УДК 517.949.2

Ле Суан Кан

О квазипериодических решениях нелинейной системы уравнений в частных производных с запаздыванием

В работе выводятся необходимые и достаточные условия существования квазипериодических решений нелинейной системы уравнений в частных производных с запаздыванием, описывающих многочастотные колебания в системах с распределенными параметрами и запаздыванием, и методы их построения.

1. Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{m=0}^{M} \left(A_m \frac{\partial^2 y_{\Delta_m}}{\partial x^2} + B_m y_{\Delta_m} \right) + \varepsilon f \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$y(t, 0) = y(t, l) = 0, \tag{2}$$

где y, f — p-мерные векторы; A_m, B_m — постоянные квадратные матрицы порядка p; f — вектор-функция, дифференцируемая достаточное число раз по аргументам x, y_{Δ_m}, $\partial y_{\Delta_m}/\partial x$, $\partial^2 y_{\Delta_m}/\partial x^2$, $m = 0, 1, \ldots, M$, в некоторой области, $y_{\Delta_m} = y(t - \Delta_m, x)$; Δ_m, $\Delta_0 = 0$, — положительное запаздывание; ε — малый параметр. Пусть порождающая система (система (1), (2) при $\varepsilon = 0$) допускает квазипериодическое решение вида

$$y^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{S} a_\alpha [L_\alpha e^{i(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)} + \bar{L}_\alpha e^{-i(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)}] \sin \frac{n_\alpha \pi}{l} x, \tag{3}$$

где ω_α — рационально независимые характеристические корни; n_α — некоторые натуральные числа; L_α — собственные векторы размерности p; $\bar{L}_\alpha$ — величины, комплексно сопряженные с L_α; a_α, φ_α — произвольные постоянные.

Выясним, при каких условиях система (1), (2) допускает квазипериодическое решение, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в решение (3), и как оно строится.

2. Для решения указанной задачи с системой (1), (2) сопоставляем систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial \psi}(\omega + \varepsilon h) = \sum_{m=0}^{M} \left(A_m \frac{\partial^2 u_{\Delta_m}}{\partial x^2} + B_m u_{\Delta_m} \right) + \varepsilon F \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$u(\psi, 0) = u(\psi, l) = 0, \tag{5}$$

где u, F — p-мерный вектор; ψ, ω, h — векторы размерности S; $u_{\Delta_m} = u(\psi - \Delta_m(\omega + \varepsilon h), x)$, F — значение функции f, в которой вместо y_{Δ_m}, $\partial y_{\Delta_m}/\partial x$, $\partial^2 y_{\Delta_m}/\partial x^2$ стоят u_{Δ_m}, $\partial u_{\Delta_m}/\partial x$, $\partial^2 u_{\Delta_m}/\partial x^2$. Соответствующая порождающая система для (4), (5), очевидно, допускает периодическое решение вида

$$u^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{S} a_\alpha (L_\alpha e^{i\psi_\alpha} + L_\alpha e^{-i\psi_\alpha}) \sin \frac{n_\alpha \pi}{l} x. \tag{6}$$

Для системы (4), (5) имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $u(\psi, x)$ — периодическое решение по ψ периода 2π системы* (4), (5), *то $y(t, x) = u((\omega + \varepsilon h) t + \varphi, x)$ — квазипериодическое решение по t с частотным базисом $\omega_1 + \varepsilon h_1, \ldots, \omega_S + \varepsilon h_S$ системы* (1), (2).

Доказательство очевидно.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (4), (5) *имела периодическое решение $u(\psi, x)$, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в решение* (6), *необходимо, чтобы выполнялись равенства:*

$$\frac{2}{l} \frac{1}{(2\pi)^S} \int_0^l \int_{K_S} F^{(0)} M_\alpha \sin \frac{n_\alpha \pi}{l} x e^{-i\psi_\alpha} dx d\psi -$$

$$- i a_\alpha \left[1 - \sum_{m=1}^{M} \Delta_m e^{-i\Delta_m \omega_\alpha} \left(\frac{n_\alpha^2 \pi^2}{l^2} A_m - B_m \right) L_\alpha M_\alpha \right] = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, S, \tag{7}$$

где M_α — собственный вектор сопряженной системы для порождающей системы (4), (5); *$F^{(0)}$ — значение функции F, в которой вместо u_{Δ_m}, $\partial u_{\Delta_m}/\partial x$, $d^2 u_{\Delta_m}/\partial x^2$ подставлено $u_{\Delta_m}^{(0)}$, $\partial u_{\Delta_m}^{(0)}/\partial x$, $\partial^2 u_{\Delta_m}/\partial x^2$; $A \cdot B$ — скалярное произведение векторов A, B;*

$$K_S = \{\psi_\alpha : 0 \leqslant \psi_\alpha \leqslant 2\pi\}.$$

При доказательстве используются результаты работы [1].

Теорема 3. *Для того чтобы система* (1), (2) *допускала квазипериодическое относительно t решение $y(t, x)$ с частотным базисом $\omega_1 + \varepsilon h_1, \ldots, \omega_S + \varepsilon h_S$, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в решение* (3), *необходимо, чтобы a_α, h_α удовлетворяли условиям*

$$\frac{2}{l} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^l \int_0^T f^{(0)} z_\alpha^{(0)}\, dxdt - i\alpha_\alpha h_\alpha \times$$

$$\times \left[1 - \sum_{m=1}^{M} \Delta_m e^{-i\Delta_m\omega_\alpha} \left(\frac{n_\alpha^2 \pi^2}{l^2} A_m - B_m\right) L_\alpha M_\alpha\right] = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, S, \tag{8}$$

где $f^{(0)}$ — значение функции f, в которой вместо y_{Δ_m}, $\partial y_{\Delta_m}/\partial x$, $\partial^2 y_{\Delta_m}/\partial x^2$ подставлено $y_{\Delta_m}^{(0)}$, $\partial y_{\Delta_m}^{(0)}/\partial x$, $\partial^2 y_{\Delta_m}^{(0)}/\partial x^2$; $z_\alpha^{(0)} = M_\alpha \sin \frac{n_\alpha \pi}{l} x e^{-i(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)}$ — периодическое решение сопряженной системы для порождающей системы (1), (2).

Доказательство опирается на результаты теорем 1, 2.

Для установления необходимых и достаточных условий существования квазипериодических решений системы (1), (2) надо рассмотреть следующую вспомогательную систему уравнений в частных производных [2, 3]:

$$\frac{\partial v}{\partial \psi}(\omega + \varepsilon h) = \sum_{m=0}^{M} \left(A_m \frac{\partial^2 v_{\Delta_m}}{\partial x^2} + B_m v_{\Delta_m}\right) + \varepsilon F +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{S} (W_\alpha L_\alpha e^{i\psi_\alpha} + \overline{W}_\alpha \overline{L}_\alpha e^{-i\psi_\alpha}) \sin \frac{n_\alpha \pi}{l} x,$$

$$W_\alpha + \frac{2}{l} \frac{1}{(2\pi)^S} \int_0^l \int_{K_S} \left[\varepsilon F + \sum_{m=1}^{M} \left(A_m \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_{\Delta_m} - v_{\Delta_{m0}}) + B_m (v_{\Delta_m} - v_{\Delta_{m0}}\right) -\right. \tag{9}$$

$$\left. - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \psi} h\right] M_\alpha e^{-i\psi_\alpha} \sin \frac{n_\alpha \pi}{l} x dx d\psi = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, S$$

с краевыми условиями

$$v(\psi, 0) = v(\psi, l) = 0, \tag{10}$$

где $\overline{W}_\alpha$ — величины, комплексно сопряженные с W_α.

Теорема 4. *Система уравнений* (9), (10) *всегда имеет периодическое по ψ решение $v(\psi, x)$ периода 2π, зависящее от $2S$ произвольных постоянных a_α, h_α и малого параметра ε, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в решение* (6).

Теорема доказывается методом последовательных приближений.

Теорема 5. *Для того чтобы система* (1), (2) *имела квазипериодическое по t решение $y(t, x)$ с частотным базисом $\omega_1 + \varepsilon h_1, \ldots, \omega_S + \varepsilon h_S$, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в решение* (3), *необходимо и достаточно, чтобы система уравнений $W_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, S$, допускала при достаточно малом ε решения $a_\alpha = a_\alpha(\varepsilon)$, $h_\alpha = h_\alpha(\varepsilon)$, $\alpha = 1, \ldots, S$.*

Доказательство опирается на результаты теорем 1, 4.

Для получения квазипериодических решений исходной системы (1), (2) надо подставить полученные значения $a_\alpha = a_\alpha(\varepsilon)$, $h_\alpha = h_\alpha(\varepsilon)$, $\psi_\alpha = (\omega_\alpha + \varepsilon h_\alpha) t + \varphi_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, S$, в решения системы (9), (10).

3. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \partial^2 y/\partial x^2 + c_0 y + c_1 y_\Delta + \varepsilon (y + \beta y_\Delta^3) \tag{11}$$

с краевыми условиями

$$y(t, 0) = y(t, l) = 0. \tag{12}$$

При выполнении некоторых условий (см. [4]) порождающее уравнение для (11), (12) допускает квазипериодическое решение вида

$$y^{(0)} = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \sin(\pi x/l) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \sin(2\pi x/l) \tag{13}$$

где a_i, φ_i, $i = 1, 2$, — произвольные постоянные, ω_i, $i = 1, 2$, — частотный базис решения.

Аналогично изложенной выше схеме рассуждений находим квазипериодическое решение системы (11), (12) и условие его существования, которое выражается равенствами

$$\frac{a_1}{2}[h_1 c_1 \Delta \sin \Delta\omega_1 + h_1(1 + c_1\Delta \cos \Delta\omega_1)\, i - 3/4\beta\,(3/4a_1^2 + a_2^2) \times$$

$$\times \exp(-i\Delta\omega_1) - 1] + \varepsilon \ldots = 0, \tag{14}$$

$$\frac{a_2}{2}[h_2 c_1 \Delta \sin \Delta\omega_2 + h_2(1 + c_1\Delta \cos \Delta\omega_2)\, i - 3/4\beta\,(a_1^2 + 3/4a_2^2) \times$$

$$\times \exp(-i\Delta\omega_2) - 1] + \varepsilon \ldots = 0.$$

В первом приближении искомое решение имеет вид

$$y = a_1 \cos[(\omega_1 + \varepsilon h_1)t + \varphi_1] \sin(\pi x/l) + a_2 \cos[(\omega_2 + \varepsilon h_2)t + \varphi_2] \sin(2\pi x/l), \tag{15}$$

где

$$a_1 = \frac{8}{\sqrt{21\beta}}\left(\frac{3}{4}\,\frac{1 + c_1\Delta\cos\Delta\omega_1}{c_1\Delta + \cos\Delta\omega_1} - \frac{1 + c_1\Delta\cos\Delta\omega_2}{c_1\Delta + \cos\Delta\omega_2}\right)^{1/2},$$

$$a_2 = \frac{8}{\sqrt{21\beta}}\left(\frac{3}{4}\,\frac{1 + c_1\Delta\cos\Delta\omega_2}{c_1\Delta + \cos\Delta\omega_2} - \frac{1 + c_1\Delta\cos\Delta\omega_1}{c_1\Delta + \cos\Delta\omega_1}\right)^{1/2}$$

$$h_1 = \frac{\sin\Delta\omega_1}{c_1\Delta + \cos\Delta\omega_1}, \qquad h_2 = \frac{\sin\Delta\omega_2}{c_1\Delta + \cos\Delta\omega_2},$$

φ_1, φ_2 — произвольные постоянные.

1. *Бортей М. С., Фодчук В. И.* О квазипериодических решениях линейных дифференциально-функциональных уравнений в частных производных.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 3, с. 237—246.
2. *Ле Суан Кан.* Квазипериодические колебания в квазилинейных автономных системах с запаздыванием.— Докл. АН СССР, 1981, 257, № 1, с. 38—41.
3. *Ле Суан Кан.* Квазипериодические колебания квазилинейных систем с автономным авторегулируемым запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 6, с. 822—828.
4. *Митропольский Ю. А., Кореневский Д. Г.* Исследования нелинейных колебаний в системах с распределенными параметрами и запаздыванием.— Мат. физика. Киев, 1968, вып. 4, с. 93—145.

Ханойск. гос. ун-т, СРВ

Поступила в редакцию 18.07.83