УДК 517.5

В. Л. Грона

О приближении непрерывных функций многих переменных сферическими средними Рисса

Пусть R^N — N-мерное евклидово пространство, $N = 2, 3, \ldots, x = (x_1, \ldots \ldots, x_N)$ — его элементы, $\mathbb{Z}^N$ — множество векторов $n = (n_1, \ldots, n_N)$ с целочисленными координатами, $(xy) = x_1y_1 + \ldots + x_Ny_N$, $|x| = (xx)^{1/2}$.

Пусть, далее, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ — 2π-периодическая по каждой из переменных суммируемая на кубе периодов Q_N функция,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a_n e^{i(nx)}, \quad a_n = (2\pi)^{-N} \int\limits_{Q_N} f(t)\, e^{-i(nt)} dt, \tag{1}$$

— ее ряд Фурье. Тогда при каждых фиксированных $R > 0$ и $\delta > 0$ выражение

$$S_R^\delta(f;\ x) = \sum_{|n|<R} (1 - |n|^2 R^{-2})^\delta a_n e^{inx} \tag{2}$$

называют R-й сферической суммой Рисса порядка δ.

При $N \geqslant 2$ средние (2) впервые рассматривались в [1].

В данной статье продолжены исследования работ [2—5], в которых изучалась асимптотика величины

$$E_R^\delta(\overline{H}_\omega^N) = \sup_{f \in \overline{H}_\omega^N} \| f(x) - S_R^\delta(f;\ x) \|_C, \tag{3}$$

где $\overline{H}_\omega^N$ — класс 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(x')| \leqslant \omega(|x - x'|), \tag{4}$$

$\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности.

В работе [5, гл. V, с. 295] указано, что для величины (3) будет справедлива асимптотическая формула (5.6.12) из [5], если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, а N и $\delta > (N-1)/2$ таковы, что

$$t_k - 2t_{k+1} + t_{k+2} \leqslant 0, \quad k \geqslant 1, \tag{5}$$

где $t_k \equiv t_k(\delta, N)$ — возрастающая последовательность положительных нулей функции $y_{\mu,\nu}(x) = \int_x^\infty t^\mu J_\nu(t)\, dt$, $\mu = N/2 - \delta - 1$, $\nu = \delta + N/2$.

В настоящей работе используется следующий способ доказательства соотношений вида (5):

Лемма 1. *Если функция $u(x)$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное множество простых нулей $\{x_k\}$ и удовлетворяет уравнению*

$$u'' + Q(x) u = 0, \tag{6}$$

в котором функция $Q(x)$ положительная монотонно возрастающая на (c, ∞), $c \geqslant 0$, и неположительная на $(0, c]$, то последовательность $\{x_k\}$ выпукла вверх: $x_k - 2x_{k+1} + x_k \leqslant 0$, $k \geqslant 1$.

Доказательство. На интервале $[0, c]$ функция $u(x)$ имеет не более одного нуля (см. [6, с. 251]). Поэтому, учитывая, что $Q(x)$ положительна и возрастает на $[c, \infty)$, получаем, что для всех $k \geqslant 2$ $Q(2x_k - x) \leqslant Q(x)$ $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$. Отсюда на основании теоремы сравнения Штурма (см. [6, с. 254]) получаем требуемое утверждение.

В работе [4] показано, что на интервале $(0, \infty)$ функция $(x^\mu S_{\mu,\nu} \times (x))^{-1/2} y_{\mu,\nu}(x)$, $\mu < 1/2$ ($S_{\mu,\nu}(x)$ — функция Ломмеля второго рода (см. [7, с.379])) удовлетворяет уравнению (6), в котором

$$Q(x) \equiv Q_{\mu,\nu}(x) = (2V_{\mu,\nu}(x))^{-1} (2 + V''_{\mu,\nu} - [(2\mu - 1)/x] V'_{\mu,\nu} - [2(\mu^2 - 1/4) x^{-2}] V_{\mu,\nu} - 3/2 [(\ln V_{\mu,\nu})']^2 V_{\mu,\nu}) \overset{\text{def}}{=} Q_1(x)/2V_{\mu,\nu}(x), \tag{7}$$

где

$$V_{\mu,\nu}(x) \overset{\text{def}}{=} x^{1-\mu} S_{\mu,\nu}(x). \tag{8}$$

Обозначим

$$\psi_{0,\mu,\nu}(x) = \sqrt{x} S_{\mu,\nu}(x), \tag{9}$$

$$\psi_{k,\mu,\nu}(x) = (2k)^{-1} [(\mu + 2k - 1/2) \psi_{k-1,\mu,\nu}(x) - x\psi'_{k-1,\mu,\nu}(x)], \quad k \geqslant 1. \tag{10}$$

В работе [8, с. 47 — 49] было доказано, что при всех $\mu < 1/2$ и $\nu \geqslant 1/2$ для всех целых $k \geqslant 0$ справедливы следующие соотношения:

$$\psi_{k,\mu,\nu}(x) > 0, \quad x > 0, \tag{11}$$

$$\psi_{0,\mu,\nu}(x) = x^{\mu-1/2} + [\nu^2 - (\mu-1)^2]\,\psi_{1,\mu-2,\nu}(x), \tag{12}$$

$$\psi_{k+1,\mu,\nu}(x) = \psi_{k,\mu,\nu}(x) + [\nu^2 - (\mu-1)^2]\,\psi_{k+1,\mu-2,\nu}(x), \tag{13}$$

$$(-1)^n \psi^{(n)}_{0,\mu,\nu}(x) = [\Gamma(1/2-\mu+n)/\Gamma(1/2-\mu)]\,x^{\mu-1/2-n} + O(x^{\mu-5/2-n}),$$
$$x\to\infty,\quad n\geqslant 0. \tag{14}$$

Кроме того, при всех $\mu < 1/2$ и $\nu > 1-\mu$ справедливы неравенства (см. [8, с. 53, 54])

$$V'_{\mu,\nu}(x) < 0, \quad x>0, \tag{15}$$

$$(V'_{\mu,\nu}(x)/V_{\mu,\nu}(x))' > 0, \quad x>0. \tag{16}$$

Подчеркнем, что из справедливости неравенства (11) при $k=0$ следует существование $(x^{\mu}S_{\mu,\nu}(x))^{-1/2}$ при любом $x>0$, $\mu<1/2$ и $\nu\geqslant 1/2$.

Последовательно дифференцируя (8) и учитывая (9), (10) и (13), получаем

$$V'_{\mu,\nu}(x) = -2(\nu^2-(\mu-1)^2)\,\psi_{1,\mu-2,\nu}(x)\,x^{-\mu-1/2}, \tag{17}$$

$$V''_{\mu,\nu}(x) = 2(\nu^2-(\mu-1)^2)(4\psi_{2,\mu-2,\nu}(x) - \psi_{1,\mu-2,\nu}(x))\,x^{-\mu-3/2}, \tag{18}$$

$$V'''_{\mu,\nu}(x) = -24(\nu^2-(\mu-1)^2)(2\psi_{3,\mu-2,\nu}(x) - \psi_{2,\mu-2,\nu}(x))\,x^{-\mu-5/2}. \tag{19}$$

Лемма 2. *Пусть m — некоторое фиксированное натуральное число. Тогда при всех μ и ν таких, что*

$$\mu\leqslant m-\sqrt{3m^2+1/4}, \quad 2m-1-\mu<\nu\leqslant 2m+1-\mu, \tag{20}$$

справедливо неравенство

$$Q_1'(x) > 0, \quad x>0. \tag{21}$$

Доказательство. Из соотношения (12), учитывая (8) и (9), получаем

$$V_{\mu,\nu}(x) = x^{1/2-\mu}\psi_{0,\mu,\nu}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{m-1}\gamma_k x^{-2k} + \gamma_m x^{-2m} V_{\mu-2m,\nu}(x), \tag{22}$$

где $\gamma_k = \prod_{i=1}^{k}(\nu^2-(\mu+1-2i)^2)$.

Из равенств (12) и (13) получаем

$$\psi_{0,\mu-2m,\nu}(x) = \psi_{3,\mu-2m,\nu}(x) + ((\mu-2m-1)^2-\nu^2)\times$$
$$\times(\psi_{1,\mu-2m-2,\nu}(x)+\psi_{2,\mu-2m-2,\nu}(x)+\psi_{3,\mu-2m-2,\nu}(x)). \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в (7), имеем

$$Q_1'(x) = r_0 x^{-3} + \sum_{k=1}^{m-1}\gamma_k r_k x^{-(2k+3)} + x^{-\mu-5/2}[\gamma_m r_m \psi_{3,\mu-2m,\nu}(x) -$$
$$-\gamma_{m+1}(r_{m-1}\psi_{1,\mu-2m-2,\nu}(x) + \alpha_1\psi_{2,\mu-2m-2,\nu}(x) +$$
$$+\alpha_2\psi_{3,\mu-2m-2,\nu}(x))] - \frac{3}{2}[(V'_{\mu,\nu}(x)/V_{\mu,\nu}(x))^2 V_{\mu,\nu}(x)]', \tag{24}$$

где

$$r_k\equiv r_k(\mu) = 4(k+1)(\mu^2-2k\mu-2k^2-1/4), \quad k\geqslant 0, \quad \alpha_1\equiv\alpha_1(\mu,m) =$$
$$= r_m(\mu) + 16(3m-2+\mu), \quad \alpha_2\equiv\alpha_2(\mu,m) = r_m(\mu)+48.$$

Докажем, что при $\mu\leqslant m-\sqrt{3m^2+1/4}$

$$r_k(\mu)\geqslant 0, \quad 0\leqslant k\leqslant m, \quad \alpha_1(\mu,m)>0, \quad \alpha_2(\mu,m)>0. \tag{25}$$

Действительно, числа r_k, $0 \leqslant k \leqslant m$, при $\mu \leqslant k - \sqrt{3k^2 + 1/4}$ неотрицательны, а так как функция $x - \sqrt{3x^2 + 1/4}$ монотонно убывает на $[1, \infty[$, то $r_k \geqslant 0$ при всех $k: 0 \leqslant k \leqslant m$ и $\mu < m - \sqrt{3m^2 + 1/4}$.

Далее, $\alpha_1 (m - \sqrt{3m^2 + 1/4}, m) = 16 (3m - 2 + m - \sqrt{3m^2 + 1/4}) > 0$ при $m \geqslant 1$ и $\frac{\partial}{\partial \mu} \alpha_1 (\mu, m) = 8 (m + 1) (\mu - m) + 16 < 0$ при $\mu < 0$ и $m \geqslant 1$. Следовательно, $\alpha_1 (\mu, m) > 0$ при $\mu < m - \sqrt{3m^2 + 1/4}$, $m \geqslant 1$. Положительность $\alpha_2 (\mu, m)$ при таких μ и m очевидна.

При всех $\nu: 2m - 1 < \nu + \mu \leqslant 2m + 1$ числа γ_k положительны при $k \leqslant m$, $\gamma_{m+1} \leqslant 0$.

Так как функция $V_{\mu,\nu}(x)$ положительна на $]0, \infty[$ (см. (8), (9) и (11)), то согласно неравенствам (15) и (16) $[(V'_{\mu,\nu}(x)/V_{\mu,\nu}(x))^2 V_{\mu,\nu}(x)]' < 0$, $x > 0$. Отсюда, принимая во внимание соотношения (11), (24) и (25), получаем утверждение леммы.

Как видно из равенств (7) и (14), при любых $\mu < 1/2$ и $\nu \geqslant 1/2 = \lim\limits_{x \to \infty} Q_1 (x) = 2$. Следовательно, в силу (19) существует число $c \geqslant 0$ такое, что $Q_1 (x) > 0$ при $c < x < \infty$ и $Q_1 (x) \leqslant 0$ при $0 < x \leqslant c$.

Так как функция $V_{\mu,\nu} (x)$ положительна и монотонно убывает на $(0, \infty)$ (см. (8), (9), (11) и (15)), то из равенства (7) вытекает, что при каждом фиксированном натуральном m для любых μ и ν, удовлетворяющих неравенствам (20), существует число $c \geqslant 0$ такое, что функция $Q (x)$ положительна и монотонно возрастает на интервале (c, ∞) и неположительна на $(0, c]$.

Таким образом, согласно утверждению леммы 1 справедлива теорема.

Теорема 1. *При каждом фиксированном натуральном* m, *для всех* μ *и* ν *таких, что* $\mu \leqslant m - \sqrt{3m^2 + 1/4}$, $2m - 1 < \mu + \nu \leqslant 2m + 1$, *последовательность нулей* $\{x_k (\mu, \nu)\}_{k=1}^{\infty}$ *функции* $\int\limits_x^{\infty} t^{\mu} I_{\nu} (t)\, dt$ *вогнута:* $x_k (\mu, \nu) - 2x_{k+1} (\mu, \nu) + x_{k+2} (\mu, \nu) \leqslant 0$.

Принимая во внимание результаты работ [1—3] (см. также [5, гл. V, § 6]), как следствие теоремы 1 получаем теорему.

Теорема 2. *При четных* $N \geqslant 6$ *и* $\delta \geqslant \sqrt{3 (N - 2)^2 + 1}/2$, *а также при нечетных* $N \geqslant 3$ *и* $\delta > (\sqrt{3 (N - 1)^2 + 1} - 1)/2$ *для всякого выпуклого модуля непрерывности имеет место соотношение* 5.6.12 *из* [5].

Отметим, что в случае $N = 2$ и $\delta > 1/2$ аналогичный результат получен в [5, гл. V], а при $N = 4$ и $\delta > 3/2$ в [4]; кроме того, результат работы [4] для четных $N \geqslant 6$ содержится в утверждении теоремы 2.

1. *Bochner S.* Summation of multiple Fourier series by spherical means.— Trans. Amer. Math. Soc., 1936, **40**, N 2, p. 175—207.
2. *Степанец А. И.* Приближение периодических функций суммами Рисса.— Киев; 1974.— 47 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; № 2).
3. *Степанец А. И.* Приближение непрерывных периодических функций многих переменных сферическими средними Рисса.— Мат. заметки, 1974, 15, № 5, с. 821—832.
4. *Голубов Б. И.* О приближении функций нескольких переменных сферическими средними Рисса.— Мат. заметки, 1975, 17, № 2, с. 181—191.
5. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.
6. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1958.— 468 с.
7. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М. : Изд-во иностр. лит., 1949, часть 1.— 798 с.
8. *Грона В. Л.* О монотонности функций Ломмеля.— Киев, 1983.— 55 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; № 34).

Киев. политехн. ин-т

Поступила в редакцию 15.06.83