frac{d}{dx} u^{(k)} = g_k([u^{(k)}]), \quad [u^{(k)}]|_{x=x_0} = [u_0^{(k)}], \tag{1}$$

де $g_k \in C^{(\infty)}(\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}^m)$ — деяке гладке відображення. Якщо $\mathrm{Or}(x_0: [u_0^{(k)}], g_k)$ — орбіта векторного поля (1) через точку $[u_0^{(k)}] \in \overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{k+1}$ при $x = x_0 \in \in \mathbb{R}$, то відображення $g_k \in C^{(\infty)}(\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}^m)$ вибираємо, зокрема, таке, щоб орбіта $\mathrm{Or}(x_0; [u_0^{(k)}], g_k)$ була компактною і за параметром $x \in \mathbb{R}$ глобальною. Означимо тепер топологічний k-джет $\bar{j}_{\mathrm{top}}^{(k)}(x_0; [u_0^{(k)}])$ за правилом

$$\bar{j}_{\mathrm{top}}^{(k)}(x_0; [u_0^{(k)}]) = \bigcup_{(g_k)} \overline{\mathrm{Or}}(x_0; [u_0^{(k)}], g_k), \tag{2}$$

де топологічна сума береться по всіх відображеннях $g_k \in C^{(\infty)}(\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}^m)$, що задовольняють наведену вище умову глобальності орбіт. Відповідно означимо тепер топологічний джет-многовид $J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ як топологічну суму

$$J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) = \bigcup_{[u_0^{(k)}]} \bar{j}_{\mathrm{top}}^{(k)}(x_0; [u_0^{(k)}]). \tag{3}$$

За своєю побудовою многовид $J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ гомеоморфний скінченовимірному функціональному підпростору $M^{(k+1)m} \subset\!\!\!\to M \subset\!\!\!\to C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, інваріантному відносно векторного поля d/dx, $x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо тепер узгоджений ланцюжок проекцій інваріантних джет-многовидів

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} & & & & & \\
& J_{\mathrm{top}}^{(0)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \arrow[ul] \arrow[dl] & J_{\mathrm{top}}^{(1)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \arrow[l, "\pi"'] & \cdots \arrow[l, "\pi"'] & J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \arrow[l, "\pi"'] & \cdots, \arrow[l, "\pi"'] \\
\mathbb{R}^m & & & & &
\end{tikzcd} \qquad (4)$$

де проекція $\pi: J_{\mathrm{top}}^{(k+1)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \to J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, визначається таким чином. Якщо $\bar{j}_{\mathrm{top}}^{(k+1)}(x_0; [u_0^{(k+1)}]) \in J_{\mathrm{top}}^{(k+1)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, то для кожної орбіти

$\mathrm{Or}\,(x_0; [u_0^{(k+1)}],\ g_{k+1} \in J_{\mathrm{top}}^{(k+1)}\,(x_0; [u_0^{(k+1)}])$, що визначається відповідною системою рівнянь

$$\frac{d}{dx}\,u^{(i)} = u^{(i+1)},\ i = \overline{0,\, k},$$

$$\frac{d}{dx}\,u^{(k+1)} = g_{k+1}\,([u^{(k+1)}]), \quad [u^{(k+1)}]\,|_{x=x_0} = [u_0^{(k+1)}], \tag{5}$$

визначена однозначно також орбіта $\mathrm{Or}\ (x_0; [u_0^{(k)}],\ g_k) \in j_{\mathrm{top}}^{(k)}\,(x_0;\ [u_0^{(k)}])$, яка інваріантна відносно векторного поля (5). А саме, повинна виконуватися тотожно на орбіті $\mathrm{Or}\,(x_0; [u_0^{(k)}])$ рівність

$$\sum_{j=0}^{k-1} u^{(j+1)}\,\frac{\partial g_k\,([u^{(k)}])}{\partial u^{(j)}} + g_k\,\frac{\partial g_k\,([t^{(k)}])}{\partial u^{(k)}} = g_{k+1}\,([u^{(k)}],\ g_k). \tag{6}$$

Рівняння (6) еквівалентне набору рівнянь в характеристиках

$$\begin{gathered} u^{(j+1)}\,\frac{dg_k}{du^{(j)}} = g_{k+1}\,([u^{(k)}],\ g_k), \quad j = \overline{0,\ k-1}, \\ g_k\,\frac{dg_k}{du^{(k)}} = g_{k+1}\,([u^{(k)}],\ g_k), \end{gathered} \tag{7}$$

для яких необхідне існування глобального розв'язку для відображення $g_k \in C^{(\infty)}\,(\overset{(m)}{\otimes}\ \mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}^m), \quad k \in \mathbb{Z}_+$.

З наведеної вище конструкції топологічних джет-многовидів $J_{\mathrm{top}}^{(k)}\,(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ видно, що ланцюжок (4) утворює ланцюжок розшарувань із побудованими вище проекціями $\pi: g_{k+1} \to g_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, що зберігають інваріантність проекцій орбіт $\mathrm{Or}\,(x_0; [u_0^{(k+1)}],\ g_{k+1}),\ k \in \mathbb{Z}_+$, відносно векторного поля $d/dx,\ \ x \in \mathbb{R}$. Таким чином, ланцюжок проекцій (4) визначає топологічне джет-розширення векторного поля d/dx: $\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{n+1} \to \otimes\, T(\mathbb{R}^{n+1}),\ n \in \mathbb{Z}_+$, тобто інваріантний нескінченновимірний джет-многовид $J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}\,(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) = \operatorname{inv}\lim\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} J_{\mathrm{top}}^{(k)}\,(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ як зворотну границю скінченновимірних джет-многовидів $J_{\mathrm{top}}^{(k)}\,(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m),\ k \in \mathbb{Z}_+$. Внаслідок своєї побудови ланцюжок (4) реалізує зчисленне інваріантне розбиття функціонального простору $M \subset_{\to} C^{(\infty)}\,(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ на скінченновимірні функціональні джет-многовиди $J_{\mathrm{top}}^{(k)}\,(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m),\ h \in \mathbb{Z}_+$. Є також очевидним узагальненням описаного вище методу побудови топологічного джет-многовиду на випадок функціонального простору $M \subset_{\to} C^{(\infty)}\,(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ за допомогою джет-розширення набору комутуючих векторних полів d/dx_j: $\overset{(m)}{\otimes}\ \mathbb{R}^p \to \overset{m}{\otimes}\ T\,(\mathbb{R}^p),\ j = \overline{1,\, n},\ p = \sum\limits_{s=0}^{k} C_{n+s-1}^{s}$, причому рівняння

$$\frac{du^{(i)}}{dx_j} = u^{(i,j)}, \quad (i) = (i_1,\, i_2,\, \dots,\, i_p) \in \mathbb{Z}_+^p,$$

$$\frac{du^{(k)}}{dx_j} = g_{(k)}\,([u^{(k)}]) \tag{8}$$

де $i < k,\ k = \overline{1,\, n}, \quad (i;\, j) = (i_1, \dots, \quad i_{j+1}, \dots,\ i_p) \in (i+1), \quad [u^{(k)}]\,|_{\{x_j = x_{j_0}\}} = [u_0^{(k)}] \in \overset{(m)}{\otimes}\ \mathbb{R}^p$, задають орбіту

$$\mathrm{Or}\,(x_0;\ [u_0^{(k)}],\ g_{(k)}) \subset J_{\mathrm{top}}^{(k)}\,(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Визначаючи проекції $\pi\colon J_{\mathrm{top}}^{(k+1)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \to J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ як у ланцюжку розшарувань (4), одержуємо топологічний джет-многовид $J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) = \operatorname{inv\,lim}_{(k)\in\mathbb{Z}_+^n} J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Введена вище конструктивним шляхом категорія топологічних джет-многовидів є, очевидно, зручним об'єктом для вивчення диференціальних структур на нескінченновимірних гладких функціональних многовидах $M \subset\!\!\to C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ з огляду їх локальної дифеоморфності. При певній же спеціалізації нескінченновимірного гладкого функціонального многовиду $M \subset\!\!\to C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ конструкція топологічного джет-многовиду $J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ дає також можливість побудови їх глобального дифеоморфізму, що особливо важливо для аналізу властивостей динамічних систем на них.

Зауваження 1. Класичний підхід [5, 6] до побудови диференціального джет-розшарування $J_{\mathrm{diff}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, множини гладких відображень $f, g \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ визначається класом еквівалентності вказаних відображень, при якій $f \sim g$, якщо $d^{|i|}(f-g)/dx^{(i)}\,|_{\{x_j = x_{j_0}\}} = 0$, $j = \overline{1, n}$, $|i| \leqslant k$. Локально многовид $J_{\mathrm{diff}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ — це простір многочленів Тейлора k-го порядку відображень $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси випливає, що диференціальний джет-многовид $J_{\mathrm{diff}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, не є інваріантним відносно векторних полів d/dx_j, $j = \overline{1, n}$, причому зовсім не визначена його глобальна топологічна структура як скінченновимірного многовиду за умови, що елемент $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ належить певному функціональному підпростору $M \subset\!\!\to C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Також внаслідок наведеної вище побудови легко побачити, що $J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \subset J_{\mathrm{diff}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$.

Зауваження 2. Досить очевидним є узагальнення описаної вище категорії топологічних джет-многовидів на випадок, коли вихідний функціональний простір $M \subset\!\!\to C^{(\infty)}(Q; G)$, де Q і G — відповідно n-і m-вимірний гладкі многовиди. Для цього досить розглянути описаний нами метод побудови топологічних джет-многовидів $J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ як побудову локальних карт топологічних джет-многовидів $J_{\mathrm{top}}^{(k)}(Q; G)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, визначаючи $J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}(Q; G) = \operatorname{inv\,lim}_{k\in\mathbb{Z}_+} J_{\mathrm{top}}^{(k)}(Q; G)$, одержуємо топологічний джет-многовид, що є локально-гомеоморфний вихідному функціональному підпростору $M \subset\!\!\to C^{(\infty)}(Q; G)$.

3. Побудувавши топологічні джет-многовиди $J_{\mathrm{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, можна задати стандартним чином [7] дотичні і кодотичні простори над $J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, а саме,

$$T(J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}) = \operatorname*{inv\,lim}_{(k)\in\mathbb{Z}_+^n} T(J_{\mathrm{top}}^{(k)}), \quad T^*(J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}) = \operatorname*{inv\,lim}_{(k)\in\mathbb{Z}_+^n} T^*(J_{\mathrm{top}}^{(k)}), \tag{9}$$

а також модуль векторних полів $\mathscr{T}(J_{\mathrm{top}}^{(\infty)})$ і алгебру Грасмана $\Lambda(J_{\mathrm{top}}^{(\infty)})$ диференціальних форм. На многовиді $J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ визначені канонічні векторні поля $\dfrac{d}{dx_j} \in \mathscr{T}(J_{\mathrm{top}}^{(\infty)})$, $j = \overline{1, n}$, причому в локальних координатах їх форма така:

$$\frac{d}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,k} u_i^{(k;j)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(k)}}, \tag{10}$$

де частинна похідна $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$, включена в (10) для випадку розширеного топологічного джет-многовиду $\tilde{J}_{\mathrm{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times J_{\mathrm{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, який природно враховує можливу явну неоднорідність за параметрами $x_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, певних диференціально-геометричних структур на вихідному функціональному просторі $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. При цьому $\{x_j; u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(k)}, \ldots\}$ — локальні координати на джет-многовиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, де за побудовою

$$\frac{d}{dx_j} u_i^{(k)} = u_i^{(k;j)} \in \{u_i^{(k+1)}\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Алгебра Грасмана $\Lambda(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} \Lambda^j(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$, де $\Lambda^j(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$ — $\mathbb{R}$-модуль диференціальних j-форм, $j \in \mathbb{Z}_+$, на джет-многовиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, утворює стандартний комплекс де-Рама

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{d} \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \cdots \to \Lambda^j \xrightarrow{d} \Lambda^{j+1} \xrightarrow{d} \cdots, \tag{11}$$

який є точним згідно з d-лемою Пуанкаре [8], і де операція $d: \Lambda^j \to \Lambda^{j+1}$ у (8), $j \in \mathbb{Z}_+$ — зовнішнє диференціювання (антидиференціювання порядку $+1$) алгебри Грасмана $\Lambda(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$.

Внаслідок своєї конструкції многовид $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, локально параметризований точками $\{x\} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, які будемо надалі називати незалежними змінними. Відповідно до цього розкладемо модуль $\Lambda^j(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$, $j \in \mathbb{Z}_+$, у пряму суму підмодулів: $\Lambda^j = \bigoplus_{(k=\overline{0,j})} \Lambda^{(j-k|k)}$, де, за означенням, $\Lambda^{(j|k)} = \Lambda^j(J_{\text{top}}^{(\infty)}) \wedge \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$. Задамо тепер таку [9] операцію $\mathcal{D}: \Lambda^{(j|k)} \to \Lambda^{(j|k+1)}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, згідно з правилом

$$\mathcal{D}\alpha = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge L \frac{d}{dx_j} \alpha, \tag{12}$$

де $\alpha \in \Lambda^{(j|k)}$, $L_K = i_K d + d i_K$ — похідна Лі [7 — 11] вздовж векторного поля $K: \tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)} \to T(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$, i_K — звичайне внутрішнє антидиференціювання по $K \in \mathcal{T}(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$.

Операцію (12) характеризує наступна теорема.

Теорема 1. *Для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$ комплекс*

$$0 \to \delta_{j,0}\mathbb{R} \to \Lambda^{(j|0)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Lambda^{(j|1)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \cdots \to \Lambda^{(j|k)} \to \cdots \tag{13}$$

є точним, причому справедлива формула $d\mathcal{D} + \mathcal{D}d = 0$.

Доведення теореми 1 грунтується на наступній лемі гомотопії типу Пуанкаре.

Лема 1. *Нехай $\alpha \in \Lambda^{(j|k)}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, — довільна $(j+k)$-форма на джет-многовиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Тоді*

$$\alpha[x; u] = \mathcal{D}H(\alpha)[x; u] + H(\mathcal{D}\alpha)[x; u], \tag{14}$$

де оператор гомотопії $H: \Lambda^{(j|k)} \to \Lambda^{(j|k-1)}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, визначається за правилом [12]

$$H(\alpha)[x; u] = \sum_{|k| \in \mathbb{Z}_+} \sum_{s=1}^{n} \sum_{(l)} \int_0^1 d\lambda D_x^{|k|} \langle v i_{\frac{\partial}{\partial x_s}} \omega_l, \frac{\partial P_l[x; \lambda u]}{\partial u^{(k,s)}} \rangle \Big|_{v=u}, \tag{15}$$

де, за визначенням $\alpha[x; u] = \sum_{(l)} \omega_l P_l[x; u]$, $\omega_l \in \Lambda^{(j|k)}$, $l = \overline{1, C_n^k}$, — відповідний базис $(k+j)$-форм, $D_x^{|k|} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dx_i} - \partial_{x_i}\right)^{k_i}$, $\sum_{i=1}^{n} k_i = |k|$, причому $\partial_x v = 0$, $\partial x_i \alpha[x; u] = d\alpha[x; u]/dx_i$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Для доведення леми 1 зауважимо, що внаслідок тотожності

$\left[\frac{\partial}{\partial u^{(k;s)}}, \frac{d}{dx_s}\right] = \frac{\partial}{\partial u^{(k)}}$, $s = \overline{1, n}$, справедливе співвідношення

$$H(\mathcal{D}\alpha)[x; u] = \alpha[x; u] -$$

$$- \sum_{k| \in \mathbb{Z}_+} \sum_{s,m}^{n} \sum_{(l)} \int_0^1 d\lambda \frac{d}{dx_m} D_x^{|k|} \langle v dx_m \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_s}} \omega_l, \frac{\partial P_l[x; \lambda u]}{\partial u^{(k;s)}} \rangle \Big|_{v=u} =$$

$$= \alpha[x; u] - \sum_{m=1}^{n} dx_m \wedge \frac{d}{dx_m} H(\alpha)[x; u]. \tag{16}$$

Таким чином, з (16) знаходимо, що для довільної $(k + j)$-форми $\alpha[x; u] \in \Lambda^{(j|k)}$ справедлива формула (14), що й треба було встановити.

Зауваження 3. При виведенні (14) ми скористались формулою гомотопії по векторному полю Ліувілля на джет-многовиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, що вимагає «зірчастості» [6 — 9] многовиду $\{x\} \times J_{\text{top}}^{(\infty)}$ для кожного $x \in \mathbb{R}^n$.

Тепер з урахуванням леми 1 твердження теореми 1 стає очевидним. Якщо форма $\alpha \in \Lambda^{(j|k)}$ замкнена, то при $k = \overline{0, n-1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, комплекс (13) буде точним, тобто якщо $\mathcal{D}\alpha = 0$, то існує форма $\beta \in \Lambda^{(j|k-1)}$ така, що $\alpha = \mathcal{D}\beta \in \Lambda^{(j|k)}$, $\beta = H(\alpha)$. Рівність $d\mathcal{D} + \mathcal{D}d = 0$ є очевидною згідно з визначенням (12).

Зауваження 4. Відповідне доведення точності комплексу (13) в [9] є технічно відмінним від наведеного вище, а також важчим, бо використовує поняття «операторів Ейлера» вищих порядків, які мають складну операторно-диференціальну структуру. Наше доведення грунтується на формулі гомотопії (15), вперше встановленій у роботі [12], де, зокрема, наведене ефективне розв'язання однієї оберненої задачі диференціальної алгебри.

Асоціюємо тепер з комплексом (11) такий комплекс:

$$\Lambda_*^{(0|k)} \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(1|k)} \xrightarrow{d_*} \cdots \to \Lambda_*^{(j|k)} \xrightarrow{d_*} \cdots, \tag{17}$$

де $j, k \in \mathbb{Z}_+$ і операція «d_*» (17) означається за правилом

$$d = d_u + d_x,$$

$$d_* \pi_*(\alpha) = \pi_* d_u \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^{(j|k)},$$

$$\pi_* : \Lambda^{(j|k)} \to \Lambda_*^{(j|k)} = \Lambda^{(j|k)} / \mathcal{D}\Lambda^{(j|k-1)}. \tag{18}$$

Справедлива така теорема [9, 5].

Теорема 2. *Комплекс* (17) *точний.*

Доведення грунтується на теоремі 1 і точності d_u-комплексу де-Рама.

$$\Lambda^{(0|k)} \xrightarrow{d_u} \Lambda^{(1|k)} \xrightarrow{d_u} \cdots \to \Lambda^{(j|k)} \xrightarrow{d_u} \cdots, \tag{19}$$

яка є наслідком класичної леми Пуанкаре [4, 7].

Об'єднуючи теореми 1 і 2, знаходимо, що наступний комплекс точний:

$$\Lambda^{(0|0)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Lambda^{(0|1)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \cdots \to \Lambda^{(0|n)} \xrightarrow{E} \Lambda_*^{(1|n)} \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(2|n)} \to \cdots, \tag{20}$$

причому оператор Ейлера $E: \Lambda^{(0|n)} \to \Lambda_*^{(1|n)}$ визначається за правилом

$$\alpha \in \Lambda^{(0|n)} \simeq \Lambda^{(0|0)},$$

$$E\alpha[x; u] = \langle \alpha_u'^{*}[x; u] \cdot 1, du \rangle, \tag{21}$$

що випливає із формул гомотопії (14) і (15); значки «′» і «*» означають відповідно похідну Фреше елемента $\alpha \in \Lambda^{(0|n)}$ як локального функціонала на функціональному просторі $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ і її спряження відносно стандартної білінійної форми на $T^*(M) \times T(M)$ [9, 13]. Переходячи до звичайних позначень [9, 13], одержуємо, що коли заданий елемент $\varphi \in T^*(M) \hookrightarrow T^*(J^{(\infty)}_{\mathrm{top}})$, то величина $\langle \alpha, du \rangle \Rightarrow \mathrm{E}\alpha[x, u]$ для деякого елемента $\alpha \in \Lambda^{(0|0)}$ тоді і тільки тоді, коли виконана умова Вольтерри — Гельмгольца: $\varphi'[x; u] = \varphi'^{*}[x; u]$. Справді, з (20) випливає $E\alpha[x; u] \in \operatorname{Ker} d_*$, тобто білінійна форма $\langle du, \varphi' \cdot du \rangle$ повинна бути симетричною як ядро операції d_*, а це і означає, що $\varphi'[x; u] = \varphi'^{*}[x: u]$ для всіх $[x; u] \in \in \tilde{J}^{(\infty)}_{\mathrm{top}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. При цьому вірна формула гомотопії Вольтерри

$$\alpha[x; u] \simeq \int_0^1 d\lambda \langle E\alpha[x; \lambda u], u \rangle, \tag{22}$$

що теж випливає з (14), (15); значок «$\simeq$» означає рівність з точністю за модулем $\{\operatorname{mod} \mathcal{D}\Lambda^{(0|n-1)}\}$ згідно з (20).

4. Перейдемо до узагальнення поняття категорії топологічних джет-многовидів у випадку підстилаючого функціонального супермноговиду $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$, де $\mathbb{R}^{j|n}$, $(j, n) \in \mathbb{Z}^2_+ \setminus \{0, 0\}$, — комутативна супералгебра, тобто $\mathbb{Z}_2$-градуйований лінійний векторний простір над полем $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$), на якому введена структура асоціативної алгебри з одиницею. Відповідний суперкомутатор $[\cdot, \cdot]$ на $\mathbb{R}^{j|n}$ означається як $[a, b] = = a \cdot b - (-1)^{\tilde{a} \cdot \tilde{b}}\, b \cdot a = 0$, де $a, b \in \mathbb{R}^{j|n}$ — довільні однорідні елементи [14] в супералгебрі $\mathbb{R}^{j|n}$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in \{0, 1\}$ — відповідні їх «парності», причому згідно з розкладом $\mathbb{R}^{j|n} = \mathbb{R}^{j|0} \oplus \mathbb{R}^{0|n}$, $\mathbb{R}^{j|0} \ni a \to \tilde{a} = 0$, $\mathbb{R}^{0|n} \ni b \to \tilde{b} = 1$, $\dim \mathbb{R}^{j|0} = = j \in \mathbb{Z}_+$ і $\dim \mathbb{R}^{0|n} = n \in \mathbb{Z}_+$. Як встановлено в [14], структура супералгебри $\mathbb{R}^{j|n}$, $(j, n) \in \mathbb{Z}^2_+ \setminus \{0, 0\}$ суттєво означається її анулятором ${}^{\perp}\mathbb{R}^{j|n} = = \{a \in \mathbb{R}^{j|n} : a\mathbb{R}^{0|n} = 0\}$, а саме, вірна наступна [14] теорема.

Теорема 3. *Якщо* $\mathbb{R}^{j|n} = \mathbb{R}^{j|0} \oplus \mathbb{R}^{0|n}$, $j, n \in \mathbb{Z}_+$ $(\mathbb{R}^{j|n} \neq \varnothing)$ — *комутативна супералгебра з тривіальним анулятором* ${}^{\perp}\mathbb{R}^{j|n} = \varnothing$ *над полем* $\mathbb{R}$, *то* $\mathbb{R}^{0|n}$ — *нескінченновимірний простір*: $\dim \mathbb{R}^{0|n} = n = \infty$.

Серед найбільш «класичних» прикладів нескінченновимірної комутативної супералгебри з нульовим анулятором відмітимо побудовану нами раніше грасманову алгебру $\Lambda(J^{(\infty)}_{\mathrm{top}}) = \operatorname*{inv\,lim}_{j \in \mathbb{Z}_+} \Lambda(J^{(j)}_{\mathrm{top}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m))$, де $\mathbb{R}(J^{(\infty)}_{\mathrm{top}}) = = \Lambda_s(J^{(\infty)}_{\mathrm{top}}) \oplus \Lambda_a(J^{(\infty)}_{\mathrm{top}})$ — розклад в пряму суму парних і непарних диференціальних форм довільного порядку.

Розглянемо скінченновимірний векторний суперпростір $\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{1|n(k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і в ньому довільну точку $[u^{[k]}] = (u = u^{[0]}, u^{[1]}, \ldots, u^{[k]})$ і задамо в ньому дію векторного поля $\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{1|n(k+1)} \to \overset{(m)}{\otimes} T\,\mathbb{R}^{1|n(k+1)}$ за правилом

$$\frac{d}{d\theta}u^{[i]} = u^{[i+1]}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

$$\frac{d}{d\theta}u^{[k]} = g_k([u^{[k]}]), \quad [u^{[k]}]|_{x=x_0} = [u^{[k]}], \tag{23}$$

де $g_k \in C^{(\infty)}(\overset{(m)}{\otimes}\mathbb{R}^{1|n(k+1)}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$ — деяке гладке відображення. Саме векторне поле $\dfrac{d}{d\theta}$ задається виразом

$$D_\theta = \frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\frac{d}{dx}, \quad \theta^2 = 0, \tag{24}$$

де $(x, \theta) \in \mathbb{R}^{1|n}$ — відповідні координати в комутативній супералгебрі $\mathbb{R}^{1|n}$. Операція (24) має таку властивість: $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{d}{d\theta}, \dfrac{d}{d\theta}\right] = \dfrac{d^2}{d\theta^2} = \dfrac{d}{dx}$, тобто векторне поле (24) — «квадратний корінь» з векторного поля $\dfrac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}^{1|n}$.

Вираз $\frac{\partial}{\partial\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$, означає частинну похідну за «суперзмінною» $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$ на функціональному просторі $M \subset\!\to C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$. Але в загальному випадку частинна похідна $\partial/\partial\theta$ не визначена однозначно [14]. Але, оскільки для суперпросторів над комутативною супералгеброю з тривіальним анулятором частинна похідна $\partial/\partial\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$, визначена вже однозначно [14], то звідси випливає необхідність розглянути нескінченновимірну комутативну супералгебру $\mathbb{R}^{1|n}$, причому $\dim \mathbb{R}^{0|n} = n = \infty$. Таким чином, надалі вважатимемо, що $\dim \mathbb{R}^{1|0} = 1$, $\dim \mathbb{R}^{0|n} = n = \infty$, і частинна похідна $\partial/\partial\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$, визначена на функціональному суперпросторі M однозначно.

Нехай $\mathrm{Or}\,(x_0; [u_0^{[k]}], g_k)$ — орбіта векторного поля (23) через точку $[u_0^{[k]}] \in \overset{(m)}{\otimes} \mathbb{R}^{1|n(k+1)}$ при $x = x_0 \in \mathbb{R}$, причому вона компактна і глобальна за параметром $x \in \mathbb{R}$. Означаючи аналогічно п. 2 топологічний k-суперджет $j_{\text{top}}^{[k]}(x_0; [u_0^{[k]}])$, $k \in \mathbb{Z}_+$, будуємо топологічний джет-супермноговид $J_{\text{top}}^{[k]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$ як топологічну суму

$$J_{\text{top}}^{[k]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) = \bigcup_{[u_0^{[k]}]} j_{\text{top}}^{[k]}(x_0; [u_0^{[k]}]). \tag{25}$$

Будуючи аналогічно (4) узгоджений ланцюжок проекцій інваріантних джет-супермноговидів

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{1|n} & & & & & \\
& J_{\text{top}}^{[0]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) \arrow[ul] \arrow[dl] & J_{\text{top}}^{[1]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) \arrow[l, "\pi"'] & \ldots \arrow[l, "\pi"'] & J_{\text{top}}^{[k]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) \arrow[l, "\pi"'] & \ldots, \arrow[l, "\pi"'] \\
\mathbb{R}^{1|n(m)} & & & & &
\end{tikzcd} \tag{26}$$

означаємо нескінченновимірний топологічний джет-супермноговид

$$J_{\text{top}}^{[\infty]}[\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) = \operatorname*{inv\,lim}_{k \in \mathbb{Z}_+} J_{\text{top}}^{[k]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$$

як відповідну (26) зворотну границю. Стандартним чином також означається грасманова алгебра $\Lambda(\tilde{J}_{\text{top}}^{[\infty]})$ диференціальних форм на джет-супермноговиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) = \mathbb{R}^{1|n} \times J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$.

Зауваження 5. Операція (24) на однорідних елементах $a, b \in M$ діє як супердиференціювання Лі:

$$\frac{d}{d\theta}(ab) = \left(\frac{d}{d\theta} a\right) b + (-1)^{\tilde{a}}\, a \left(\frac{d}{d\theta} b\right), \tag{27}$$

де враховано, що парність $\widetilde{d}/d\theta = 1$ згідно з (24).

Розглянемо тепер супердиференціальний комплекс форм на $J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$:

$$0 \to \mathbb{R}^{1|n} \to \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \to \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^j \xrightarrow{d} \Lambda^{j+1} \cdots, \tag{28}$$

де операція зовнішнього диференціювання $d\colon \Lambda \to \Lambda$ означається правилом [15 — 18]

$$da(\xi_1) = (-1)^{\tilde{a}\tilde{\xi}_1} \xi_1 \cdot a,$$

$$d\alpha(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{\tilde{\xi}_1 \tilde{\alpha}} \xi_1 \alpha(\xi_2) - (-1)^{\tilde{\xi}_2(\tilde{\alpha} + \tilde{\xi}_1)} \xi_2 \alpha(\xi_1) - \alpha([\xi_1, \xi_2]). \tag{29}$$

Тут $a \in \Lambda^0(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, $\alpha \in \Lambda^1(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, $\xi_1, \xi_2 \in T(J_{\text{top}}^{[\infty]})$ — відповідні однорідні елементи, причому парність $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}_2$ для довільної j-форми $\alpha \in \Lambda^j(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, $j \in \mathbb{Z}_+$, задається виразом ($\alpha \neq 0$)

$$\tilde{\alpha} = \alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j)^{\sim} - \sum_{i=1}^{j} \tilde{\xi}_i + \bar{j}/\mathrm{mod}\, 2\mathbb{Z}. \tag{30}$$

Якщо $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^1(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$, $\xi_1, \xi_2 \in T(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$, то операція зовнішнього добутку $\wedge : \Lambda(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]}) \to \Lambda(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$ означається правилом [15, 19]

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 (\xi_1, \xi_2) = (-1)^{\tilde{\xi}_1 \tilde{\alpha}_2} \alpha_1(\xi_1)\, \alpha_2(\xi_2) - (-1)^{\tilde{\xi}_2 (\tilde{\xi}_1 + \tilde{\alpha}_2)} \alpha_1(\xi_2)\, \alpha_2(\xi_1). \quad (31)$$

Відповідно операція внутрішнього антидиференціювання $i(\xi) : \Lambda^j \to \Lambda^{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, діє згідно з правилом

$$i(\xi)\ \alpha(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}) = (-1)^{\tilde{\xi}\tilde{\alpha}} \alpha(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{j-1}) \quad (32)$$

для довільних однорідних елементів $\xi, \xi_k \in T(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$, $k = \overline{1, j-1}$, причому

$$i(\xi)\ (\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (i(\xi)\, \alpha_1) \wedge \alpha_2 + (-1)^{\tilde{\alpha}_1 (1 + \tilde{\xi})} \alpha_1 \wedge (i(\xi), \alpha_2), \quad (33)$$

де $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$ — довільні однорідні диференціальні форми. За допомогою (32) означається похідна Лі L_ξ за формулою Картана

$$L_\xi = i(\xi)\, d + d i(\xi), \quad (34)$$

де $\xi \in T(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$ — довільний елемент з дотичного простору до джет-супермноговиду $J_{\mathrm{top}}^{[\infty]}$.

Нехай $\mathcal{T}(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$ — модуль векторних полів на джет-супермноговиді $J_{\mathrm{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{n|n} : \mathbb{R}^{1|n(m)})$. Структура супералгебри Лі в $\mathcal{T}(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$ означається суперкомутатором $[\cdot, \cdot]$, де для довільних однорідних векторних полів $K, F, G \in \mathcal{T}(J_{\mathrm{top}}^{[\infty]})$

$$[K, F] = K \cdot F - (-1)^{\tilde{K} \cdot \tilde{F}} F \cdot K = -(-1)^{\tilde{K} \cdot \tilde{F}} [F, K],$$

$$\sum_{\text{цикл}\,(K, F, G)} (-1)^{\tilde{K} \cdot \tilde{G}} [K, [F, G]] = 0. \quad (35)$$

З урахуванням формул (29) встановлюємо, що згідно з класичною лемою Пуанкаре вірна така теорема.

Теорема 4. *Комплекс* (28) *точний.*

Як наслідок одержуємо, що відповідні комплекси

$$\Lambda^{(0|j)} \xrightarrow{d_u} \Lambda^{(1|j)} \to \cdots \to \Lambda^{(k|j)} \xrightarrow{d_u} \cdots$$

і (36)

$$\Lambda^{(j|0)} \xrightarrow{d_x} \Lambda^{(j|1)} \to \cdots \to \Lambda^{(j|k)} \xrightarrow{d_x} \cdots,$$

де $d = d_u + d_x$, є точними.

Нехай $\{\theta_j : j = \overline{1, n}\}$ — базис модуля $\mathbb{R}^{0|n}$ в комутативній супералгебрі $\mathbb{R}^{1|n}$; тоді можна визначити комплекс

$$\Lambda^{(0|0)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Lambda^{(0|1)} \to \overset{\mathcal{D}}{\cdots} \to \Lambda^{(0|n)} \xrightarrow{E} \Lambda_*^{(1|n)} \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(2|n)} \Rightarrow \cdots, \quad (37)$$

де

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{n} d\theta_j \wedge \frac{d}{d\theta_j}, \quad \frac{d}{d\theta_j} = \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \theta_j \frac{d}{dx}, \quad (38)$$

причому очевидно $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} = 0$, $\left[\frac{d}{d\theta_j}, \ \frac{d}{d\theta_k}\right] = 2\delta_{j,k} \frac{d}{dx}$, $j, k = \overline{1, n}$. Оскільки для операції $\mathcal{D} : \Lambda^{(0|j)} \to \Lambda^{(0|j+1)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, вірна формула гомотопії типу (14), то справедлива наступна теорема.

Теорема 5. *Комплекс* (37) *точний, причому оператор варіаційної суперпохідної Ейлера* $E : \Lambda^{(0|n)} \to \Lambda^{(1|n)}$ *означається правилом* [17, 18]

$$E\alpha = \langle \alpha_u'^{*}[u] \cdot 1, du \rangle = \langle \operatorname{grad} \alpha[u], du \rangle =$$

$$= \sum_{|k| \in \mathbb{Z}_+} \langle (-1)^{\bar{u}\,|k|} \prod_{(j) \subset (k)} (-1)^{|j|} \frac{d^{|j|}}{d\theta^{[j]}} \frac{\partial \alpha[u]}{\partial u^{[j]}}, du \rangle. \tag{39}$$

Зауваження 6. Якщо $\alpha \in \Lambda^{(0|0)}(J^{[\infty]}_{\text{top}})$, то з (37) також випливає $d\alpha = \langle \operatorname{grad} \alpha[u], du \rangle + \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{d\theta_j} \boldsymbol{\omega}_j[u]$, де $\boldsymbol{\omega}_j \in \Lambda^{(1|0)}(J^{[\infty]}_{\text{top}})$, $j = \overline{1, n}$, — деякі 1-форми.

Зауваження 7. При побудові топологічного джет-супермноговиду $J^{[\infty]}_{\text{top}}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$ ми повинні врахувати, що множина векторних полів $\frac{d}{d\theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \theta_j \frac{d}{dx}$, $j = \overline{1, n}$, не є суперабелевою, через що необхідно для його узгодженості як функціонального суперпростору $M \subset_{\rightarrow} C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$ розглядати многовид $J^{[\infty]}_{\text{top}}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$ як інтегральний [8] для супердиференціальної системи векторних полів $\theta(M) = \left\{ \frac{d}{d\theta}, \frac{d^2}{d\theta_j^2}; j = \overline{1, n} \right\}$, що утворюють таку супералгебру Лі:

$$\left[\frac{d}{d\theta_j}, \frac{d}{d\theta_s} \right] = \delta_{js} 2 \frac{d}{dx}, \quad \left[\frac{d}{d\theta_j}, \frac{d}{dx} \right] = 0, \tag{40}$$

для всіх $j, s = \overline{1, n}$, $x \in \mathbb{R}^{1|0}$. Внаслідок узагальненої теореми Фробеніуса [8] існує інтегральний супермноговид $J^{[k]}_{\text{top}}(x_0; [u_0^{[k]}])$, $k \in \mathbb{Z}_+$, інваріантний відносно супералгебри Лі (40).

Зауваження 8. З кожним векторним полем $\frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{d}{dx}$ на джет-супермноговиді $J^{[\infty]}_{\text{top}}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$ пов'язана нескінченновимірна супералгебра Лі $\left\{ \frac{d}{dt_i} \in \mathcal{T}(J^{[\infty]}_{\text{top}}) : i \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, де

$$\frac{d}{dt_{2j+2}} = \frac{d}{d\tau_{2j+2}}, \quad \frac{d}{dt_{2j+1}} = \frac{\partial}{\partial \tau_{2j+1}} + \sum_{k=0} \tau_{2k+1} \frac{\partial}{\partial \tau_{2k+2}}, \tag{41}$$

$j \in \mathbb{Z}_+$, причому елементи $\tau_{2j+2} \in \mathbb{R}^{1|0}$, $\tau_{2j+1} \in \mathbb{R}^{0|n}$ і виконуються комутаційні співвідношення

$$\left[\frac{d}{dt_{2j+2}}, \frac{d}{dt_{2k+2}} \right] = 0 = \left[\frac{d}{dt_{2j+2}}, \frac{d}{dt_{2k+1}} \right],$$

$$\left[\frac{d}{dt_{2j+1}}, \frac{d}{dt_{2k+1}} \right] = 2 \frac{d}{dt_{2(j+k)+2}}, \quad j, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{42}$$

Зокрема, співвідношенням супералгебри Лі (42) задовольняють векторні поля $\left(\frac{d}{d\theta} \right)^{j+1} = \frac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Зображення супералгебри Лі (42) допускає наступне узагальнення [18]:

$$\frac{d}{dt_{2j+2}} = \frac{d}{d\tau_{2j+2}}, \quad \frac{d}{dt_{2j+1}} = \frac{\partial}{\partial \tau_{2j+1}} + \sum_{k=0} \varkappa_{2k+1}^{(2j)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau_{2k+2}}, \tag{43}$$

де функції $\varkappa_{2k+1}^{(2j)} : \mathbb{R}^{0|n} \rightarrow \mathbb{R}^{0|n}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{2j+1}} \varkappa_{2k+1}^{(2l)}(\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau_{2k+1}} \varkappa_{2j+1}^{(2l)}(\tau) = 2\delta_{l, j+k+1} \tag{44}$$

Векторні поля (42), як показано в [18], відіграють суттєву роль в дослідженні повної інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональному супермноговиді $M \subset_{\rightarrow} C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R})^{1|n\, m}$.

5. Розглянемо для прикладу суперсиметричну нелінійну динамічну систему типу Кортевега — де Фріза [18, 20]

$$\frac{dw}{dt} = -w^{[6]} + 2(ww^{[1]})^{[2]} + 2w^{[1]}w^{[2]} = K[w], \tag{45}$$

де $w \in M \simeq J^{[\infty]}_{\text{top}}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n})$, причому $\tilde{w} = 1$, $w^{[j]} \left(\frac{d}{d\theta}\right)^j w$, $j \in \mathbb{Z}_+$, і еволюційний параметр $t \in \mathbb{R}^{1|0}$. Якщо $\gamma \in \mathcal{D}(M)$, $\tilde{\gamma} = 0$ — закон збереження для (45), то величина $\varphi = \operatorname{grad} \gamma \in T(M)$, $\tilde{\varphi} = 1$ задовольняє рівняння типу Лакса [13]

$$\varphi_t + K'^{*}\varphi = 0, \tag{46}$$

де K': $T(M) \to T(M)$ — похідна Фреше векторного поля (45) на M, «*» — відповідне її спряження відносно стандартної білінійної форми на $T^*(M) \times T(M)$, причому

$$K'^{*} = D_\theta^6 - 4w^{[1]}D_\theta^2 - 2w^{[2]}D_\theta. \tag{47}$$

Згідно з градієнтно-голономним алгоритмом побудови критеріїв інтегровності нелінійних динамічних систем [13] вивчимо існування спеціального асимптотичного за параметром $|\lambda| \to \infty$ розв'язку рівняння (46) у вигляді

$$\begin{gathered} \varphi = c \exp\left(\lambda x - \lambda^3 t + D_\theta^{-1}\sigma[w; \lambda]\right), \ \frac{dc}{dt} = 0, \ \lambda \in \mathbb{C}, \\ \sigma \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[w]\lambda^{-j}, \quad \tilde{\sigma} = 1, \quad \tilde{c} = 1, \end{gathered} \tag{48}$$

де обернений до (24) оператор D_θ^{-1} має вигляд

$$D_\theta^{-1} = \partial^{-1}\int d\theta \cdot + \theta, \quad \frac{d}{dx}\partial^{-1} = 1, \quad D_\theta D_\theta^{-1} = 1. \tag{49}$$

Операція інтегрування по суперзмінній $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$ означається [14, 18] за правилом Березіна:

$$\int d\theta = 0, \quad \int \theta d\theta = 1, \tag{50}$$

звідки випливає тотожність: для довільного елемента $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n})$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}} dx f(x, \theta) = \int_{\mathbb{R}}\int f(x, \theta)\, dx d\theta. \tag{51}$$

Зауваження 9. Для формального виведення формули (49) розглянемо таку тотожність

$$\partial^{-1}D_\theta = \partial^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta} + \theta = D_\theta^{-2}D_\theta = D_\theta^{-1}. \tag{52}$$

При цьому ми скористались тим, що $D_\theta^2 = \frac{d}{dx}$ на $J^{[\infty]}_{\text{top}}$. Із (52) і (51) одразу ж випливає (49).

Використовуючи формулу (49), розв'язок (48) можна перетворити до вигляду

$$\varphi = c(1 + \theta b[w, \lambda]) \exp\left(\lambda x - \lambda^3 t + \partial^{-1}a[w; \lambda]\right), \tag{53}$$

де при $\tilde{a} = 0$, $\tilde{c} = \tilde{b} = 1$ і при $|\lambda| \to \infty$

$$a[w; \lambda] \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j[w]\lambda^{-j}, \quad b[w; \lambda] \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} b_j[w]\lambda^{-j}, \tag{54}$$

a_j, b_k: $J^{[\infty]}_{\mathrm{top}}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) \to \mathbb{R}^{1|n}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$ — локальні функціонали на джет-супермноговиді $J^{[\infty]}_{\mathrm{top}}$. Підставляючи вирази (48) у рівняння Лакса (46), одержуємо нескінченну ієрархію рекурентних співвідношень:

$$D_\theta^{-1}\sigma_{j,t} - 4w^{[1]}\delta_{j,-1} - 4w^{[1]}\sigma_j^{[1]} - 2w^{[2]}\theta\delta_{j,-1} - 2w^{[2]}\sigma_j + \sigma_j^{[5]} +$$

$$+ 3\sigma_{j+1}^{[3]} + 3\sigma_{j-k}^{[1]}\sigma_k^{[3]} + 3\sigma_{j+2}^{[1]} + 3\sigma_{j+1-k}^{[1]}\sigma_k^{[1]} + \sigma_{j-k}^{[1]}\sigma_{k-s}^{[1]}\sigma_s^{[1]} = 0, \qquad (55)$$

розв'язуючи які, знаходимо

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}w + \frac{2}{3}w^{[1]}\theta, \quad \sigma_2 = -\sigma_1^{[2]},$$

$$\sigma_3 = \frac{2}{9}w^{[5]}\theta - \frac{14}{9}w^{[4]} - \frac{4}{9}(ww^{[1]})^{[1]}\theta - \frac{8}{9}ww^{[1]} +$$

$$+ \frac{8}{9}w^{[1]}(w\theta)^{[1]} + \frac{4}{9}(w^{[1]}\theta)^{[4]} - \frac{16}{9}(w\theta)^{[1]}w^{[1]} + \frac{4}{3}D_\theta^{-1}(w^{[2]}w^{[1]}\theta), \ldots \qquad (56)$$

При подальшому знаходженні величин $\sigma_j \in \Lambda^0(J^{[\infty]}_{\mathrm{top}})$, $j \geqslant 3$, ми переконуємось, що рекурентна процедура в (55) обривається при $j = 2$, тобто при $j \geqslant 2$ величини $\sigma_{j,t} \neq D_\theta\eta_j$ для деяких $\eta_j \in \Lambda^0(J^{[\infty]}_{\mathrm{top}})$, $j \geqslant 2$. Останнє означає, що при $j \geqslant 2$ функціонали $\gamma_j = \int\limits_{\mathbb{R}} dx \int d\theta\sigma_j[w] \in \mathcal{D}(J^{[\infty]}_{\mathrm{top}})$ не є законами збереження (інваріантами) нелінійної динамічної системи (45). Останнє згідно з градієнтно-голономним алгоритму [13] означає, що вихідна нелінійна динамічна система (45) не є інтегровною за Ліувуллем — Лаксом [13, 18] гамільтоновою системою, що збігається з результатами робіт [18, 20]. Якщо провести аналогічний аналіз наступної нелінійної суперсиметричної динамічної системи типу Кортевега — де Фріза

$$w_t = -w^{[6]} + 3(ww^{[1]})^{[1]} = K[w], \qquad (57)$$

де $w \in M \simeq J^{[\infty]}_{\mathrm{top}}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n})$, $t \in \mathbb{R}^{1|0}$ — еволюційний параметр, то переконуємось, що відповідна процедура типу (55) продовжується узгоджено для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$, причому

$$\gamma_1 = \int d\theta \int\limits_{\mathbb{R}} dxw, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\int d\theta \int\limits_{\mathbb{R}} dxww^{[1]},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2}\int d\theta \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,(2ww^{[1]}w^{[1]} + w^{[2]}w^{[3]}), \qquad (58)$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{2}\int d\theta \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,(5w(w^{[1]})^3 + 10w(w^{[3]})^2 - 6ww^{[2]}w^{[4]} + w^{[4]}w^{[5]}), \ldots,$$

де для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$ $d\gamma_j/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}^{1|0}$. У роботі [21] встановлена бігамільтоновість [13] динамічної системи Кортевега — де Фріза (57), причому $w_t = \{\gamma_2, w\}_{\mathcal{Z}} = \{\gamma_2, w\}_{\mathcal{M}}$, де для всіх $(x, \theta), (y, \eta) \in \mathbb{R}^{1|n}$

$$\{w(x, \theta), w(y, \eta)\}_{\mathcal{Z}} = (D_\theta^5 - 3w(x, \theta)D_\theta^2 - w^{[1]}(x, \theta)D_\theta -$$

$$- 2w^{[2]}(x, \theta))(\theta - \eta)\delta(x - y). \qquad (59)$$

Друга гамільтонова структура $\mathcal{M} : T^*(M) \to T(M)$ згідно з [22, 23] має дещо складнішу операторну природу, на чому тут не зупиняємось. У загальному випадку [13] довільний імплектичний оператор $\mathcal{L} : T^*(M) \to T(M)$ динамічної системи (57) задовольняє рівняння Картана — Нетер

$$L_K\mathcal{L} = \mathcal{L}'K - K'\mathcal{L} - \mathcal{L}K'^{*} = 0, \qquad (60)$$

яке, зокрема, можна розв'язувати [13] асимптотичним методом малого параметра. Аналогічні результати встановлення інтегровності за Лаксом можна одержати для багатьох [24—27] нелінійних динамічних систем; зокрема, цілком інтегровна нелінійна динамічна система мКдФ

$$w_t = -w^{[6]} + 3w^{[1]}(ww^{[1]})^{[2]} = K[w] \tag{61}$$

на супермноговиді $M \hookrightarrow J^{[\infty]}_{\text{top}}(\mathbb{R}^{1|n}: \mathbb{R}^{1|n})$, яка також [20] допускає зображення типу Лакса [13, 23] аналогічно динамічній системі Кортевега — де Фріза (57). Але, як відзначено в [20, 27], не всі ці динамічні системи допускають, як (57) і (61), інваріантність відносно суперсиметрії, генератором якої є векторне поле $\tilde{D}_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\frac{d}{dx}$, що задовольняє умову комутативності з векторним полем супердиференціювання $D_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} + {}$ $+ \theta\frac{d}{dx}$: $[D_\theta, \tilde{D}_\theta] = 0$, $(x, \theta) \in \mathbb{R}^{1|n}$.

Відповідні зображення типу Лакса для цих «несуперсиметричних» нелінійних динамічних систем згідно з алгоритмом градієнтно-голономного методу дослідження інтегровності [13] забезпечує існування відповідного розв'язку рівняння Лакса (46) в покомпонентній формі типу (53). При цьому розв'язок рівняння Лакса (46) у коваріантній формі типу (48) вже не існує згідно з неіснуванням коваріантної форми запису вихідної нелінійної динамічної системи $w_t = K[w]$ на супермноговиді $M \hookrightarrow J^{[\infty]}_{\text{top}}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$.

Для прикладу розглянемо [24] нелінійну динамічну систему типу Кортевега — де Фріза $w = u\theta + \xi \in M \hookrightarrow J^{(\infty)}_{\text{top}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{1|n})$, $\tilde{w} = 1$

$$\left.\begin{aligned} du/dt &= -u_{3x} + 6uu_x - 12\xi\xi_{xx} \\ d\xi/dt &= -4\xi_{3x} + 6u\xi_x + 3\xi u_x \end{aligned}\right\} = K[w], \tag{62}$$

причому многовид $J^{(\infty)}_{\text{top}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{1|n})$ — звичайний джет-многовид зі значеннями функціональних елементів в $\mathbb{Z}_2$-градуйованій комутативній супералгебрі $\mathbb{R}^{1|n}$. Система рівнянь (62), як легко переконатись, не допускає суперсиметричного переформулювання, тобто не існує відповідного вкладення $\xi + \theta u \in J^{(\infty)}_{\text{top}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{1|n}) \to J^{[\infty]}_{\text{top}}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n}) \ni w$, через що розв'язок рівняння Лакса (46) шукаємо у вигляді (53), (54). В результаті підстановки його в (46) знаходимо систему нескінченних рекурсійних співвідношень

$$\begin{gathered} \partial^{-1}a_{j,t} + a_{j,xx} + 3a_{j+1,x} + 3a_{j-k,xx}a_k + 3a_{j+2} + 3a_{j-k+1}a_k + a_{j-k}a_{k-s}a_s - \\ - 6u\delta_{j,-1} - 6ua_j - 3\xi_x b_j + 3\xi b_{j,x} + 3\xi b_{j+1} + 3\xi b_{j-k}a_k = 0, \qquad (63) \\ b_{j,t} - b_{j+3} + b_{j-k}\partial^{-1}a_{k,t} - 24\,\xi_x\delta_{j,-1} - 24\xi_x a_j - 12\xi a_{j,x} - 12\xi_{j,-2} + \\ + 4(b_{j,xxx} + 3b_{j+1,xx} + 3b_{j-k,xx}a_k + 3\xi\sigma_{j+1} + 3b_{j-k,x}a_{k,x} + 3b_{j+2,x} + \\ + 6b_{j+1-k,x}\sigma_k + 3b_{j-k,x}\sigma_{k-s}\sigma_s - 3\xi\sigma_{j-k}\sigma_k + b_{j-k}a_{k,xx} + 3b_{j+1-k}a_{k,x} + \\ + 3b_{j-k}a_{k-s,x}a_s + b_{j+3} + 3b_{j+2-k}a_k + 3b_{j+1-k}a_{k-s}a_s + b_{j-k}a_{k-s}a_{s-l}a_l) - \\ - 6(ub_j)_x - 6ub_{j+1} - 6ub_{j-k}a_k = 0, \end{gathered}$$

де $j \in \mathbb{Z}_+$, і оператор K'^{*}: $T^*(M) \to T^*(M)$, використаний в (46), має вигляд

$$K'^{*} = \left\| \begin{matrix} \partial^3 - 6u\partial & -6\xi_x + 3\partial\xi \\ -12\partial\xi\partial - 12\xi_x\partial & 4\partial^3 - 6\partial u \end{matrix} \right\|. \tag{64}$$

Розв'язуючи рекурентні рівняння (63), знаходимо

$$\begin{gathered} a_1 = 2u, \quad a_2 = -2u_x, \quad a_3 = 2u^2 + 2u_{xx} + 8\xi\xi_x, \ldots, \\ b_1 = 4\xi, \quad b = -8\xi_x, \ldots \end{gathered} \tag{65}$$

Таким чином, згідно з градієнтно-голономним алгоритмом функціонали $\gamma_j = \int\limits_{\mathbb{R}} dx a_j [u, \xi]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, будуть законами збереження несуперсиметричної динамічної системи (62), тобто $d\gamma_j/dt = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}^{1|0}$, де

$$\gamma_1 = 2 \int\limits_{\mathbb{R}} dx u, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 2 \int\limits_{\mathbb{R}} dx (u^2 + 4\xi\xi_x), \quad \gamma_4 = 0, \ \gamma_5 = 2 \int\limits_{\mathbb{R}} dx (2u^3 + \\ + u_x^2 - 16\xi_x\xi_{xx} + 24\xi\xi_x), \ldots . \tag{66}$$

Розв'язуючи відповідно рівняння Картана — Нетер (60), отримуємо бігамільтоновість динамічної системи (62) з узгодженою парою вигляду [23]

$$\mathcal{L} = \left\| \begin{matrix} \partial & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\|, \quad \mathcal{M} = \left\| \begin{matrix} \partial^3 - 2(\partial v + v\partial) & -\partial\alpha - 2u\partial \\ -\xi\partial - 2\partial\xi & \partial^2 - u \end{matrix} \right\| . \tag{67}$$

З використанням ($\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$)-пари (67) градієнтно-голономним алгоритмом знаходимо явне зображення Лакса для (62):

$$(-D_\theta^3 + w) f(x, \theta) = \lambda\theta f(x, \theta), \tag{68}$$

$f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{1|n})$, де $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральний параметр.

Зображення (68) не суперсиметричне за своєю структурою (явно залежить від суперзмінної $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$), в той час як зображення типу Лакса для суперсиметричного рівняння Кортевега — де Фріза (62) апріорі суперсиметричне також: $L[w; \lambda] f = 0$, $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{C}^{1|n})$, $\lambda \in \mathbb{C}^{1|0}$, де

$$L[w; \lambda] = D_\theta^4 - w^{[1]} + w D_\theta - \lambda. \tag{69}$$

На закінчення цього пункту зауважимо, що у випадку суперсиметричної нелінійної динамічної системи Кортевега — де Фріза (62) відповідна процедура розв'язку характеристичного рівняння Лакса (46) на джет-многовиді $M \simeq J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{1|n})$ (тобто на многовиді M, не вкладеному в джет-супермноговид $J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n})$) приводить до відповідної серії нелокальних законів збереження:

$$\gamma_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} dx (2u - \xi\xi_{-1}), \quad \gamma_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} dx (-2u_x + \xi_x\xi_{-1} + \xi\partial^{-1}u\xi_{-1}), \\ \gamma_3 = \int\limits_{\mathbb{R}} dx (-2u^2 - 3\xi\xi_x + 2u\xi\xi_{-1} + u\xi_{-1}\partial^{-1}u\xi_{-1}), \ldots, \tag{70}$$

де $\xi_{-1} = \partial^{-1}\xi$, що є наслідком порушення апріорної суперсиметричної структури відповідного рівняння Лакса (46). Усі отримані нами вище закони збереження мають нульову парність, тобто $\bar{\gamma}_j = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Але природно сподіватись, що нелінійні інтегровні динамічні системи мають також інваріанти ненульової парності, які обов'язково задовольняють рівняння Лакса (46). Звідси випливає важлива задача їх знаходження у явному вигляді, бо відповідне асимптотичне зображення типу (48) вже для цієї мети не годиться.

6. Алгоритми, застосовані для дослідження нелінійних динамічних систем з суперзмінними в п. 5, піддаються автоматизації обрахунків на комп'ютерах з використанням систем аналітичних обрахунків. Зокрема, для проведення основних розрахунків для знаходження описаних об'єктів була застосована система REDUCE, що значно скоротило об'єм роботи і дало можливість ефективно досліджувати нелінійні динамічні системи в суперпросторі.

1. *Теория* солитонов / Под ред. С. П. Новикова.— М. : Наука, 1980.— 342 с.
2. *Тахтаджян Л. А., Фадеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. — М. : Наука, 1986.— 527 с.

3. *Интегрируемые* динамические системы / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев. : Наук. думка, 1987.— 296 с.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1979.— 431 с.
5. *Самойленко В. Г.* Джет-анализ на гладких бесконечномерных многообразиях и его приложения для исследования интегрируемости нелинейных динамических систем.— Киев, 1988.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 88.51).
6. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференциируемых отображений.— М. : Наука, 1982.— 340 с.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия.— М. : Наука, 1984.— 710 с.
8. *Притула М. М., Прикарпатський А. К., Микитюк І. В.* Елементи теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем.— К. : УМКВО, 1988.— 87 с.
9. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.— М. : Мир, 1989.— 637 с.
10. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1986.— 335 с.
11. *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными.—М.: Мир: 1990.— 536 с.
12. *Митропольський Ю. О., Прикарпатський А. К., Філь Б. М.* Деякі аспекти градієнтно-голономного алгоритму в теорії інтегровності нелінійних динамічних систем та проблеми комп'ютерної алгебри // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 1.— С. 78—91.
13. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях.— Киев : Наук. думка, 1991.— 267 с.
14. *Хренников А. Ю.* Функциональный суперанализ // Успехи мат. наук.— 1988.— **43**, № 2.— С. 87—114.
15. *Kastler D.* The Koszul formular for graded Lie-Cartan pairs (super BBS operator) // J. Goem. and Phys.— 1987.— **4**, № 4.— P. 523—534.
16. *Jadczyk A., Kastler D.* Graded Lie-Cartan Pairs. II. The fermionic differential calculus // Ann. Phys.— 1987.— **179**, № 2.— P. 169—200.
17. *Trostel R.* Color analysis, theory of Г-graded integrable evolution equations, and super Nijenhuis operators // J. Math. Phys.— 1985.— **26**, N 12.— P. 3160—3171.
18. *Manin Yu. I., Radul A. O.* A supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashwili Hierarchy // Communs Math. Phys.— 1985.— **98**, N 1.— P. 65—77.
19. *Gawedzki K.* Supersymmetric extension of super-geometry // Ann. Inst. H. Poincaré A. 1977.— **27**, N 4.— P. 335—366.
20. *Mathieu P.* Sypersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation // J. Math. Phys.— 1988.— **29**, № 11.— P. 2499—2506.
21. *Кулиш П. П.* Аналог уравнения Кортевега — де Фриза для суперконфорной алгебры // Дифференц. геометрия, группы Ли и механика.— 1987.— **101**.— С. 64—68.
22. *Olver W. R*-structures, Yang-Baxter equations, and related involution theorems // J. Math. Phys.— 1989.— **30**, № 5.— P. 1140—1149.
23. *Филь Б. Н.* Суперобобщение вполне интегрируемых динамических систем.— Киев, 1989.— 19 с.— (Припринт / АН УССР. Ин-т математики; № 89.28).
24. *Chowdhury R. A., Roy S.* On the Backlund transformation and Hamiltonian properties of superevaluation equations // J. Math. Phys.— 1986.— **27**, N 10.— P. 2464—2468.
25. *Yi-Shen L., Zhang L.-N.* Super AKNS-scheme and its finite conserved currents // Nuovo cim. A.— 1986.— **93**, № 2.— P. 175—183.
26. *Gurses M., Oguz O.* A super AKNS-scheme // Phys. Lett. A.— 1985.— **108**, № 9.— P. 437—440.
27. *Kupershmidt B. A.* Integrable systems // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1984.— N 81.— P. 6562—6563.

Одержано 06.03.92