УДК 517.944

Г. П. Хома

Об аналитической зависимости решений гиперболических уравнений от параметра

Теорема Пуанкаре об аналитической зависимости решения от параметра относится к числу основных результатов аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В отдельных случаях она сама может являться источником вычислительных алгоритмов [1].

Заметим, что наиболее простое доказательство указанной теоремы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $dx/dt = f(t, x, \mu)$ приведено в работе [2].

В данной работе доказана аналогичная теорема для гиперболических уравнений в частных производных.

Рассмотрим на множестве $\Pi = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2_{x,t} : a \leqslant x \leqslant b,\ t \geqslant 0\}$, $-\infty < a < b < +\infty$, гиперболическую систему первого порядка

$$D_i u_i \equiv (\partial/\partial t + \lambda_i(x, t)\,\partial/\partial x)\, u_i = F_i(x, t, u_1, \ldots, u_m, \mu), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u_i(x, 0) = g_i(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{2}$$

где $\lambda_i(x, t)$, $g_i(x)$ — известные вещественные непрерывные функции, μ — комплексный параметр ($|\mu| \ll 1$).

Предположим, что через каждую точку $(x_0, t_0) \in \Pi$ проходит m действительных характеристик l_i системы (1) в сторону убывания t и характеристики l_i могут быть представлены с помощью функций $x = x_i(t; x_0, t_0)$, где $x_i(t; x_0, t_0)$ — решение уравнения характеристик $dx/dt = \lambda_i(x, t)$, $x(t_0) = x_0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через $\theta_i(x_0, t_0)$ наименьшее значение t для такого решения ($0 \leqslant \theta_i(x_0, t_0) \leqslant t_0$). Как известно [3, 4], задача Коши (1), (2) имеет единственное решение на ограниченном замкнутом множестве точек $(x, t) \in \Pi$, для которых $\theta_i(x, t) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В соответствии с этим введем обозначение $\Pi_g = \{(x, t) \in \Pi : \theta_i(x, t) = 0\ \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, m\}$.

Пусть $u(x, t, \mu_0) = (u_1(x, t, \mu_0), \ldots, u_m(x, t, \mu_0))$ — решение задачи Коши (1), (2), определенное на множестве Π_g, и пусть в области $\Omega = \{(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m, \mu) : (x, t) \in \Pi_g;\ |u_i - u_i(x, t, \mu_0)| < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ |\mu - \mu_0| < \Delta\}$ выполнены условия:

1) функции $F_i(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m, \mu)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, аналитические по переменным $x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m$ при фиксированных x, t, μ и по μ при фиксированных $x, t, u_1, \ldots, u_m$;

2) $\partial F_i/\partial u_j$ и $\partial F_i/\partial \mu$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, — непрерывные функции переменных $x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m, \mu$;

3) существует постоянная M такая, что $|F_i(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m, \mu)| \leqslant M$, $|\partial F_i/\partial u_j| \leqslant M$, $|\partial F_i/\partial \mu| \leqslant M$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, для всех $(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m, \mu) \in \Omega$;

4) функции $g_i(x)$ и $\lambda_i(x, t)$ удовлетворяют условиям существования непрерывного решения задачи Коши (1), (2).

Названные условия гарантируют существование и единственность непрерывного решения $u(x, t, \mu)$ задачи Коши (1), (2), а также непрерывную зависимость решения $u(x, t, \mu)$ от начальных значений и параметра [3—5].

Докажем, что решение $u(x, t, \mu)$ задачи Коши (1), (2) — аналитическая функция параметра μ на всем множестве Π_g в достаточно малой области $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$.

Действительно, существует $\varepsilon < \Delta$ такое, что все решения $\{u(x, t, \mu)\} = \{(u_1(x, t, \mu), \ldots, u_m(x, t, \mu))\}$ системы (1) для значений μ из круга $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ принадлежат рассматриваемой области $|u_i(x, t, \mu) - u_i(x, t, \mu_0)| < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть μ_1 — произвольная внутренняя точка круга $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$. Рассмотрим разностные соотношения

$$\Delta u_i/\Delta\mu = (u_i(x, t, \mu) - u_i(x, t, \mu_1))/\Delta\mu, \quad \Delta\mu = \mu - \mu_1, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Эти соотношения удовлетворяют линейной системе уравнений

$$D_i(\Delta u_i/\Delta\mu) = (1/\Delta u_1)[F_i(x,t,u_1(x,t,\mu),u_2(x,t,\mu),\ldots,u_m(x,t,\mu),\mu) -$$
$$- F_i(x,t,u_1(x,t,\mu_1),u_2(x,t,\mu),\ldots,u_m(x,t,\mu),\mu)](\Delta u_1/\Delta\mu) + \ldots$$
$$\ldots + (1/\Delta u_m)[F_i(x,t,u_1(x,t,\mu_1),\ldots,u_{m-1}(x,t\ \mu_1),u_m(x,t,\mu),\mu) -$$
$$- F_i(x,t,u_1(x,t,\mu_1),\ldots,u_{m-1}(x,t,\mu_1),u_m(x,t,\mu_1),\mu)](\Delta u_m/\Delta\mu) +$$
$$+ (1/\Delta\mu)[F_i(x,t,u_1(x,t,\mu_1),\ldots,u_{m-1}(x,t,\mu_1),u_m(x,t,\mu_1),\mu) -$$
$$- F_i(x,t,u_1(x,t,\mu_1),\ldots,u_{m-1}(x,t,\mu_1),u_m(x,t,\mu_1),\mu_1)],\quad (\Delta u_i/\Delta\mu)|_{t=0} = 0,$$
$$i = 1,2,\ldots,m,$$

непрерывное решение которой единственно, и при стремлении приращения $\Delta\mu$ по любому закону к нулю стремятся к единственному непрерывному решению линейной системы уравнений

$$D_iU_i = \sum_{j=1}^{m}(\partial F_i(x,t,u_1(x,t,\mu_1),\ldots,u_m(x,t,\mu_1),\mu_1)/\partial u_j)U_j +$$
$$+ \partial F_i(x,t,u_1(x,t,\mu_1),\ldots,u_m(x,t,\mu_1),\mu_1)/\partial\mu,\quad U_i|_{t=0} = 0,\quad i = 1,2,\ldots,m.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta\mu\to 0}(\Delta u_i/\Delta\mu) = U_i,\quad U_i(x,0,\mu_1) = 0,\quad i = 1,2,\ldots,m.$$

Отсюда следует, что непрерывное решение $u(x, t, \mu)$ системы (1) — аналитическая функция параметра μ в силу определения, данного Коши.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть выполнены условия* 1)—4).

Тогда непрерывное решение $u(x, t, \mu)$ *задачи Коши* (1), (2) *будет аналитической функцией параметра* μ *в окрестности значения* $\mu = \mu_0$.

З а м е ч а н и е. Так как квазилинейные гиперболические уравнения m-го порядка [6] могут быть сведены к эквивалентной системе первого порядка, то аналогичный результат можно установить и для квазилинейных уравнений m-го порядка. Например, задача Коши для волнового уравнения второго порядка

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t,u,u_t,u_x,\mu),\quad u|_{t=0} = \varphi(x),\quad u_t|_{t=0} = \chi(x)$$

эквивалентна соответствующей задаче Коши для гиперболической системы первого порядка

$$u_{it} + (-1)^i a u_{ix} = f(x,t,u,\ (u_1+u_2)/2,\ (u_1-u_2)/2a,\mu),$$
$$u_t = (u_1+u_2)/2,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x),\quad u_i|_{t=0} = \chi(x) + (-1)^{i-1}a\varphi'(x),\quad i = 1,2.$$

1. *Мосеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики.— М. : Наука, 1969.— 380 с.
2. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра.— Матем. сб., 1948, **22**, с. 193—204.
3. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными.— М. : Физматгиз, 1961.— 400 с.
4. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости.— Матем. сб., 1960, **50**, № 4, с. 423—442.
5. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* О смешанной задаче для почти линейной гиперболической системы на плоскости. Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, **20**, с. 87—104.
6. *Мельник З. О.* Об одной общей смешанной задаче.— Докл. АН СССР, 1964, **157**, № 5, с. 1039—1042.

Тернопол. пед. ин-т

Поступила в редакцию 22.11.82