УДК 517.95

Ю. А. Караджов (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТРИВИМІРНІ МАТРИЧНІ СУПЕРПОТЕНЦІАЛИ

We present a classification of matrix superpotentials that correspond to exactly solvable systems of Schrödinger equations. Superpotentials of the following form are considered: $W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R$, where k is a parameter and P, Q, and R are Hermitian matrices that depend on a variable x. The list of three-dimensional matrix superpotentials is explicitly presented.

Представлена классификация матричных суперпотенциалов, которые соответствуют точно решаемым системам уравнений Шредингера. Рассмотрены суперпотенциалы вида $W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R$, где k — параметр, P, Q и R — эрмитовые матрицы, зависящие от переменной x. Список трехмерных матричных суперпотенциалов приведен в явном виде.

1. Вступ. Суперсиметрична квантова механіка пропонує потужний метод для пошуку точних розв'язків задач, що описуються рівняннями Шрьодінгера [1]. Дискретна симетрія між гамільтоніаном та його суперпартнером, яку називають форм-інваріантністю [2], дає змогу розв'язати спектральну задачу за допомогою алгебраїчних методів.

На жаль, клас відомих задач, що задовольняють умову форм-інваріантності, досить обмежений. Але він включає багато важливих випадків, коли відповідне рівняння Шрьодінгера може бути точно зінтегроване та має явно зображений потенціал.

У роботі [3] запропоновано класифікацію скалярних потенціалів, що відповідають точно розв'язним рівнянням Шрьодінгера. Матричні потенціали з'являються в багатьох фізичних задачах. Наприклад, рух нейтрального нерелятивістського ферміону, що аномально взаємодіє з магнітним полем, згенерованим тонким дротом зі струмом, описується моделлю з матричним потенціалом, запропонованою Проньком та Строгановим [4]. Інші приклади задач з матричним потенціалом можна знайти в роботах [5 – 7], які описують кристалічні структури в моделі Гросс – Неве. Окремі випадки матричних потенціалів зустрічаються також у статтях [8 – 12]. Спеціальний і досить вузький клас матричних потенціалів розглянуто у статті [13].

Систематичне вивчення проблеми класифікації матричних потенціалів розпочато у статтях [14, 15], в яких було повністю описано суперпотенціали вигляду $W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R$, де k — параметр, P, Q та R — ермітові матриці, а також виконується одна з умов: або Q пропорційна одиничній матриці, або R дорівнює нулю. У статті [16] описано більш широкий клас матричних суперпотенціалів, але повну класифікацію не було проведено.

У цій статті досліджено тривимірні суперпотенціали та проведено їх класифікацію.

2. Форм-інваріантні спектральні задачі. Розглянемо спектральну задачу

$$H_k \psi = E_k \psi, \tag{1}$$

де H_k — гамільтоніан з матричним потенціалом, E_k та ψ — його власні значення та власні функції відповідно. Будемо шукати розв'язки у класі квадратично інтегровних функцій, що досить гладко прямують до нуля на кінцях розглядуваного проміжку. Виявляється, що коли поставлена задача є форм-інваріантною, її можна точно розв'язати. Метод розв'язку форм-інваріантних спектральних задач для рівняння Шрьодінгера наведено нижче.

Розглянемо рівняння Шрьодінгера з гамільтоніаном вигляду

$$H_k = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_k(x), \tag{2}$$

де $V_k(x)$ — матричний потенціал, що залежить від параметра k та змінної x.

Припустимо, що гамільтоніан можна факторизувати таким чином:

$$H_k = a_k^\dagger a_k + c_k, \tag{3}$$

де c_k — скалярна функція від k, яка скорочується з відповідним доданком у гамільтоніані. Тут і далі будемо нехтувати позначенням одиничної матриці I біля скалярних величин у матричних рівняннях та писати c_k замість $c_k I$. Як зазначено у [15], достатньо розглянути оператори a_k і $a_k^\dagger$ вигляду

$$a_k = \frac{\partial}{\partial x} + W_k(x), \qquad a_k^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x} + W_k(x), \tag{4}$$

де W_k — ермітова матриця, яку називають суперпотенціалом.

Оскільки матриця W_k є ермітовою, то оператори a_k та $a_k^\dagger$ ермітово спряжені, що одразу дає змогу знайти основний стан системи (1), розв'язуючи диференціальне рівняння першого порядку. Справді, домножуючи зліва вираз

$$a_k^\dagger a_k \psi = 0 \tag{5}$$

на ермітово спряжений спінор $\psi^\dagger$ та інтегруючи отриманий вираз на всій прямій $\mathbb{R}$, отримуємо

$$||a_k \psi||_2 = 0, \tag{6}$$

де $|| \cdot ||_2$ позначає норму в $L_2(\mathbb{R})$. Звідси маємо

$$a_k \psi = 0. \tag{7}$$

Квадратично інтегровна функція $\psi_k^0(x)$, яка є нормованим розв'язком рівняння (7), є власною функцією гамільтоніана, що відповідає власному значенню $E_k^0 = c_k$, і називається основним станом системи (1).

Припустимо також, що система задовольняє умову форм-інваріантності, а саме

$$H_k^+ = H_{k+1}, \tag{8}$$

де H_k^+ — суперпартнер гамільтоніана, який визначається за формулою

$$H_k^+ = a_k a_k^\dagger + c_k. \tag{9}$$

Ця умова дає змогу повністю знайти спектр за допомогою одних лише алгебраїчних операцій, знаючи основний стан системи $\psi_k^0(x)$. Справді, використовуючи умову (8), легко показати, що функція

$$\psi_k^1(x) = \frac{a_k^\dagger \psi_{k+1}^0(x)}{||a_k^\dagger \psi_{k+1}^0(x)||_2} \tag{10}$$

є власною функцією гамільтоніана з власним значенням $E_k^1 = c_{k+1}$. Вона називається першим збудженим станом системи (1). Аналогічно, за індукцією доводиться, що функція

$$\psi_k^n(x) = \frac{a_k^\dagger a_{k+1}^\dagger \ldots a_{k+n-1}^\dagger \psi_{k+n}^0(x)}{||a_k^\dagger a_{k+1}^\dagger \ldots a_{k+n-1}^\dagger \psi_{k+n}^0(x)||_2} \tag{11}$$

є власною функцією гамільтоніана з власним значенням $E_k^n = c_{k+n}$. Її називають n-м збудженим станом системи (1).

Таким чином, якщо система рівнянь Шрьодінгера (1) задовольняє умову форм-інваріантності, то її можна точно зінтегрувати.

3. Задача класифікації. Оскільки форм-інваріантні потенціали відповідають точно інтегровним системам рівнянь Шрьодінгера, доцільно розширити їх клас. Було б цікаво знайти всі гамільтоніани, які допускають факторизацію (3) та задовольняють умову форм-інваріантності (8). Використовуючи суперпотенціал, ці умови можна записати одним рівнянням

$$W_k^2 + W_k' = W_{k+1}^2 - W_{k+1}' + C_k, \tag{12}$$

де $C_k = c_{k+1} - c_k$. Тому, щоб розв'язати поставлену задачу, достатньо знайти всі суперпотенціали, що задовольняють рівняння (12).

У загальному вигляді задача є досить складною, але її можна розв'язати, якщо розглядати суперпотенціали лише з деякого обраного класу. В цій роботі досліджено суперпотенціали вигляду

$$W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R, \tag{13}$$

де P, Q та R — ермітові матриці розміру 3×3, Q — матриця, не пропорційна одиничній матриці і R — не нульова матриця. Такий вибір форми суперпотенціалу обумовлений тим, що широкий клас відомих суперпотенціалів мають вигляд (13), а скалярні суперпотенціали та суперпотенціали, зображені матрицями розміру 2×2, описано у роботах [3, 14, 15]. У випадку, коли потенціали зображені матрицями розміру 3×3, вони відповідають системам трьох зчеплених рівнянь Шрьодінгера. Такі системи, зокрема, описують рух нерелятивістських бозонів у магнітному полі.

Нас цікавлять незвідні суперпотенціали, тобто такі, що не можуть бути зведені до блочно-діагонального вигляду за допомогою унітарного перетворення, що не залежить від змінної x. У випадку звідних суперпотенціалів задача розпадається на кілька подібних задач меншої розмірності.

У наступному пункті наведено і розв'язано рівняння для невідомих матриць P, Q та R за умови, що відповідні суперпотенціали задовольняють рівняння (12).

4. Визначальні рівняння. Щоб отримати систему визначальних рівнянь, підставимо вираз (13) для суперпотенціалу в рівняння (12). Після відокремлення змінних дістанемо систему рівнянь [16]

$$Q' = Q^2 + \nu, \tag{14}$$

$$P' = \frac{1}{2}\{P, Q\} + \mu, \tag{15}$$

$$R' = 0, \tag{16}$$

$$R^2 = \omega^2, \tag{17}$$

$$\{P, R\} + \varkappa = 0, \tag{18}$$

$$C_k = 2\mu + (2k+1)\nu - \frac{\varkappa}{k(k+1)} + \frac{(2k+1)\omega^2}{k^2(k+1)^2}, \tag{19}$$

де $\nu, \mu, \omega, \varkappa$ — довільні дійсні сталі.

Як показано у статті [15], матрицю Q можна діагоналізувати за допомогою унітарного перетворення, що не залежить від x. Тоді рівняння (14) зводиться до системи рівнянь Ріккаті

$$q_i' = q_i^2 + \nu, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{20}$$

де q_i — діагональні елементи матриці Q, яка має такі розв'язки:

$$\begin{gathered} q_i = \lambda \tan(\lambda x + \gamma_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad \nu = \lambda^2, \\ q_i = \begin{cases} -\lambda \tanh(\lambda x + \gamma_i), & i = 1, \ldots, m, \\ -\lambda \coth(\lambda x + \gamma_i), & i = m+1, \ldots, l, \\ \pm\lambda, & i = l+1, l+2, l+3, \end{cases} \qquad \nu = -\lambda^2, \\ q_i = \begin{cases} -\dfrac{1}{x + \gamma_i}, & i = 1, \ldots, m, \\ 0, & i = m+1, m+2, m+3, \end{cases} \qquad \nu = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

де $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3,$ — інтегральні сталі, $m, l = 0, \ldots, 4$, набір $a \ldots b$, де $a > b$, вважається порожнім.

Оскільки Q — діагональна матриця, то лінійне рівняння (15) можна розщепити і розв'язати поелементно:

якщо $\nu = \lambda^2$, то

$$\begin{gathered} p_{ii} = \frac{\mu}{\lambda} \tan(\lambda x + \gamma_i) + \varphi_{ii} \sec(\lambda x + \gamma_i), \quad i = 1, 2, 3, \\ p_{ij} = \varphi_{ij} \sqrt{\sec(\lambda x + \gamma_i) \sec(\lambda x + \gamma_j)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3; \end{gathered} \tag{22}$$

якщо $\nu = -\lambda^2$, то

$$p_{ii} = \begin{cases} -\dfrac{\mu}{\lambda}\tanh(\lambda x + \gamma_i) + \varphi_{ii}\operatorname{sech}(\lambda x + \gamma_i), & i = 1, \ldots, m, \\ -\dfrac{\mu}{\lambda}\coth(\lambda x + \gamma_i) + \varphi_{ii}\operatorname{csch}(\lambda x + \gamma_i), & i = m+1, \ldots, l, \\ \pm\dfrac{\mu}{\lambda} + \varphi_{ii}\exp(\pm\lambda x), & i = l+1, l+2, l+3; \end{cases}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} \varphi_{ij}\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x + \gamma_i)\operatorname{sech}(\lambda x + \gamma_j)}, & i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, m, \\ \varphi_{ij}\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x + \gamma_i)\operatorname{csch}(\lambda x + \gamma_j)}, & i = 1, \ldots, m,\ j = m+1, \ldots, l, \\ \varphi_{ij}\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x + \gamma_i)\exp(\pm\lambda x)}, & i = 1, \ldots, m,\ j = l+1, l+2, l+3, \\ \varphi_{ij}\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x + \gamma_i)\operatorname{csch}(\lambda x + \gamma_j)}, & i = m+1, \ldots, l,\ j = m+1, \ldots, l, \\ \varphi_{ij}\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x + \gamma_i)\exp(\pm\lambda x)}, & i = m+1, \ldots, l,\ j = l+1, l+2, l+3, \\ \varphi_{ij}\exp(\pm\lambda x), \quad \text{якщо } q_i q_j > 0, & i = l+1, l+2, l+3,\ j = l+1, l+2, l+3, \\ \varphi_{ij}, \quad \text{якщо } q_i q_j < 0, & i = l+1, l+2, l+3,\ j = l+1, l+2, l+3; \end{cases} \tag{23}$$

якщо $\nu = 0$, то

$$p_{ii} = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{ii} - \dfrac{\mu x}{2}(x + 2\gamma_i)}{x + \gamma_i}, & i = 1, \ldots, m, \\ -\mu x + \varphi_{ii}, & i = m+1, m+2, m+3, \end{cases}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{ij}}{\sqrt{(x + \gamma_i)(x + \gamma_j)}}, & i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, m, \\ \dfrac{\varphi_{ij}}{\sqrt{x + \gamma_i}}, & i = 1, \ldots, m,\ j = m+1, m+2, m+3, \\ \varphi_{ij}, & i = m+1, m+2, m+3,\ j = m+1, m+2, m+3; \end{cases} \tag{24}$$

де $\varphi_{ji} = \overline{\varphi_{ij}} \in \mathbb{C}$ — інтегральні сталі, а числа m та l в інтервалах відповідають таким у формулі (21).

З рівнянь (16), (17) робимо висновок, що $R = (r_{ij})$ — стала матриця, квадрат якої пропорційний одиничній матриці.

Останнє рівняння (18) накладає додаткові умови на сталі $\mu, \varkappa$ та інтегральні сталі φ_{ij}, r_{ij}. Покажемо, що у випадку, коли Q не є сталою матрицею, необхідно, щоб виконувались умови

$$\mu = 0, \quad \varkappa = 0. \tag{25}$$

Розглянемо елементи $\{P, R\}_{ij}$ у рівнянні (18), що відповідають q_i — не константному елементу матриці Q:

$$\begin{gathered} 4\mu r_{ii}\xi_i(x) + \sum_{p=1}^{3}(r_{ip}\overline{\varphi_{ip}} + \overline{r_{ip}}\varphi_{ip})\eta_{ip}(x) = -\varkappa, \\ 2\mu\overline{r_{ij}}(\xi_i(x) + \xi_j(x)) + \sum_{p=1}^{3}(\overline{\varphi_{ip}}r_{jp}\eta_{ip}(x) + \varphi_{jp}\overline{r_{ip}}\eta_{jp}(x)) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{26}$$

де η_{ij} — множники при φ_{ij} в матриці P, $\xi_i,\ i=1,2,3$, визначаються за формулою

$$\xi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\tan(\lambda x+\gamma_i), & \nu=\lambda^2,\\ -\dfrac{1}{\lambda}\tanh(\lambda x+\gamma_i), & \nu=-\lambda^2,\\ -\dfrac{1}{\lambda}\coth(\lambda x+\gamma_i), & \nu=-\lambda^2,\\ -\dfrac{x(x+2\gamma_i)}{2(x+\gamma_i)}, & \nu=0,\end{cases} \tag{27}$$

а ξ_j подібні до ξ_i або сталі.

Оскільки $\xi_i(x), \eta_{ij}(x)$ та одиниця є попарно лінійно незалежними, то система (26) буде сумісною лише тоді, коли або μ та $\varkappa$ дорівнюють нулю, або увесь стовпчик r_{ij} матриці R дорівнює нулю. Але в останньому випадку матриця R є сингулярною матрицею, що суперечить умові (17), тому умови (25) доведено.

Отримані умови значно спрощують рівняння (18) та дають змогу розв'язати його поелементно, по можливості спрощуючи результат за допомогою унітарних перетворень, що не залежать від x.

У наступному пункті розв'язки рівняння (18) та результати (21)–(25) зібрано та подано у вигляді списку незвідних тривимірних суперпотенціалів.

5. Тривимірні матричні суперпотенціали. Для зручності будемо записувати матриці P, Q та R окремо. Матриці P та R будемо розкладати за елементами наступного базису:

$$e_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, e_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, e_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},$$

$$e_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, e_8=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, e_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},$$

дев'ятий елемент базису e_0 збігається з одиничною матрицею I. Матрицю Q будемо записувати у діагональній формі

$$Q=\operatorname{diag}\{q_1,q_2,q_3\}=\frac{q_1+q_2}{2}e_0+\frac{q_1-q_2}{2}e_3+\frac{2q_3-q_1-q_2}{2}e_8.$$

Використавши наведені базиси та результати (21), отримаємо список нееквівалентних зображень для матриці Q:

якщо $\nu=-\lambda^2$, то

$$Q=\operatorname{diag}\{\lambda\tan(\lambda x+\gamma_1),\lambda\tan(\lambda x+\gamma_2),\lambda\tan(\lambda x+\gamma_3)\}; \tag{28}$$

якщо $\nu=\lambda^2$, то

$$Q=\operatorname{diag}\{-\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_1),-\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_2),-\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_3)\}, \tag{29}$$

$$Q=\operatorname{diag}\{-\lambda\coth(\lambda x+\gamma_1),-\lambda\coth(\lambda x+\gamma_2),-\lambda\coth(\lambda x+\gamma_3)\}, \tag{30}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{-\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_1), -\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_2), -\lambda\coth(\lambda x+\gamma_3)\right\}, \tag{31}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{-\lambda\coth(\lambda x+\gamma_1), -\lambda\coth(\lambda x+\gamma_2), -\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_3)\right\}, \tag{32}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{-\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_1), -\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_2), \pm\lambda\right\}, \tag{33}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{-\lambda\coth(\lambda x+\gamma_1), -\lambda\coth(\lambda x+\gamma_2), \pm\lambda\right\}, \tag{34}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{\pm\lambda, -\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_2), -\lambda\coth(\lambda x+\gamma_3)\right\}, \tag{35}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{\pm\lambda, \pm\lambda, -\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_3)\right\}, \tag{36}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{\pm\lambda, \pm\lambda, -\lambda\coth(\lambda x+\gamma_3)\right\}, \tag{37}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{\lambda, -\lambda, -\lambda\tanh(\lambda x+\gamma_3)\right\}, \tag{38}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{\lambda, -\lambda, -\lambda\coth(\lambda x+\gamma_3)\right\}; \tag{39}$$

якщо $\nu = 0$, то

$$Q = \operatorname{diag}\left\{-\frac{1}{x+\gamma_1}, -\frac{1}{x+\gamma_2}, -\frac{1}{x+\gamma_3}\right\}, \tag{40}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{-\frac{1}{x+\gamma_1}, -\frac{1}{x+\gamma_2}, 0\right\}, \tag{41}$$

$$Q = \operatorname{diag}\left\{0, 0, -\frac{1}{x+\gamma_3}\right\}. \tag{42}$$

У наведеному переліку розглянуто два випадки, коли $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ всі різні і $\gamma_1 = \gamma_2 \neq \gamma_3$.

Результати (22) – (25) дають змогу розв'язати рівняння (18) та знайти матриці P та R у наведеному вище базисі. Пропустимо громіздкі викладки та наведемо одразу список нееквівалентних зображень для матриць P та R. Зазначимо, що, де це було можливо, розв'язки були спрощені за допомогою унітарних перетворень, що не залежать від змінної x.

Нееквівалентні матриці R для різних $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ мають вигляд

$$R = \pm\omega(e_3 + e_8), \tag{43}$$

$$R = \varepsilon e_2 + r e_3 \pm \omega e_8, \tag{44}$$

$$R = \pm\omega(e_3 - e_8), \tag{45}$$

$$R=\frac{1}{2}(r\pm\omega)e_0+\frac{1}{2}(r\mp\omega)e_3+\varepsilon e_5-\frac{1}{2}(3r\pm\omega)e_8, \tag{46}$$

$$R=\pm\omega(e_0-2e_8), \tag{47}$$

$$R=\frac{1}{2}(r\pm\omega)e_0-\frac{1}{2}(r\mp\omega)e_3+\varepsilon e_7-\frac{1}{2}(3r\pm\omega)e_8 \tag{48}$$

і для $\gamma_1=\gamma_2\neq\gamma_3$

$$R=\pm\omega(e_1\pm e_8), \tag{49}$$

$$R=\frac{1}{2}(r\pm\omega)e_0+\frac{1}{2}(r\mp\omega)e_3+\varepsilon e_5-\frac{1}{2}(3r\pm\omega)e_8, \tag{50}$$

де p, r, ϕ, ε — дійсні сталі, $p\neq 0$ і $r^2+\varepsilon^2=\omega^2$. У випадку (49) знаки перед e_1 і e_8 вибираються незалежно.

Нижче наведено список нееквівалентних матриць P, що відповідають матриці R вигляду (43):

$$P=\phi e_1\sqrt{\sec(\lambda x+\gamma_1)\sec(\lambda x+\gamma_2)}+pe_6\sqrt{\sec(\lambda x+\gamma_2)\sec(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{51}$$

$$P=\phi e_1\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)}+pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{52}$$

$$P=\phi e_1\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)}+pe_6\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{53}$$

$$P=\phi e_1\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)}+pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{54}$$

$$P=\phi e_1\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)}+pe_6\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{55}$$

$$P=\phi e_1\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)}+pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{56}$$

$$P=\phi e_1\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)}+pe_6\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{57}$$

$$P=\phi e_1\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)}+pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{58}$$

$$P=\phi e_1+pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(-\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{59}$$

$$P=\phi e_1+pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(-\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{60}$$

$$P=\frac{\phi e_1}{\sqrt{(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)}}+\frac{pe_6}{\sqrt{(x+\gamma_2)(x+\gamma_3)}}, \tag{61}$$

$$P = \frac{\phi e_1}{\sqrt{(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)}} + \frac{pe_6}{\sqrt{x+\gamma_2}}. \tag{62}$$

Відповідні матриці Q визначаються формулами (28) – (35), (38) – (41). При цьому формула (28) відповідає першій формулі зі списку, (29) — другій і так далі.

Нееквівалентні матриці P, що відповідають матриці R вигляду (44), мають вигляд

$$P = pe_1\sqrt{\sec(\lambda x+\gamma_1)\sec(\lambda x+\gamma_2)}, \tag{63}$$

$$P = pe_1\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)}, \tag{64}$$

$$P = pe_1\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)}, \tag{65}$$

$$P = pe_1\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)}, \tag{66}$$

$$P = pe_1\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)}, \tag{67}$$

$$P = pe_1\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)}, \tag{68}$$

$$P = pe_1\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)}, \tag{69}$$

$$P = pe_1\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)}, \tag{70}$$

$$P = pe_1, \tag{71}$$

$$P = pe_1, \tag{72}$$

$$P = \frac{pe_1}{\sqrt{(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)}}, \tag{73}$$

$$P = \frac{pe_1}{\sqrt{(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)}}. \tag{74}$$

Відповідні матриці Q визначаються формулами (28) – (35), (38) – (41). Відповідність визначається так, як і в попередньому випадку.

Нееквівалентні матриці P, що відповідають матриці R вигляду (45), мають вигляд

$$P = \phi e_1\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)} + pe_4\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{75}$$

$$P = \phi e_1 + pe_4\sqrt{\exp(\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{76}$$

$$P = \phi e_1 + pe_4\sqrt{\exp(\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}. \tag{77}$$

Відповідні матриці Q визначаються формулами (35), (38), (39).

Нееквівалентні матриці P, що відповідають матриці R вигляду (46), мають вигляд

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{78}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{79}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{80}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\exp(\lambda x)}, \tag{81}$$

$$P = pe_4\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{82}$$

$$P = pe_4\sqrt{\exp(\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{83}$$

$$P = pe_4\sqrt{\exp(\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{84}$$

$$P = \frac{pe_4}{\sqrt{x+\gamma_1}}. \tag{85}$$

Відповідні матриці Q визначаються формулами (31) – (35), (38), (39), (41).

Нееквівалентні матриці P, що відповідають матриці R вигляду (47), мають вигляд

$$P = \phi e_4\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)} + pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{86}$$

$$P = \phi e_4\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)} + pe_6\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{87}$$

$$P = \phi e_4\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\exp(\pm\lambda x)} + pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{88}$$

$$P = \phi e_4\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\exp(\lambda x)} + pe_6\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_2)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{89}$$

$$P = \phi e_4\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)} + pe_6\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_2)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{90}$$

$$P = \phi e_4\sqrt{\exp(\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)} + pe_6\sqrt{\exp(-\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{91}$$

$$P = \phi e_4\sqrt{\exp(\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)} + pe_6\sqrt{\exp(-\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{92}$$

$$P = \frac{\phi e_4}{\sqrt{x+\gamma_1}} + \frac{pe_6}{\sqrt{x+\gamma_2}}. \tag{93}$$

Відповідні матриці Q визначаються формулами (31) – (35), (38), (39), (41).

Нееквівалентні матриці P, що відповідають матриці R вигляду (48), мають вигляд

$$P = pe_6\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\,\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{94}$$

$$P = pe_6\sqrt{\exp(\lambda x)\,\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{95}$$

$$P = pe_6\sqrt{\exp(\lambda x)\,\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_3)}. \tag{96}$$

Відповідні матриці Q визначаються формулами (35), (38), (39).

Нееквівалентні матриці P, що відповідають матриці R вигляду (49), мають вигляд

$$P = pe_3\sec(\lambda x + \gamma_1) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\sec(\lambda x + \gamma_1)\sec(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{97}$$

$$P = pe_3\,\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_1) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_1)\,\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{98}$$

$$P = pe_3\,\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_1) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_1)\,\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{99}$$

$$P = pe_3\,\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_1) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_1)\,\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{100}$$

$$P = pe_3\,\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_1) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_1)\,\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{101}$$

$$P = pe_3\,\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_1) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_1)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{102}$$

$$P = pe_3\,\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_1) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_1)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{103}$$

$$P = pe_3\exp(\pm\lambda x) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\,\mathrm{sech}(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{104}$$

$$P = pe_3\exp(\pm\lambda x) + \phi(e_4 \mp e_6)\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\,\mathrm{csch}(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{105}$$

$$P = \frac{pe_3}{x + \gamma_1} + \frac{\phi(e_4 \mp e_6)}{\sqrt{(x + \gamma_1)(x + \gamma_3)}}, \tag{106}$$

$$P = \frac{pe_3}{x + \gamma_1} + \frac{\phi(e_4 \mp e_6)}{\sqrt{x + \gamma_1}}, \tag{107}$$

$$P = pe_3 + \frac{\phi(e_4 \mp e_6)}{\sqrt{x + \gamma_3}}. \tag{108}$$

Відповідні матриці Q визначаються формулами (28) – (34), (36), (37), (40) – (42). У цьому списку знак у матриці P перед e_6 є протилежним до вибраного знаку в матриці R перед e_8.

Нееквівалентні матриці P, що відповідають матриці R вигляду (50), мають вигляд

$$P = pe_4\sqrt{\sec(\lambda x + \gamma_1)\sec(\lambda x + \gamma_3)}, \tag{109}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{110}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{111}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{112}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{113}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_1)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{114}$$

$$P = pe_4\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_1)\exp(\pm\lambda x)}, \tag{115}$$

$$P = pe_4\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\operatorname{sech}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{116}$$

$$P = pe_4\sqrt{\exp(\pm\lambda x)\operatorname{csch}(\lambda x+\gamma_3)}, \tag{117}$$

$$P = \frac{pe_4}{\sqrt{(x+\gamma_1)(x+\gamma_3)}}, \tag{118}$$

$$P = \frac{pe_4}{\sqrt{x+\gamma_1}}, \tag{119}$$

$$P = \frac{pe_4}{\sqrt{x+\gamma_3}}. \tag{120}$$

Відповідні матриці Q визначаються формулами (28) – (34), (36), (37), (40) – (42).

Таким чином, повний список тривимірних матричних суперпотенціалів, а саме матриць P, Q та R, задається формулами (28) – (120). Кожному з цих суперпотенціалів відповідає форм-інваріантний гамільтоніан (2) з потенціалом вигляду $V_k = W_k^2 - W_k'$. Відповідні спектральні задачі можна зінтегрувати, використавши стандартні методи суперсиметричної квантової механіки.

6. Висновок. У статті було поставлено задачу: знайти тривимірні матричні суперпотенціали, що відповідають точно інтегровним системам рівнянь Шрьодінгера. В загальному вигляді задача залишається досить складною для аналізу, але її було розв'язано, обмеживши клас розглядуваних суперпотенціалів випадком (13). Дане обмеження мотивовано тим, що широкий клас скалярних потенціалів, а також майже всі відомі матричні потенціали мають зазначений вигляд.

Було знайдено 70 нових матричних суперпотенціалів. Результати наведено у вигляді списку матриць Q (формули (28) – (42)), R (формули (43) – (50)) та P (формули (51) – (120)). Відповідні суперпотенціали можна легко відновити в явному вигляді за допомогою формули (13).

Таким чином, у роботі знайдено клас матричних суперпотенціалів, що відповідають точно розв'язним системам рівнянням Шрьодінгера, які можуть мати широке застосування у квантовій механіці. Зокрема, системи рівнянь такого типу описують рух нерелятивістських бозонів у магнітному полі.

Незважаючи на той факт, що задачу вдалось розв'язати повністю, отримані результати обмежені формою (13) та розмірністю суперпотенціалу. В наступних роботах буде розглянуто більш загальний клас матричних суперпотенціалів, а також планується розширити клас відомих скалярних потенціалів.

Автор висловлює подяку професору А. Г. Нікітіну за корисні дискусії та коментарі.

1. *Witten E.* Dynamical breaking of supersymmetry // Nucl. Phys. B. – 1981. – **185**, Issue 513 .
2. *Gendenshtein L.* Derivation of exact spectra of the Schr odinger equation by means of supersymmetry // JETP Lett. – 1983. – **38**. – P. 356 – 359.
3. *Cooper F., Khare A., Sukhatme U.* Supersymmetry and quantum mechanics // Phys. Repts. – 1995. – **251**, Issue 5 – 6. – P. 267 – 385.
4. *Pron'ko G. P., Stroganov Y. G.* New example of quantum mechanical problem with a hidden symmetry // Sov. Phys. JETP. – 1977. – **45**. – P. 1075 – 1078.
5. *Correa F., Dunne G. V., Plyushchay M. S.* The Bogoliubov – de Gennes system, the AKNS hierarchy, and nonlinear quantum mechanical supersymmetry // Ann. Phys. – 2009. – **324**, Issue 12. – P. 2522 – 2547.
6. *Correa F., Jakubsky' V., Luis-Miguel Nieto, Plyushchay M. S.* Self-isospectrality, special supersymmetry, and their effect on the band structure // Phys. Rev. Lett. – 2008. – **101**, Issue 3.
7. *Plyushchay M. S., Arancibia A., Luis-Miguel Nieto.* Exotic supersymmetry of the kink-antikink crystal, and the infinite period limit // Phys. Rev. – 2011.
8. *Tkachuk V. M., Roy P.* Motion of a spin-$\frac{1}{2}$ particle in shape invariant scalar and magnetic fields // J. Phys. A. – 2000. – **33**, Issue 22. – P. 4159 – 4167.
9. *Andrianov A. A., Ioffe M. V.* From supersymmetric quantum mechanics to a parasupersymmetric one // Phys. Lett. B. – 1991. – **255**, Issue 4. – P. 543 – 548.
10. *Andrianov A. A., Ioffe M. V., Spiridonov V. P., Vinet L.* Parasupersymmetry and truncated supersymmetry in quantum mechanics // Phys. Lett. B. – 1991. – **272**, Issue 3 – 4. – P. 297 – 304.
11. *Andrianov A. A., Cannata F., Ioffe M. V., Nishnianidze D. N.* Matrix Hamiltonians: SUSY approach to hidden symmetries // J. Phys. A. – 1997. – **30**, Issue 14. – P. 5037 – 5050.
12. *de Lima Rodrigues R., Bezerra V. B., Vaidyac A. N.* An application of super symmetric quantum mechanics to a planar physical system // Phys. Lett. A. – 2001. – **287**. – P. 45 – 49.
13. *Fukui T.* Shape-invariant potentials for systems with multi-component wave functions // Phys. Lett. A. – 1993. – **178**, Issue 1 – 2. – P. 1 – 6.
14. *Nikitin A. G., Karadzhov Yuri.* Matrix superpotentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2011. – **44**, Issue 30.
15. *Karadzhov Yuri.* Matrix superpotential linear in variable parameter // CNSNS (2011), doi:10.1016/j.cnsns.2011.09.025.
16. *Nikitin A. G., Karadzhov Yuri.* Enhanced classification of matrix superpotentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2011. – **44**, Issue 44.

Отримано 31.01.12