УДК 517.94

*И. М. Конет*

# Об асимптотическом представлении фундаментальных матриц дифференциальных систем второго порядка с параметром

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной

$$\varepsilon^h d^2x/dt^2 + A(t, \varepsilon)\, x = 0\,, \tag{1}$$

где $x(t, \varepsilon)$ — искомый $n$-мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $h > 0$ — любое целое число, $A(t, \varepsilon)$ — действительная квадратная матрица $n$-го порядка, допускающая разложение

$$A(t, \varepsilon) = A_0(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t). \tag{2}$$

Предположим, что характеристическое уравнение

$$\det \| A_0(t) - \lambda(t) E \| = 0 \tag{3}$$

($E$ — единичная матрица) имеет $\forall t \in [0, L]$ ($L > 0$ — произвольное действительное число) $n$-кратный корень $\lambda_0(t) \neq 0$ и ему соответствует несколько, например $p > 1$, кратных элементарных делителей кратности $k_1, k_2, \ldots, \ldots, k_p$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$.

Системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной, где малый параметр входил бы в целой, не равной двум, и дробной степени, исследовались в работах [1, 2] и многих других. В этих работах строились формальные частные решения системы и доказывался их асимптотический характер.

Структура формальных фундаментальных матриц системы (1) существенно зависит от того, каковы кратности этих делителей. Случай совпадения кратностей $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = n/p$ исследован в [3]. В настоящем сообщении рассмотрим случай, когда кратности делителей различны. Не умаляя общности будем считать, что $k_1 > k_2 > \ldots > k_p$.

Теорема 1. *Если матрицы $A_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots$, неограниченно дифференцируемы по $t$ на сегменте $[0, L]$ и характеристическое уравнение* (3) *имеет $\forall t \in [0, L]$ один $n$-кратный корень $\lambda_0(t) \neq 0$, которому соответствует $p > 1$ кратных элементарных делителей $[\lambda(t) - \lambda_0(t)]^{k_1}$, $[\lambda(t) - \lambda_0(t)]^{k_2}, \ldots$ $\ldots, [\lambda(t) - \lambda_0(t)]^{k_p}$, то система* (1) *имеет при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\forall t \in [0, L]$ формальную фундаментальную матрицу*

$$X(t, \varepsilon) = U(t, \varepsilon) H(t, \varepsilon), \tag{4}$$

*где*

$$U(t, \varepsilon) = [U_1(t, \mu_1), U_2(t, \mu_2), \ldots, U_p(t, \mu_p)] \tag{5}$$

*— квадратная матрица $n$-го порядка, состоящая из прямоугольных блоков*

$$U_j(t, \mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s U_{js}(t), \quad \mu_j = \sqrt[2k_j]{\varepsilon}, \quad j = \overline{1, p}, \tag{6}$$

*размеров $n \times k_j$,*

$$H(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{H_1(t, \mu_1), H_2(t, \mu_2), \ldots, H_p(t, \mu_p)\} \tag{7}$$

*— квазидиагональная матрица, удовлетворяющая уравнению*

$$dH/dt = \Lambda(t, \varepsilon) H, \tag{8}$$

*в котором*

$$\Lambda(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{i\mu_1^{-k_1 h}\Lambda_1(t, \mu_1), i\mu_2^{-k_2 h}\Lambda_2(t, \mu_2), \ldots, i\mu_p^{-k_p h}\Lambda_p(t, \mu_p)\}, \tag{9}$$

*причем матрицы $\Lambda_j(t, \mu_j)$ допускают разложения*

$$\Lambda_j(t, \mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s \Lambda_{js}(t) \tag{10}$$

*и $\Lambda_{js}(t)$ — диагональные матрицы для всех $j = \overline{1, p}$, $s = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Определим надлежащим образом коэффициенты разложений (6), (10). Допустим, что матрица (4) — формальная матрица-решение системы. Подставляя (4) и ее вторую производную в (1) и сравнивая в полученном тождестве коэффициенты при одинаковых степенях параметров $\mu_j$, $j = \overline{1, p}$, приходим к бесконечной матричной алгебраической системе уравнений

$$A_0(t) U_{j0}(t) - U_{j0}(t) \Lambda_{j0}^2(t) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \tag{11}$$

$$A_0(t) U_{js}(t) - U_{js}(t) \Lambda_{j0}^2(t) = U_{j0}(t)(\Lambda_{j0}(t)\Lambda_{js}(t) + \Lambda_{js}(t)\Lambda_{j0}(t)) + K_{js}(t),$$
$$s = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где

$$K_{js}(t) = U_{j0}(t) \sum_{m=1}^{s-1} \Lambda_{jm}(t)\Lambda_{j,s-m}(t) + \sum_{r=1}^{s-1}\sum_{m=0}^{s-r} U_{jr}(t)\Lambda_{jm}(t)\Lambda_{j,s-m-r}(t) -$$
$$- i \sum_{m=0}^{s-k_j h} (2U'_{jm}(t)\Lambda_{j,s-k_j h-m}(t) + U_{jm}(t)\Lambda'_{j,s-k_j h-m}(t)) - U''_{j,s-2k_j h}(t) -$$
$$- \sum_{m=1}^{[s|2k_j]} A_m(t) U_{j,s-2k_j m}(t). \tag{13}$$

Легко доказать и обратное: если коэффициенты разложений (6), (10) определены из (11), (12) и матрица (7) — решение уравнения (8), то (4) есть формальная матрица системы (1). Следовательно, доказательство теоремы свелось к доказательству разрешимости системы (11), (12).

Согласно предположениям теоремы существует неограниченно дифференцируемая матрица преобразования подобия $T(t)$ [4] такая, что

$$A_0(t) = T(t)\,W(t)\,T^{-1}(t), \tag{14}$$

где

$$W(t) = \operatorname{diag}\{W_1(t), W_2(t), \ldots, W_p(t)\}, \tag{15}$$

а $W_j(t)$ — клетка Жордана размеров $k_j \times k_j$,

$$W_j(t) = \lambda_0(t)\,E_{k_j} + J_{k_j}, \quad j = \overline{1, p}. \tag{16}$$

В силу (14) уравнение (11) запишем в виде

$$W(t)\,Q_{j0}(t) - Q_{j0}(t)\,\Lambda_{j0}^2(t) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \tag{17}$$

где введено обозначение

$$Q_{j0}(t) = T^{-1}(t)\,U_{j0}(t), \quad j = \overline{1, p}. \tag{18}$$

Разобьем матрицу $Q_{j0}(t)$ размером $n \times k_j$ на $p$ блоков $Q_{j0r}(t)$ размерами $k_r \times k_j$, $r = \overline{1, p}$. Тогда согласно (15) приходим к уравнениям

$$W_r(t)\,Q_{j0r}(t) - Q_{j0r}(t)\,\Lambda_{j0}^2(t) = 0, \quad j, r = \overline{1, p}. \tag{19}$$

Пусть $j = r$. Имеем

$$W_j(t)\,Q_{j0j}(t) - Q_{j0j}(t)\,\Lambda_{j0}^2(t) = 0. \tag{20}$$

Положим

$$Q_{j0j}(t) = E_{k_j} \quad \forall t \in [0, L]. \tag{21}$$

Тогда

$$\Lambda_{j0}^2(t) = W_j(t) \equiv \lambda_0(t)\,E_{k_j} + J_{k_j}, \quad j = \overline{1, p}. \tag{22}$$

Уравнение (22) разрешимо [5]. Его решение имеет вид

$$\Lambda_{j0}(t) = \lambda_0^{1/2}(t)\,E_{k_j} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,\lambda_0^{1/2-1}(t)\,J_{k_j} + \ldots + \frac{1}{(k_j-1)!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots$$
$$\ldots\lambda_0^{1/2-k_j+2}(t) J_{k_j}^{k_j-1}. \tag{23}$$

При $j \neq r$ уравнению (19) можно удовлетворить, положив $Q_{j0r}(t) = 0$. Таким образом, матрицы $U_{j0}(t)$ и $\Lambda_{j0}(t)$, $j = \overline{1, p}$, определены, причем они имеют на сегменте $[0, L]$ производные всех порядков.

Рассмотрим уравнение (12), записав его в виде

$$W(t)\,Q_{js}(t) - Q_{js}(t)\,W_j(t) = Q_{j0}(t)\,(\Lambda_{j0}(t)\,\Lambda_{js}(t) + \Lambda_{js}(t)\,\Lambda_{j0}(t)) + \mathscr{L}_{js}(t),$$
$$s = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Здесь введены обозначения

$$Q_{js}(t) = T^{-1}(t)\,U_{js}(t), \qquad \mathscr{L}_{js}(t) = T^{-1}(t)\,K_{js}(t). \tag{25}$$

Разбивая матрицы $Q_{js}(t)$, $Q_{j0}(t)$ и $\mathscr{L}_{js}(t)$ на $p$ блоков $Q_{jsr}(t)$, $Q_{j0r}(t)$ и $\mathscr{L}_{jsr}(t)$ размерами $k_r \times k_j$, приходим к уравнениям

$$W_r(t)\,Q_{jsr}(t) - Q_{jsr}(t)\,W_j(t) = Q_{j0r}(t)\,(\Lambda_{j0}(t)\,\Lambda_{js}(t) + \Lambda_{js}(t)\,\Lambda_{j0}(t)) + \mathscr{L}_{jsr}(t),$$
$$j, r = \overline{1, p}. \tag{26}$$

При $j = r$ получаем уравнения, разрешимость которых доказана в [3]. При $j \neq r$

$$W_r(t)\,Q_{jsr}(t) - Q_{isr}(t)\,W_j(t) = \mathscr{L}_{jsr}(t), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

В качестве решения уравнения (27) можно взять матрицу [6, 7]

$$Q_{jsr}(t) = -\int_0^\infty e^{W_r(t)\tau} \mathcal{L}_{jsr}(t)\, e^{-W_j(t)\tau} d\tau, \quad j, r = \overline{1, p}, \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

Следовательно, матрицы $Q_{js}(t)$ и $\Lambda_{js}(t)$, $j = \overline{1, p}$, $s = 1, 2, \ldots$, определены, причем они имеют на сегменте $[0, L]$ производные всех порядков. Способ построения матрицы $H(t, \varepsilon)$ указан в [3]. Фундаментальность определенной таким образом матрицы (4) очевидна.

Методом [8] доказывается, что построенные формальные фундаментальные матрицы являются асимптотическими разложениями истинных фундаментальных матриц системы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $\forall t \in [0, L]$ $\mathrm{Re}\,(i\sqrt{\lambda_0(t)}) \leqslant 0$, *тогда формальная фундаментальная матрица* (4) *будет асимптотическим представлением истинной фундаментальной матрицы* $\Phi(t, \varepsilon)$ *системы* (1), *т. е. будет удовлетворять соотношениям*

$$\Phi(t, \varepsilon) = X_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(m+1-2k_1h-2k_1(2k_1-1))/2k_1}), \tag{29}$$

$$d\Phi(t, \varepsilon)/dt = dX_m(t, \varepsilon)/dt + O(\varepsilon^{(m+1-2k_1h-2k_1(2k_1-1))/2k_1}), \tag{30}$$

*где* $X_m(t, \varepsilon)$ — *матрица, получаемая из* $X(t, \varepsilon)$, *если формальные ряды заменить их* $m$*-частными суммами.*


1. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной.— В кн.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1979, с. 262—269.
2. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной дробного ранга.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 4, с. 264—267.
3. *Конет И. М.* Асимптотические разложения фундаментальных матриц линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— 40 с.
4. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 252 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М : Наука, 1967.— 576 с.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1976.— 351 с.
7. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Расщепление систем дифференциальных уравнений в частных производных.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— 40 с.
8. *Шкиль Н. И., Терлецкий В. В.* О краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным параметром.— Диф. уравнения, 1973, № 4, с. 660—668.



Каменец-Подольский пед. ин-т Поступила в редакцию 15.06.83