УДК 519.46

В. М. Полецких, В. С. Чарин

О топологических нильпотентных группах с абелевыми подгруппами конечного ранга

Условимся под топологической группой понимать локально компактную группу, а под ее подгруппой замкнутую подгруппу. Через $r(G)$ обозначается специальный ранг Мальцева (далее слово «специальный» везде опускается). Топологический вариант ранга введен в [1].

Локально разрешимая дискретная группа есть группа конечного ранга тогда и только тогда, когда ранги всех ее абелевых подгрупп A ограничены одним числом s [2] (для локально разрешимых групп без кручения и периодических групп этот результат соответственно получен в [3] и [4]). Для разрешимых дискретных групп условие $r(A) < \infty$ равносильно $r(G) < \infty$ [5].

Пусть R — одномерная векторная группа, K — одномерный соленоид (иначе: K — группа характеров аддитивной группы поля рациональных чисел Q), Jp — аддитивная группа кольца p-адических чисел $G(p^\infty)$, R_p — аддитивная группа поля p-адических чисел $Q(p^\infty)$, D — поле действительных чисел, $Z = Z(G)$ — центр группы, $\{a\}$ — бесконечная циклическая группа.

Построим пример, показывающий, что в полном объеме эти результаты не переносятся даже на топологические нильпотентные группы класса 2.

Существует топологическая группа V без кручения класса нильпотентности 2, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $Z \cong R$ ($Z \cong K$, J_p, R_p); 2) любая ее максимальная абелева подгруппа A имеет вид: $A \cong R \times \{a\}$ ($A \cong K \times \{a\}$, $J_p \times \{a\}$, $R_p \times \{a\}$), при этом $r(A) = 3$, если $Z \cong R$, и $r(A) = 2$ в остальных случаях; 3) V/Z — дискретная свободная счетная абелева группа бесконечного ранга.

З а м е ч а н и е. При $A \cong J_p \times \{a\}$ получаем пример группы, не удовлетворяющей условию максимальности для подгрупп. Первый пример такого рода другим способом построен в [6].

Л е м м а 1. *Пусть A — поле типа D или $Q(p^\infty)$. Тогда в векторном пространстве $A \times A$ над полем A можно указать свободную абелеву группу $G = \sum_{i=1}^{\infty} \{b_i\}$, удовлетворяющую условиям:*

1) *если g_1 и g_2 — произвольные линейно независимые в групповом смысле элементы из G, то они не принадлежат одной подгруппе типа R или R_p;*

2) *если $A \cong Q(p^\infty)$, то G можно выбрать так, что $G \subset H = J_p \times J_p$ и элементы g_1, g_2 не принадлежат одной подгруппе типа J_p.*

Проведем д о к а з а т е л ь с т в о только для $A = Q(p^\infty)$.

Пусть a_1, a_2 — линейно независимые векторы из H, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots \ldots \in J_p \subset Q(p^\infty)$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ линейно независимы над полем Q. Построим последовательность элементов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ в J_p, линейно независимых над Q по следующему правилу: $\lambda_i \in J_p$ и $\lambda_1 \notin Q$. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_{n-1}$ уже построены, то λ_n строится так.

Рассмотрим соотношение

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\lambda_i + \alpha_n s\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i\lambda_i + \beta_n s\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\gamma_i\right), \tag{1}$$

где α_i, β_i — целые числа и

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq k(\beta_1\beta_2, \ldots \beta_n) \tag{2}$$

при $k \in Q$. Заметим, что в силу (2) и линейной независимости $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ над Q

$$c = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\gamma_i\right) \notin Q, \quad s = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\lambda_i - c\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i\lambda_i\right) \Big/ (c\beta_n - \alpha_n) \tag{3}$$

($c \notin Q$, поэтому $c\beta_n - \alpha_n \neq 0$). Поскольку решение (3) счетно, то существует λ_n из J_p такое, что $\lambda_n \neq s$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ линейно независимы над Q.

Рассмотрим подгруппу $G = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$, где $b_i = \lambda_i a_1 + \gamma_i a_2$. Пусть $\sum_{i=1}^{k} n_i b_i = 0$, где n_i — целые числа, тогда $\sum_{i=1}^{k} n_i\lambda_i = 0$ и, значит, $n_i = 0$. Итак, G — свободная счетная абелева группа бесконечного ранга.

Пусть $g_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, $g_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$ и g_1, g_2 линейно независимы в групповом смысле, т. е. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq k(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $k \in Q$. Допустим, что

$g_1, g_2 \in J_p$, тогда $g_1 = \alpha g_2$, где $\alpha \in Q(p^\infty)$. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{h} b_i \gamma_i \neq 0$, то $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i\right)$. Но тогда $\lambda_n = s$. Получено противоречие.

Лемма 2. *Пусть* $G = R \times H$, $H = \prod_{i=1}^{\infty} Jp_j$, $\langle p_1, p_2, \ldots p_k \ldots \rangle$ — *множество всех простых чисел. Если* $x = tb$, *где* $1 \neq t \in R$ *и* $\overline{\{b\}} = H$, *то фактор-группа* $G/\{x\} \cong K$.

Доказательство. Подгруппа $\{x\}$ изолирована [7, замечание 2]. Пусть $\varphi : G \to G/\{x\} = G_1$. Поскольку $R\{x\} \supset \{b\}$, то $\overline{\varphi(R)} = G_1$. Значит, G_1 — связная группа. В силу $G/H\{x\} \cong (G/H)/(H\{x\}/H)$, получим, что $G/H\{x\}$ — одномерный тор. Следовательно, G_1 — компактная связная группа, причем $G_1 \supset H_1 \cong H$ и фактор-группа G_1/H_1 — одномерный тор. Применяя теорию характеров, получаем, что $G_1 = K$.

Продолжим построение примера.

Обозначим через $M = UT(3, P)$ группу унитреугольных матриц порядка 3 над коммутативным кольцом P, а через L — аддитивную группу кольца P, тогда $Z(M) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta \in P \right\rangle \cong L$, $M/Z \cong L \times L$ [8, стр. 35].

Пусть $P = C(p^\infty)$ (случаи $P = Q(p^\infty)$ или $P = D$ рассматриваются аналогично). Тогда $Z = Z(M) \cong J_p$ и $M/Z \cong J_p \times J_p$. Считаем, что в M введена естественная топология. Обозначим W группу $UT(3, P)$ с новой топологией, объявив Z открытой подгруппой. Пусть V — полный прообраз подгруппы G из W/Z (лемма 1) в W и A — максимальная абелева подгруппа в V. Ясно, что $A \supset Z$. Если $r(A/Z) \geqslant 2$, то $A/Z = \{g_1\} \times \{g_2\} \times N$. Пусть a_1, a_2 — прообразы g_1, g_2 в A. Если $S = \overline{I(Z, a_1, a_2)}$ — замыкание изолятора в M, то S — изолированная подгруппа [9, теорема 3], причем абелева (в нильпотентных группах без кручения классы нильпотентности подгруппы H и подгруппы $J(H)$ равны). Подгруппа $S_1 = S/Z$ изолирована в $M/Z = M_1$ и, следовательно, либо $S_1 = M_1$, либо $S_1 \cong J_p$. Но во втором случае g_1 и g_2 принадлежат одной подгруппе типа J_p. А это неверно. Следовательно, $S_1 = M_1$, и значит, M — абелева группа. Получено противоречие. Таким образом, $r(A/Z) = 1$.

Поскольку $A/Z = \{b\}$ и Z — открытая подгруппа, то $A = Z \times \{b\}$. При $Z \cong J_p$ или $Z \cong R_p$ $r(A) = 2$ [9, лемма 5]. При $Z \cong R$ подгруппа $A \subset R \times R$. Но в $R \times R$ любые два элемента порождают либо подгруппу R, либо свободную абелеву группу ранга 2. Так как $r(R \times R) = 3$, то $r(A) = 3$.

Построим последний пример. Пусть $N = M \times H$, где $M = UT(3, D)$, $H = \prod_i Jp_i$, $\langle p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \rangle$ — множество всех простых чисел, $Z = Z(M) = R$ и $\{x\}$ — подгруппа из $Z \times H$ (лемма 2).

Тогда в фактор-группе $N_1 = N/\{x\}$ подгруппа $Z \times H/\{x\} = Z_1$ центральна и $N_1/Z_1 = R \times R$. Докажем, что $Z_1 = Z(N_1)$. Допустим, что это не так. Тогда в силу изолированности $Z(N_1)$ фактор-группа $N_1/Z(N_1) \cong R$ либо $N_1 = Z(N_1)$. В любом случае тогда $N_1 = Z(N_1)$. Ясно, что для $y \in M$ и $g \notin Z(M)$ выполняется $ygy^{-1}g^{-1} \in \{x\}$.

Пусть $g = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где β_1 и β_3 одновременно не равны нулю. Если $y = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $ygy^{-1}g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. При любом $\gamma \in R$

найдутся такие α_1, α_3, что $\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 = \gamma$ (например, если $\beta_3 \neq 0$, то $\alpha_1 = (\gamma + \alpha_3\beta_1)/\beta_3$, где α_3 любое). Следовательно, $\{x\} \supset \langle ygy^{-1}g^{-1} : y \in M \rangle \supset R$. А это неверно. Итак, центр $Z(N_1) = K$ и $N_1/Z = R \times R$.

Аналогично строим новую топологическую группу W, объявив Z открытой подгруппой. В W выберем подгруппу V. Таким же способом показываем, что в V любая максимальная абелева подгруппа $A = K \times \{a\}$. Так как $A \supset J_p \times \{a\}$, $r(A) \leqslant 2$, то $r(A) = 2$.

Понятно, что и группа $V \times S$, где S — произвольная топологическая группа конечного ранга, также является группой бесконечного ранга с абелевыми подгруппами конечного ранга.

1. *Чарин В. С.* О группах конечного ранга 1.— Укр. мат. журн., 1964, **16**, № 2, с. 212—219.
2. *Мерзляков Ю. И.* О локально разрешимых группах конечного ранга.— Алгебра и логика (семинар), 1964, 3, № 2, с. 5—16.
3. *Чарин В. С.* О разрешимых группах типа A_4.— Мат. сб., 1960, **52**, № 3, с. 489—499.
4. *Горчаков Ю. М.* О существовании абелевых подгрупп бесконечного ранга в локально разрешимых группах.— Докл. АН СССР, 1964, **156**, № 5, с. 17—20.
5. *Каргаполов М. И.* О разрешимых группах конечного ранга.— Алгебра и логика (семинар), 1962, **1**, № 5, с. 37—44.
6. *Чарин В. С.* О некоторых классах локально бикомпактных групп с условием максимальности для абелевых подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1964, **5**, № 2, с. 438—458.
7. *Полецких В. М.* Локально компактные локально нильпотентные группы с условием индуктивности для изолированных подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1976, **17**, № 5, с. 1097—1107.
8. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. Н.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1972.— 240 с.
9. *Полецких В. М.* Топологический изолятор подгруппы конечного ранга.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 5, с. 614—624.

Киев. гос. ун-т — Поступила в редакцию 13.12.82