УДК 519.21

О. М. Ядренко

О сходимости одного класса гауссовских последовательностей

В настоящей работе изучаются условия сходимости почти наверное (п. н.) гауссовской последовательности $\{\xi_n\}$, удовлетворяющей разностному уравнению вида

$$\xi_n = a_{1n}\xi_{n-1} + \ldots + a_{mn}\xi_{n-m} + \lambda_n z_n, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

где $\{z_n\}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин $Mz_n = 0$, $Mz_n^2 = 1$; $\{a_{kn}\}$, $k = \overline{1, m}$; $n \geqslant 1$, — некоторые заданные последовательности (считаем, что $\xi_0 = \xi_{-1} = \ldots = \xi_{-m+1} = 0$) такие, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \max_{k=\overline{1,m}} |a_{kn}| < 1/m. \tag{2}$$

Гауссовские последовательности, удовлетворяющие стохастическим разностным уравнениям вида (1), называются гауссовскими m-марковскими последовательностями.

Класс гауссовских m-марковских последовательностей — естественное расширение класса гауссовских марковских последовательностей. Критерий сходимости п. н. к нулю гауссовской марковской последовательности получен в [1].

Вопрос о сходимости гауссовской m-марковской последовательности удобно свести к вопросу о сходимости m-мерной гауссовской марковской последовательности $\{X_n\}$, построенной следующим образом

$$X'_n = (\xi_n, \ldots, \xi_{n+m-1}) \tag{3}$$

(здесь штрих обозначает транспонирование). В силу (1)

$$X_n = A_n X_{n-1} + \Lambda_n Z_n, \tag{4}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_{1\,n+m-1} & & \ldots & a_{m\,n+m-1} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda_{n+m-1} \end{pmatrix},$$

$Z'_n = (0, \ldots, 0, z_{n+m-1})$.

Равенство (4) свидетельствует о том, что последовательность случайных векторов $\{X_n\}$ является марковской. Действительно, пусть $\{X_n\}$ — m-мерная гауссовская марковская последовательность. Предположим, что $MX_n = 0$, а матрицы $B_{nn} = MX_n \cdot X'_n$ невырожденные. Введем обозначения: $B_{kn} = MX_k \cdot X'_n$, $R_{kn} = B_{kn} B_{nn}^{-1}$, $n < k$.

Условия $M\{X_n/X_{n-1}, \ldots, X_1\} = M\{X_n/X_{n-1}\}$ и $R_{ij} = R_{is} R_{sj}$ $\forall$ $i \leqslant s \leqslant j$ эквивалентны.

Многомерная гауссовская последовательность является марковской тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему стохастическому разностному уравнению:

$$X_n = A_n X_{n-1} + \Lambda_n Z_n, \tag{5}$$

где $A_n = R_{n\,n-1}$, $\Lambda_n = M(X_n - A_n X_{n-1})(X_n - A_n X_{n-1})'$, $\{Z_n\}$ — последовательность независимых гауссовских векторов с независимыми компонентами (распределения этих векторов могут быть и вырожденными).

Пусть для любого j R_{jj-1} — невырожденные матрицы. Тогда последовательность $\{X_n\}$, удовлетворяющая стохастическому разностному уравнению (5), представима в виде

$$X_n = R_{n1} \sum_{j=1}^{n} R_{j1}^{-1} \Lambda_j Z_j. \tag{6}$$

Таким образом, изучение предельного п. н. поведения многомерных гауссовских марковских последовательностей приводится к схеме усиленного закона больших чисел с матричными нормировками.

Сформулируем теорему, необходимую при доказательстве основного результата настоящей статьи, которая обобщает теорему об усиленном законе больших чисел, содержащуюся в [2].

Введем обозначения: $\mathfrak{X}$ — сепарабельное банахово пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathfrak{X}$, $\{Y_n\}$— последовательность независимых симметричных случайных элементов в $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, $S_n = \sum_{i=1} Y_i$, $\{C_n\}$ — последовательность линейных непрерывных обратимых операторов в $\mathfrak{X}$ такая, что

$$\overline{\lim} \| C_n \| = q < 1. \tag{7}$$

Определим $D_n = C_n \ldots C_1$ и подпоследовательность $\{n_k\}$:

$$n_k = \max\{n : \| C_1^{-1} \| \ldots \| C_n^{-1} \| \leqslant a^k\} \tag{8}$$

(a — некоторая фиксированная постоянная, $a > 1$).

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$D_n S_n \to 0 \text{ п. н.}, \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$D_{n_k}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}}) \to 0 \text{ п. н.} \tag{10}$$

Достаточность. Заметим, что выбор подпоследовательности в (8) корректен, поскольку $\| C_n^{-1} \| > 1/q$ для достаточно больших n и $\| C_1^{-1} \| \ldots \| C_n^{-1} \| \to \infty$.

Пусть $n_{k-1} < n \leqslant n_k$. Тогда

$$\| D_n S_n \| \leqslant \| D_n D_{n_{k-1}}^{-1} \| \max_{n_{k-1} < n < n_k} \| D_{n_k}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}}) \| + \\ + \| D_n D_{n_{k-1}}^{-1} \| \, \| D_{n_{k-1}} S_{n_{k-1}} \|. \tag{11}$$

Необходимо получить оценки величин $\| D_n D_{n_k}^{-1} \|$, $\| D_n D_{n_{k-1}}^{-1} \|$ при $n_{k-1} < < n < n_k$. Заметим, что

$$\| D_n D_{n_k}^{-1} \| = \| C_{n+1}^{-1} \ldots C_{n_k}^{-1} \| \leqslant \frac{\| C_1^{-1} \| \ldots \| C_{n_k}^{-1} \|}{\| C_1^{-1} \| \ldots \| C_{n_{k-1}}^{-1} \|} \cdot \frac{1}{\| C_{n_{k-1}+1}^{-1} \| \ldots \| C_n^{-1} \|}.$$

Вследствие (8)

$$\frac{\| C_1^{-1} \| \ldots \| C_{n_k}^{-1} \|}{\| C_1^{-1} \| \ldots \| C_{n_{k-1}}^{-1} \|} \leqslant a.$$

В силу (7) для достаточно больших индексов n_k справедливо неравенство

$$(\| C_{n_{k-1}+1}^{-1} \| \ldots \| C_n^{-1} \|)^{-1} \leqslant q^{n - n_{k-1} + 1}.$$

Аналогично

$$\| D_n D_{n_{k-1}}^{-1} \| = \| C_n \ldots C_{n_{k-1}-1} \| \leqslant q^{n - n_{k-1}},$$

$$\| D_{n_k} D_n^{-1} \| = \| C_{n_k} \ldots C_{n_i - 1} \| \leqslant q^{n_k - n_i}, \quad i < k, \tag{12}$$

для достаточно больших индексов n_k, n_i.

Для доказательства того, что $\max\limits_{n_{k-1} < n \leqslant n_k} \| D_{n_k}(S_n - S_{n_{k-1}}) \| \underset{k\to\infty}{\to} 0$ п. н., воспользуемся неравенством Леви для случайных элементов, принимающих значения в сепарабельных банаховых пространствах, которое рассматривалось в [3]. Получим

$$P\{ \max_{n_{k-1} < n \leqslant n_k} \| D_{n_k}(S_n - S_{n_{k-1}}) \| > \varepsilon \} \leqslant 2P\{ \| D_{n_k}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}}) \| > \varepsilon \}.$$

Поскольку для достаточно больших индексов n_i и n_k справедливы соотношения

$$\| D_{n_k} S_{n_k} \| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \| D_{n_k} D_{n_i}^{-1} \| \, \| D_{n_i}(S_{n_i} - S_{n_{i-1}}) \| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{k} q^{n_k - n_i} \| D_{n_i}(S_{n_i} - S_{n_{i-1}}) \|, \quad \left(\sum_{i=1}^{k} q^{-n_i} \right)^{-1} \geqslant \left(\sum_{j=1}^{k} q^{-j} \right)^{-1},$$

то, воспользовавшись леммой Теплица, получим $D_{n_k} S_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$ п. н.

Итак, в силу (11) последовательность $\{Y_n\}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел с последовательностью нормирующих операторов $\{D_n\}$.

Необходимость. Утверждение имеет место, поскольку

$$\| D_{n_k}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}}) \| \leqslant \| D_{n_k} S_{n_k} \| + \| D_{n_k} D_{n_{k-1}}^{-1} \| \| D_{n_{k-1}} S_{n_{k-1}} \|$$

и выполняется равенство (12) для достаточно больших индексов n_k.

Законы больших чисел в такой постановке рассматривались также в работах [4, 5, 6].

Изучим свойства многомерной гауссовской марковской последовательности $\{X_n\}$, построенной по m-марковской последовательности $\{\xi_k\}$, удовлетворяющей (1), (2).

Лемма 1. *Пусть имеет место* [2]. *Тогда последовательность* $\{X_n\}$ *такова, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| R_{nn-m} \| < 1$.

Доказательство. Пусть $2 \leqslant k \leqslant m$. Обозначим $r_{ij}^{(n,n-k)}$ элементы матрицы R_{nn-k}. В силу полугруппового свойства, которым обладают операторы R_{nn-1}, матрица R_{nn-k} имеет вид:

$$R_{nn-k} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & & \ldots & & 0 & 1 \\ r_{m-k+1\,1}^{(n,n-k)} & & \ldots & & & r_{m-k+1\,m}^{(n,n-k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m\,1}^{(n,n-k)} & & \ldots & & & r_{m\,m}^{(n,n-k)} \end{pmatrix}$$

Кроме того, поскольку $R_{nn-k} = R_{nn-k+1} R_{n-k+1\,n-k}$, то для всех $s = \overline{0, m-1}$ справедливы соотношения

$$r_{m-s\,1}^{(n,n-k)} = r_{m-s\,m}^{(n,n-k+1)} r_{m\,1}^{(n-k+1,n-k)}, \tag{13}$$

$$r_{m-s\,l}^{(n,n-k)} = r_{m-s\,l-1}^{(n,n-k+1)} + r_{m-s\,m}^{(n,n-k+1)} r_{m-s\,l}^{(n-k+1,n-k)}, \quad l \geqslant 2. \tag{14}$$

Покажем, что при выполнении условия (2)

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | r_{m-s\,l}^{(n,n-k)} | < m^{-1} (1 + m^{-1})^{k-s-1} \quad \forall s = \overline{0, k-1}; \qquad l = \overline{s+1, m}. \tag{15}$$

Пусть $k = 2$:

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | r_{ml}^{(n,n-2)} | < m^{-1} (1 + m^{-1}), \quad l \geqslant 3; \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | r_{m-1\,l}^{(n,n-2)} | < m^{-1}, \quad l \geqslant 1.$$

Предположим, что соотношение (15) справедливо для $k = r$. Тогда вследствие (14) $\lim\limits_{n\to\infty} | r_{m-s\,l}^{(n,n-r-1)} | < m^{-1} (1 + m^{-1})^{r-s}$, т. е. (15) справедливо для $k = r + 1$.

Далее покажем, что при выполнении условия (2) имеет место соотношение

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | r_{m-s\,l}^{(n,n-k)} | < m^{-2} (1 + m^{-1})^{k-l-s-1} [1 + (1 + m^{-1}) + \ldots + (1 + m^{-1})^{l-1}]$$
$$\forall\ k = \overline{2, m}; \qquad s = \overline{0, k-1}; \qquad l = \overline{1, s}. \tag{16}$$

Пусть $k = 2$. Тогда

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | r_{m1}^{(n,n-2)} | < m^{-2}, \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | r_{m-1\,1}^{(n,n-2)} | < m^{-2} (1 + m^{-1}).$$

Предположим, что $l \geqslant 2$. Пусть соотношение (16) справедливо для $k = r$. Тогда (16) справедливо и для $k = r + 1$. Действительно, поскольку для $l \geqslant 2$ справедливо соотношение (14), то

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | r_{m-s\,l}^{(n,n-r-1)} | < m^{-2} (1 + m^{-1})^{r-l-s} [1 + (1 + m^{-1}) + \ldots + (1 + m^{-1})^{l-1}].$$

Пусть $l = 1$. Предположим, что (16) справедливо для $k = r$. Вследствие равенства (13) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | r^{(n,n-r-1)}_{m-s\,1} | < m^{-2}(1+m^{-1})^{r-s}$.

В качестве нормы $R_{n\,n-m}$ рассмотрим

$$\| R_{n\,n-m} \| = \max_{s=\overline{0,m-1}} \sum_{l=1}^{m} | r^{(n,n-m)}_{m-s\,l} |.$$

Вследствие неравенств (15), (16)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{l=1}^{m} | r^{(n,n-m)}_{m-s\,l} | < \sum_{l=1}^{s-1} m^{-1}(1+m^{-1})^{m-l-s-1}\,[1+(1+m^{-1})+\ldots+(1+$$

$$+m^{-1})^{l-1}] + (m-s+1)\,m^{-1}(1+m^{-1})^{m-s-1} = 1 \ \ \forall\ s=\overline{0,m-1}.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| R_{nn-m} \| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{s=\overline{0,m-1}} \sum_{l=1}^{m} | r^{(n,n-m)}_{m-s\,l} | < 1.$$

В дальнейшем понадобится лемма, обобщающая известный критерий из [7].

Лемма 2. *Пусть $\{Y_n\}$ — гауссовская последовательность со значениями в R^m. Для того чтобы $Y_n \to 0$ п. н., достаточно, а в случае независимых случайных векторов и необходимо, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ сходился ряд*

$$\sum_{n} \exp\{-\varepsilon/\mathrm{Sp}\, MY_nY'_n\}.$$

Доказательство получаем применением леммы Бореля — Кантелли и экспоненциальных оценок для распределения нормы гауссовского вектора.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть гауссовская последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет стохастическому разностному уравнению* (1), *для которого выполняется* (2). *Необходимыми и достаточными условиями сходимости п. н. к нулю последовательности $\{\xi_n\}$ будут следующие*: 1) $D\xi_n \to 0$; 2) *для любой подпоследовательности $\{n_k\}$ последовательности натуральных чисел сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max_{n_{k-1}<n\leqslant n_k} \exp\{-\varepsilon/D\,\{\xi_n/\xi_{n_{k-1}}, \ldots, \xi_{n_{k-1}+m-1}\}\}.$$

Замечание. Достаточно, чтобы условие 2) выполнялось лишь для m подпоследовательностей, метод построения которых будет указан в доказательстве.

Достаточность. Будем различать три случая.

I. $\{X_n\}$ такова, что матрицы B_{nn} и R_{nn-1} не вырождены.

II. B_{nn}—невырожденные матрицы, но последовательность $\{R_{nn-1}\}$ содержит бесконечную подпоследовательность $\{R_{n_kn_k-1}\}$ вырожденных матриц.

III. Последовательности $\{R_{nn-1}\}$ и $\{B_{nn}\}$ содержат бесконечные подпоследовательности вырожденных матриц.

Рассмотрим случай I. Разобьем последовательность $\{X_n\}$ на m подпоследовательностей следующим образом: элемент X_n принадлежит подпоследовательности $\{X_{n_k^{(i)}}\}$ тогда и только тогда, когда существует целое j такое, что $n = jm + i$, $i = \overline{0,\ m-1}$; $\{n_k^{(i)}\}$ — строго возрастающие подпоследовательности последовательности натуральных чисел. Подпоследовательности $\{X_{n_k^{(i)}}\}$, $i = \overline{0, m-1}$, — марковские, и справедливы соотношения

$$X_{n_k^{(i)}} = R_{n_k^{(i)}n_1^{(i)}} \sum_{j=1}^{k} R^{-1}_{n_j^{(i)}n_1^{(i)}} \Lambda_{n_j^{(i)}} Z_{n_j^{(i)}}, \quad i=\overline{0, m-1}.$$

Кроме того,

$$R_{n_k^{(i)} n_1^{(i)}} = R_{n_k^{(i)} n_{k-1}^{(i)}} R_{n_{k-1}^{(i)} n_{k-2}^{(i)}} \dots R_{n_2^{(i)} n_1^{(i)}}.$$

Подпоследовательности $\{n_k^{(i)}\}$ строились таким образом, чтобы $n_k^{(i)} - n_{k-1}^{(i)} = m$, и вследствие леммы 1 для всех $i = \overline{0, m-1}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \| R_{n_k^{(i)} n_{k-1}^{(i)}} \| < 1. \tag{17}$$

Построим подпоследовательности подпоследовательностей $\{X_{n_k^{(i)}}\}$ следующим образом:

$$n_{kj}^{(i)} = \max \{ l : \| R^{-1}_{n_2^{(i)} n_1^{(i)}} \| \dots \| R^{-1}_{n_{kl}^{(i)} n_{kl-1}^{(i)}} \| \leqslant c^k \}.$$

Обозначим

$$T_{i,j} = R_{n_{kj}^{(i)} n_1^{(i)}} \sum_{s=n_{kj-1}^{(i)}}^{n_{kj}^{(i)}} R^{-1}_{n_s^{(i)} n_1^{(i)}} \Lambda_{n_s^{(i)}} Z_{n_s^{(i)}}.$$

Воспользуемся теоремой 1. Из этой теоремы следует, что при выполнении условия (2) условие

$$T_{i,j} \underset{j\to\infty}{\to} 0 \text{ п. н.}, \ i = \overline{0, m-1}, \tag{18}$$

гарантирует, что

$$X_{n_k^{(i)}} = R_{n_k^{(i)} n_1^{(i)}} \sum_{s=1}^{k} R^{-1}_{n_s^{(i)} n_1^{(i)}} \Lambda_{n_s^{(i)}} Z_{n_s^{(i)}} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \text{ п. н. } \forall \ i = \overline{0, m-1}.$$

Следовательно, в этом случае $X_n \to 0$ п. н., а значит, и $\xi_n \to 0$ п. н.

В силу леммы 2 достаточным условием для выполнения условия (18) является сходимость рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp \{ -\varepsilon / \mathrm{Sp}\, M T_{i,j} T'_{i,j} \} \ \forall \ i = \overline{0, m-1}. \tag{19}$$

Но, поскольку $M T_{i,j} T'_{i,j} = D \{ X_{n_{kj}^{(i)}} / X_{n_{kj-1}^{(i)}} \}$ и выполняется неравенство

$$\mathrm{Sp}\, D \{ X_{n_{kj}^{(i)}} / X_{n_{kj-1}^{(i)}} \} \leqslant m \max_{n_{kj-1} < n \leqslant n_{kj}} D \{ \xi_n / \xi_{n_{kj-1}^{(i)}}, \dots, \xi_{n_{kj-1}+m-1} \},$$

то условие 2) теоремы гарантирует сходимость рядов (19).

Рассмотрим случай II. В этом случае существует бесконечная последовательность номеров n_k, для которых матрицы $R_{n_k n_{k-1}}$ вырождены. По последовательности $\{Z_n\}$ строим новую гауссовскую марковскую последовательность $\{\tilde{X}_n\}$, которая имеет следующие характеристики:

$$\tilde{B}_{nn} = B_{nn}; \qquad \tilde{R}_{nn-1} = \begin{cases} R_{nn-1}, & \text{если } n \overline{\in} \{n_k\}, \\ R_{nn-1} + \varepsilon_n E, & \text{если } n \in \{n_k\}, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon_n \leqslant 1$, E — единичная матрица. Последовательность $\{\tilde{X}_n\}$ строится так, чтобы она удовлетворяла всем требованиям, налагаемым на последовательность $\{X_n\}$ в рассмотренном выше случае I и чтобы имела место сходимость $X_n - \tilde{X}_n \to 0$ п. н. Тогда условия теоремы обеспечивают сходимость $\tilde{X}_n \to 0$ п. н., а следовательно, и сходимость $X_n \to 0$ п. н.

Рассмотрим случай III. Обозначим через B_{nn}^{-1} обобщенную обратную матрицу к матрице B_{nn}, $R_{nn-1} = B_{nn-1} \hat{B}^{-1}_{n-1\, n-1}$. Разобьем последовательность $\{X_n\}$ на m подпоследовательностей так, чтобы элемент X_n принадлежал подпоследовательности $I_l = \{X_{n_k^{(l)}}\}$ тогда и только тогда, когда

$\dim(\operatorname{Ker} B_{nn})^{\perp} = l$, где $(\operatorname{Ker} B_{nn})^{\perp}$ — ортогональное дополнение к ядру оператора B_{nn}, $(\operatorname{Ker} B_{nn})^{\perp} = \operatorname{Im} B_{nn}$. Обозначим через $\overline{X}_{n_k^{(l)}}$ ортогональную проекцию вектора $X_{n_k^{(l)}}$ на подпространство $\operatorname{Im} B_{nn}$. Тогда $\overline{X}_{n_k^{(l)}} \underset{k\to\infty}{\to} 0$ п. н. тогда и только тогда, когда $X_{n_k^{(l)}} \to 0$ п. н. для любого $l = \overline{1,m}$. Из определения $\{\overline{X}_{n_k^{(l)}}\}$ следует, что $\overline{B}_{n_k^{(l)}n_k^{(l)}} = M\overline{X}_{n_k^{(l)}}\overline{X}'_{n_k^{(l)}}$ — невырожденные операторы. Таким образом, задача свелась к изучению случая II для каждой из подпоследовательностей. Выполнение условия 2) теоремы для m^2 специальным образом построенных подпоследовательностей гарантирует, что $X_n \to 0$ п. н.

Необходимость. Пусть $\xi_n \to 0$ п. н., а следовательно, и $X_n \to 0$ п. н. В силу теоремы из [8] $M \sup\limits_{n\geqslant 1} |\xi_n| < \infty$, следовательно, и $M \sup\limits_{n\geqslant 1} \times \times \|X_n\| < \infty$.

Далее воспользуемся теоремой 1 из [9], из которой при выполнении условия (19) следует, что $M\{X_n/\mathscr{F}_n\} \to 0$ п. н., где $\{\mathscr{F}_n\}$ — подпоследовательность σ-алгебр, порожденных случайными векторами $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$. Но последовательность $\{X_n\}$ марковская, поэтому $M\{X_n/\mathscr{F}_n\} = M\{X_n/X_{n-1}\}$, $X_n - M\{X_n/X_{n-1}\} \to 0$ п. н. и $X_n - M\{X_n/X_{n-1}\}$ — последовательность гауссовских независимых случайных величин. Теперь из леммы 2 получим, что для любой подпоследовательности $\{n_k\}$ сходится ряд

$$\sum_k \exp\{-\varepsilon/\operatorname{Sp} M(X_{n_k} - M\{X_{n_k}/X_{n_{k-1}}\})(X_{n_k} - M\{X_{n_k}/X_{n_{k-1}}\})'\} =$$

$$= \sum_k \exp\{-\varepsilon/\operatorname{Sp} D\{X_{n_k}/X_{n_{k-1}}\}\}.$$

Остается воспользоваться неравенством

$$\operatorname{Sp} D\{X_{n_k}/X_{n_{k-1}}\} \geqslant \max_{n_{k-1}<n\leqslant n_k} D\{\xi_n/\xi_{n_{k-1}}, \ldots, \xi_{n_{k-1}+m-1}\}.$$

Теорема доказана.

1. *Булдыгин В. В.* Усиленный закон больших чисел и сходимость к нулю гауссовских последовательностей.— В кн.: Теор. вероятн. и мат. статистика. Киев, 1978, вып. 19, с. 33—41.
2. *Мартикайнен А. И.* О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел.— Теор. вероятн. и ее применение, 1979, **24**, № 4, с. 814—820.
3. *Булдыгин В. В.* О неравенстве Леви для случайных величин со значениями в банаховом пространстве.— Теор. вероятн. и ее применение, 1979, **19**, № 1, с. 154—158.
4. *Ядренко О. М.* Усиленный закон больших чисел для случайных векторов при матричных нормировках.— В кн.: Вероятностный бесконечномерный анализ. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 116—120.
5. *Ядренко О. М.* Об усиленном законе больших чисел с матричными нормировками и условиях сходимости к нулю для одного класса гауссовских последовательностей.— В кн.: Некоторые вопросы теории случайных процессов. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 117—133.
6. *Ядренко О. М.* Усиленный закон больших чисел для случайных векторов при матричной нормировке.— В кн.: Тез. докл. III Вильнюсской конф. по теор. вероятн. и мат. статистике. Вильнюс, 1981, т. 2, с. 268—269.
7. *Вахания Н. Н.* Вероятностные распределения в бесконечномерных пространствах.— Тбилиси : Мецниереба, 1971.— 152 с.
8. *Скороход А. В.* Замечание о гауссовских мерах в банаховых пространствах.— Теор. вероятн. и ее применение, 1970, **15**, № 3, с. 519—520.
9. *Булдыгин В. В.* Уточнение предельных теорем для условных средних в банаховых пространствах и их приложения.— В кн.: Некоторые вопросы теории случайных процессов. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 10—24.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 12.04.83,
после переработки — 09.12.83