УДК 517.9.

И. Гумовски

Метод построения квазипериодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение

Если выполняется условие сильной несоизмеримости частот, обеспечивающее отсутствие решений, близких к каким-либо резонансам, то квазипериодические решения гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений в принципе можно построить [1—5]. К сожалению, осуществить это на практике затруднительно. Это объясняется в основном тем, что в конкретных случаях трудно установить, выполняется ли для заданных параметров условие сильной несоизмеримости частот и является ли выбранное значение параметра ε «достаточно малым». Для негамильтоновых систем с помощью классических методов малого параметра в некоторых частных случаях получены квазипериодические решения ([6, гл. 4]). В настоящей статье предлагается более эффективный метод малого параметра. С целью экономии места здесь описывается только принцип построения в предположении, что необходимые условия общего характера выполнены. В дальнейшем можно предлагать варианты такого построения и уточнять условия применения.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$x'' + \omega_0^2 x = \varepsilon f(\omega_1 t, \omega_2 t, x, x', \varepsilon) \tag{1}$$

в предположении, что все переменные и параметры вещественны, f — аналитическая функция малого параметра ε, являющаяся полиномом от x, x', $\cos\omega_1 t$, $\sin\omega_1 t$, $\cos\omega_2 t$, $\sin\omega_2 t$. Частоты ω_1 и ω_2 взаимно несоизмеримы. С помощью стандартных методов, изложенных, например, в [7], можно найти положительные целые числа m_1, m_2 и иррациональное число $\bar{\nu} > 0$ такие, что выполняется соотношение $m_1\omega_1 = m_2\omega_2 + \bar{\nu}$, где $\bar{\nu}$ сколь угодно мало. Будем рассматривать $m_1\omega_1 - \bar{\nu}$ и $m_2\omega_2$ как высшие гармоники одной частоты ω. Преобразуем f в $f(\bar{\nu}t, \omega t, x, x', \varepsilon)$. При $\bar{\nu} = 0$ уравнение с периодическими коэффициентами

$$x'' + \omega_0^2 x = \varepsilon f(0, \omega t, x, x', \varepsilon) \tag{2}$$

имеет в общем случае бесконечное число резонансных периодических решений с частотами $p\omega/q$, $p < q$, где p, q — положительные целые числа. По меньшей мере некоторые из этих резонансных решений могут быть построены методами, описанными в [6, 8], без появления малых знаменателей. Положим $\bar{\alpha} = \omega_0^2 - (p\omega/q)^2$. Так как $\bar{\nu}$ сколь угодно мало по построению, а α мало вблизи резонанса, уравнение (1) можно переписать в виде

$$x'' + (p\omega/q)^2 x = \varepsilon f(\nu\tau, \omega t, x, x', \varepsilon), \tag{3}$$

где $\bar{\alpha} = \varepsilon\alpha$, $\bar{\nu} = \varepsilon\nu$, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время. Член $\varepsilon\alpha x$ включен в f. Если методы работы [9] применить к уравнению (2), затем вблизи того же резонанса применить методы, изложенные в [10], к уравнению (3), то решение последнего можно записать в виде

$$x = a\cos(p\theta/q + \psi) + \varepsilon u_1(\nu\tau, a, \theta, p\theta/q + \psi) + \dots, \quad \theta = \omega t, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} da/dt &= \varepsilon A_1(\nu\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\nu\tau, a, \psi) + \dots, \\ d\psi/dt &= \varepsilon\alpha + \varepsilon B_1(\nu\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\nu\tau, a, \psi) + \dots . \end{aligned} \tag{5}$$

При $\nu \neq 0$ и $\tau = \varepsilon t$ уравнение (5) сводится к следующей системе с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} da/d\tau &= A_1(\nu\tau, a, \psi) + \varepsilon A_2(\nu\tau, a, \psi) + \dots, \\ d\psi/d\tau &= \alpha + B_1(\nu\tau, a, \psi) + \varepsilon B_2(\nu\tau, a, \psi) + \dots . \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) имеют в общем случае также бесконечное число резонансных периодических решений. В принципе все эти решения можно построить без появления каких-либо малых знаменателей, и по крайней мере некоторые из них можно построить, используя методы работ [6, 8, 10, 11]. Каждое периодическое решение системы (6) определяет посредством уравнения (4) квазипериодическое решение уравнения (3), а следовательно, и уравнения (1). Так как вид уравнений (6) зависит от «опорного» резонанса $p\omega/q$ уравнения (2), то квазипериодические решения уравнения (1) имеют очень сложную структуру в пространстве параметров, которое не обязательно должно быть одним и тем же вблизи каждого резонанса [10, 11]. Поскольку речь идет о квазипериодических решениях, уравнение (1) эквивалентно двум различным системам дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. При этом одна система с независимой переменной t, а другая, альтернативная система, с независимой переменной τ. Соответствующие периодические решения дают квазипериодическое решение с помощью хорошо известного в радиотехнике механизма — одновременной амплитудной и фазовой модуляции, представленной в (4) функциями $a(\tau)$ и $\psi(\tau)$ соответственно. Из определения ν видно, что этот параметр существенно разрывен. Если бы ν было непрерывным, то при некоторых значениях оно было бы соизмеримо с ω, и формула (4) описывала бы периодическое решение. Следовательно, если предположить, что ν непрерывно, то метод построения (1)—(6) может быть использован также для отыскания периодических решений и, с некоторой модификацией, для построения квазипериодических решений уравнения (1), когда либо ω_1, либо ω_2 обращается в нуль.

Если функция f содержит $n > 2$ взаимно несоизмеримых частот ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, то после $n - 1$ последовательных приведений типа (1)—(6) квазипериодическое решение уравнения (1) можно представить в виде комбинации быстрого периодического решения, зависящего от t, и $n - 1$ все более медленных периодических решений, зависящих от $\tau_i = \varepsilon^i t$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Поскольку гамильтоново уравнение (1) не всегда приводит к системе гамильтоновых уравнений (6), можно модифицировать преобразование (4) вдоль траекторий ([12, § 20]) так, чтобы гамильтонность сохранялась.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере обобщенного уравнения Матье:

$$x'' + \omega_0^2 [1 - \bar{h}/2 (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)]\, x = 0, \quad \omega_1 = 2\omega + \bar{\nu}, \quad \omega_2 = 2\omega - \bar{\nu}. \tag{1a}$$

Полагая $\bar{\nu} = \varepsilon\nu$, $\bar{h} = \varepsilon h = \varepsilon (h_0 + \varepsilon h_1 + \ldots)$ и $\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon\alpha$, приходим к уравнению

$$x'' + \omega^2 x = \varepsilon [-\alpha + h (\omega^2 + \varepsilon\alpha) \cos \nu\tau \cdot \cos 2\omega t]\, x. \tag{3a}$$

При $\nu = 0$ быстрым периодическим решением, удовлетворяющим условиям $x(0) = \gamma$, $x'(0) = 0$ будет

$$x(t) = \gamma [(1 + \varepsilon h_0/16) \cos \omega t - \varepsilon h_0/16 \cos 3\omega t + \ldots], \quad h_0 = 2\alpha/\omega^2. \tag{7}$$

При $\nu \neq 0$ первые члены формул (4), (6) запишем в альтернативной форме:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + v(\omega t, \nu\tau, A, B) + \ldots, \tag{4a}$$

$$\frac{dA}{d\tau} = \left(\frac{\alpha}{2\omega} + \frac{h\omega}{4} \cos \nu\tau\right) B, \qquad \frac{dB}{d\tau} = \left(-\frac{\alpha}{2\omega} + \frac{h\omega}{4} \cos \nu\tau\right) A. \tag{6a}$$

Каждое периодическое решение уравнения (6a) определяет квазипериодическое решение уравнения (1a) в виде (4a). Повторяя этот процесс в окрестности главного резонанса $\omega_0 = 2\omega$, приходим к системе уравнений

$$\frac{dA}{d\tau} = \left(\frac{\alpha}{4\omega} + \frac{h^2\omega}{24} (1 + \cos 2\nu\tau)\right) B, \quad \frac{dB}{d\tau} = \left(-\frac{\alpha}{4\omega} + \frac{5h^2\omega}{24} (1 + \cos 2\nu\tau)\right) A, \tag{6б}$$

периодические решения которой определяют также квазипериодические решения уравнения (1а). Затем непосредственный спектральный анализ уравнений (6а), (6б) и аналогичных уравнений для частот $4m\omega$, $(2m+1)\,\omega$, $m = 1, 2, \ldots$, позволяет найти все устойчивые и неустойчивые режимы уравнения (1а). Такая возможность оставалась до сих пор нереализованной ни одним из известных методов.

1. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Докл. АН СССР, 1954, 98, с. 527—530.
2. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи мат. наук, 1963, 18, № 5, с. 13—40.
3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Успехи мат. наук, 1963, 18, № 6, с. 91—192.
4. *J. Moser.* On invariant Curves of Area—Preserving Mappings of an Annulus.—Nachr. Acad. Wiss. Gôttingengen, Math.-Phys. Kl. IIA, 1962, p. 1—20.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самолейнко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М. : ГИТТЛ, 1956.— 491 с.
7. *Гельфонд А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа.— М. : ГИТТЛ, 1952.— 224 с.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1958.— 408 с.
9. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М. : Наука, 1964.— 431 с.
10. *Gumowski I.* Some relations between differential equations, recurrences and functional iterates: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Тезисы докладов. Киев, 1981.
11. *Gumowski I.* Periodic steady states of dynamic systems and their smooth dependence on parameters.— Proc. Intern. CNRS Colloq. N. 332, Toulouse, 1982, p. 211—218.
12. *Митропольский Ю. А.* Методы усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.

Тулузский ун-т, Франция

Поступила в редакцию 06.05.83