УДК 519.21

А. В. Иванов

О состоятельности и асимптотической нормальности оценки наименьших модулей

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, $\mathscr{B}^n$ — σ-алгебра борелевских множеств R^n, $\Theta \subset R^p$ — открытое множество, $\{P_\theta^{(n)},\ \theta \in \Theta\}$ — семейство вероятностных мер на $(R^n, \mathscr{B}^n)$, отвечающих последовательности наблюдений

$$x_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

В записи (1) $g(j, \theta)$, $j = 1, \dots, n$, — последовательность функций, зависящих непрерывно и, возможно, нелинейно от параметра $\theta \in \Theta$, подлежащего оценке, ε_j — последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин с функцией распределения F, не зависящей от $\theta\in\Theta$. Положим $L_n(\theta)=\sum_{j=1}^{n}|x_j-g(j,\theta)|$. Оценкой наименьших модулей параметра $\theta\in\Theta$, полученной по наблюдению последовательности x_j, $j=1,\dots,n$, назовем $\mathscr{B}^n$-измеримое отображение $\theta_n:R^n\to\Theta^c$, для которого $L_n(\theta_n)=\inf\{L_n(\theta),\ \theta\in\Theta^c\}$, Θ^c — замыкание Θ.

Оценка θ_n — представитель класса оценок минимального контраста [1] и одновременно частный случай оценки метода минимизации эмпирического риска [2]. Если F — распределение Лапласа, то θ_n — оценка максимального правдоподобия, и методы, изложенные в [3], позволяют получить ряд свойств θ_n. В реальных задачах обработки наблюдений (1) распределение F неизвестно. В этом случае некоторые результаты о свойствах θ_n для моделей, в определенном смысле близких к (1), содержатся в работах [4, 5, 2] и др. Значительно большее внимание уделялось методам вычисления оценки θ_n [6].

Предлагаемая работа содержит теоремы о состоятельности θ_n и ее асимптотической нормальности. Пусть $d_n=d_n(\theta)$, $\theta\in\Theta$ — диагональная матрица порядка p с элементами d_{in}, $i=1,\dots,p$, на диагонали. Если $g(j,\theta)$, $j\geqslant 1$,— дифференцируемые функции, $d_{in}(\theta)=\left(\sum_{j=1}^{n}g_i^2(j,\theta)\right)^{1/2}$, $g_i=(\partial/\partial\theta_i)\,g$.

Обозначим $f(j,u)=g(j,\theta+n^{1/2}d_n^{-1}u)$, $\Psi_{kn}(u_1,u_2)=\sum_{j=1}^{n}|f(j,u_1)-f(j,u_2)|^k$, $k\geqslant 1$. При фиксированном $\theta\in\Theta$ функции $\Psi_{kn}(u_1,u_2)$ определены для u_1, $u_2\in U_n^c(\theta)$, $U_n(\theta)=n^{-1/2}d_n(\theta)(\Theta-\theta)$. Положим $s(\tau)=\{u\in R^p:|u|<\tau\}$, $E|\varepsilon_1|^k=\mu_k$. Пусть $E_\theta^{(n)}$ — усреднение по мере $P_\theta^{(n)}$, $K\subset\Theta$ — некоторый компакт. Буквами $\varkappa$ будем обозначать константы, зависящие от K. Везде ниже предполагается

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{\theta\in K}n^{-1/2}d_{in}(\theta)>0,\quad i=1,\dots,p.$$

Введем ряд условий.

M_s. $\mu_s<\infty$ для некоторого целого $s\geqslant 1$.

A_s. Для любого $R>0$ для $n>n_0$

$$\sup_{\theta\in K}\ \sup_{u\in U_n^c(\theta)\cap s^c(R)}\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}|f(j,u_1)-f(j,0)|\leqslant\varkappa_1(R),\quad s=1; \tag{2}$$

$$\sup_{\theta\in K}\ \sup_{u\in U_n^c(\theta)\cap s^c(R)} n^{-1}\Psi_{sn}(u,0)\leqslant\varkappa_s(R),\quad s\geqslant 2. \tag{3}$$

B. Для любых $\varepsilon>0$ и $R>0$ существует такое $\delta>0$, что для $n>n_0$

$$\sup_{\theta\in K}\ \sup_{\substack{u_1,u_2\in s^c(R)\cap U_n^c(\theta)\\ |u_1-u_2|\leqslant\delta}} n^{-1}\Psi_{1n}(u_1,u_2)\leqslant\varepsilon.$$

C. Для любого $r>0$ существует такое $\Delta(r)>0$, что для $n>n_0$

$$\inf_{\theta\in K}\ \inf_{u\in U_n^c(\theta)\setminus s(r)} n^{-1}E_\theta^{(n)}L_n(\theta+n^{1/2}d_n^{-1}u)\geqslant\mu_1+\Delta(r),$$

причем существует такое $R_0>0$, что $\Delta(R_0)=\rho_0\mu_1+\Delta_0$, $\rho_0>$, $\Delta_0>0$ — некоторые числа.

Обозначим $g_i(j,\theta+n^{1/2}d_n^{-1}u)=f_i(j,u)$, $i=1,\dots,p$.

D_1. Множество Θ выпукло. Функции $g(j,\theta)$, $j\geqslant 1$, непрерывны на Θ^c, непрерывно дифференцируемы в Θ, причем для любого $R>0$ для $n>n_0$

$$\sup_{\theta\in K}\ \sup_{u\in s(R)\cap U_n(\theta)} n^{1/2}d_{in}^{-1}(\theta)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|f_i(j,u)|\leqslant\varkappa^{(i)}(R),\quad i=1,\dots,p.$$

Из D_1 вытекают неравенства (2), (3) и неравенство, усиливающее B:

$$\sup_{\theta\in K}\ \sup_{u_1,u_2\in s^c(R)\cap U_n^c(\theta)} n^{-1}\Psi_{2n}(u_1,u_2)\,|u_1-u_2|^{-2}\leqslant\varkappa(R). \tag{4}$$

Обозначим $d_{iln}(\theta)=\left(\sum_{j=1}^{n}g_{il}^2(j,\theta)\right)^{1/2}$, $g_{il}=(\partial^2/\partial\theta_i\partial\theta_l)\,g$, $\Psi_{2n}^{(i)}(u_1,u_2)=$ $=\sum_{j=1}^{n}(f_i(j,u_1)-f_i(j,u_2))^2$, $i=1,\ldots,p$.

D_2. Множество Θ выпукло, функции $g_i(j,\theta)$, $i=1,\ldots,p$; $j\geqslant1$, непрерывны на Θ^c, непрерывно дифференцируемы в Θ, причем для любого $R>0$ для $n>n_0$

$$\sup_{\theta\in K}\ \sup_{u\in s(R)\cap U_n(\theta)} n^{1/2}d_{in}^{-1}(\theta)\,d_{ln}^{-1}(\theta)\,d_{iln}(\theta+n^{1/2}d_n^{-1}(\theta)\,u)\leqslant\varkappa^{(il)}(R),\ i,l=1,\ldots,p.$$

Применяя к функциям $n^{-1}\Psi_{2n}^{(i)}(u_1,u_2)$ формулу конечных приращений, из D_2 можно получить неравенства

$$\sup_{\theta\in K}\ \sup_{u_1,u_2\in s^c(R)\cap U_n^c(\theta)} d_{in}^{-2}\Psi_{2n}^{(i)}(u_1,u_2)\,|u_1-u_2|^{-2}\leqslant\varkappa^{(i)}(R),\quad i=1,\ldots,p. \tag{5}$$

Обозначим $\mathscr{I}_n(\theta)=\left(d_n^{-1}(\theta)\left(\sum_{j=1}^{n}g_i(j,\theta)\,g_k(j,\theta)\right)d_n^{-1}(\theta)\right)_{i,k=1}^{p}$, $\lambda_{\min}(\mathscr{I}_n(\theta))$ — наименьшее собственное число матрицы $\mathscr{I}_n(\theta)$.

G. $\varliminf_{n\to\infty}\inf_{\theta\in K}\lambda_{\min}(\mathscr{I}_n(\theta))>0$.

H. Случайная величина ε_1 обладает ограниченной плотностью $\varphi(x)=$ $=F'(x)$, удовлетворяющей условию $|\varphi(x)-\varphi(0)|\leqslant H|x|$, H — некоторая константа.

Теорема 1. *Если выполнены предположения* M_s, A_s, B и C, *то для любого* $r>0$

$$\sup_{\theta\in K}P_\theta^{(n)}\{|n^{-1/2}d_n(\theta)(\theta_n-\theta)|\geqslant r\}\leqslant\varkappa q_n(s),$$

где $q_n(s)=n^{-s+1}$, $s\geqslant2$, *и* $q_n(1)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Доказательство теоремы 1 мы не приводим; оно в определенной степени близко к [5].

Пусть l — произвольное направление в R^p, $\tau\in\Theta$. Тогда $\frac{\partial}{\partial l}L_n(\tau)=$ $=\sum_{j=1}^{n}(\nabla g(j,\tau),l)(2\chi\{x_j * g(j,\tau)\}-1)$, где $*$ означает $\leqslant$, если $(\nabla g(j,\tau),l)\geqslant0$, и $<$, если $(\nabla g(j,\tau),l)<0$. Пусть r_0 — расстояние между K и $R^p\setminus\Theta$. Если для $\theta\in K$ и $r<r_0$ осуществляется событие $\{|\theta_n-\theta|<r\}$, то для любого направления l $\frac{\partial}{\partial l}L_n(\theta_n)\geqslant0$. Этим замечанием мы воспользуемся при доказательстве теоремы 2. Обозначим C^p класс выпуклых борелевских множеств R^p, Φ_A — нормальное распределение в R^p с нулевым вектором средних и корреляционной матрицей A.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* M_s, C, D_1, D_2, G *и* H. *Тогда*

$$\sup_{\theta\in K}\sup_{C\in C^p}|P_\theta^{(n)}\{2\varphi(0)\,\mathscr{I}_n^{1/2}(\theta)\,d_n(\theta)(\theta_n-\theta)\in C\}-\Phi_{1_p}(C)|_{n\to\infty}\to0.$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть $l_1,\ldots,l_p$ — положительные направления координатных осей. Рассмотрим векторы $L_n^+(\tau)$ и $L_n^-(\tau)$ с координатами $L_{in}^+(\tau)=d_{in}^{-1}(\theta)\frac{\partial}{\partial l_i}L_n(\tau)$ и $L_{in}^-(\tau)=d_{in}^{-1}(\theta)\times$

$\times \frac{\partial}{\partial(-l)} L_n(\tau)$ соответственно и векторы $E_\theta^{(n)} L_n^+(\tau)$ и $E_\theta^{(n)} L_n^-(\tau)$ с координатами $E_\theta^{(n)} L_{in}^+(\tau) = \sum_{j=1}^{n} d_{in}^{-1}(\theta) g_i(j, \tau)(2F(g(j, \tau) - g(j, \theta)) - 1)$, $E_\theta^{(n)} L_{in}^-(\tau) = -E_\theta^{(n)} L_{in}^+(\tau)$. Очевидно, $E_\theta^{(n)} L_n^\pm(\theta) = 0$, $P_\theta^{(n)}\{L_n^+(\theta) \neq -L_n^-(\theta)\} = 0$. Обозначим $z_n^\pm(u) = |L_n^\pm(\theta + n^{1/2} d_n^{-1} u) - L_n^\pm(\theta) - E_\theta^{(n)} L_n^\pm(\theta + n^{1/2} d_n^{-1} u)|/(1 + |E_\theta^{(n)} L_n^\pm(\theta + n^{1/2} d_n^{-1} u)|)$.

Лемма 1. *В условиях теоремы 2 для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно малых $r > 0$*

$$\sup_{\theta \in K} P_\theta^{(n)}\{\sup_{u \in s(r) \cap U_n(\theta)} z_n^\pm(u) > \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{6}$$

Доказательство леммы 1 использует прием, предложенный в [7]. Будем считать, что $r = 1$, а супремум в (6) определяется в кубе $s_0(1) = \{u \in R^p : |u|_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |u_i| \leqslant 1\} \supset s(1)$. Куб $s_0(1)$ покроем $N_0 = O(\ln n)$ кубами $s_{(1)}, \dots, s_{(N_0)}$ следующим образом [7]. Пусть $q \in (0, 1)$. Построим концентрическую систему множеств $s^{(k)} = \{u : (1-q)^{k+1} \leqslant |u|_0 \leqslant (1-q)^k\}$, $k = 0, \dots, k_0 - 1$; $s^{(k_0)} = \{u : |u|_0 \leqslant (1-q)^{k_0}\}$. Каждое из множеств $s^{(k)}$ покроем одинаковыми кубами со стороной $d = (1-q)^k - (1-q)^{k+1} = q(1-q)^k$ и перенумеруем эти кубы. Они и образуют покрытие $s_{(1)}, \dots, s_{(N_0 - 1)}$, $s_{(N_0)} \overset{\mathrm{df}}{=} s^{(k_0)}$. Выберем $k_0 = k_0(n)$ из условия $(1-q)^{k_0} = n^{-\gamma}$, $\gamma \in (1/2, 1)$. Тогда $|\cdot|_0$-расстояние от $s_{(t)}$ до 0 есть $(1-q) n^{-\gamma k/k_0} = \rho_{(t)}$ при некотором $k = k(t)$ и $|\cdot|_0$-диаметр $s_{(t)}$ равен $q n^{-\gamma k/k_0} = d_{(t)}$, $t = 1, \dots, N_0 - 1$. Число множеств, покрывающих $s^{(k)}$, можно сделать независящим от k и, следовательно, от n. Поскольку $k_0 = O(\ln n)$, то и $N_0 = O(\ln n)$.

Для $z_n^+(u)$, например, получаем

$$P_\theta^{(n)}\{\sup_{u \in s_0(1)} z_n^+(u) > \varepsilon\} \leqslant P_\theta^{(n)}\{\sup_{u \in s_{(N_0)}} z_n^+(u) > \varepsilon\} + \sum_{t=1}^{N_0 - 1} P_\theta^{(n)}\{\sup_{u \in s_{(t)}} z_n^+(u) > \varepsilon\}. \tag{7}$$

Оценим каждое слагаемое в (7). Общий элемент матрицы-производной отображения $u \to n^{-1/2} E_\theta^{(n)} L_n^+(\theta + n^{1/2} d_n^{-1} u)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u_k} E_\theta^{(n)} L_{in}^+(\theta + n^{1/2} d_n^{-1} u) = d_{in}^{-1} d_{kn}^{-1} \sum_{j=1}^{n} [g_{ik}(j, \theta + n^{1/2} d_n^{-1} u) \times$$

$$\times (2F(f(j, u) - f(j, 0)) - 1) + 2f_i(j, u) f_k(j, u) \varphi(f(j, u) - f(j, 0)).$$

По условиям D_2, H и (4) сумма со вторыми производными мажорируется величиной $\varkappa_1 |u|$. С другой стороны, благодаря (4), (5) и H разность между оставшейся суммой и общим элементом матрицы $2\varphi(0)\, \mathcal{I}_n(\theta)$ также оценивается величиной $\varkappa_2 |u|$. Из условия G следует, что для достаточно малых u (пусть уже для $u \in s_0(1)$) при $n > n_0$

$$\inf_{\theta \in K} |E_\theta^{(n)} L_n^+(\theta + n^{1/2} d_n^{-1} u)| \geqslant \varkappa_3 n^{1/2} (u)_0. \tag{8}$$

Зафиксируем $t < N_0$ и выберем в $s_{(t)}$ произвольную точку v. Тогда

$$\sup_{u \in s_{(t)}} z_n^+(u) \leqslant (\sup_{u \in s_{(t)}} U_n^{(t)}(u) + V_n^{(t)})(1 + \varkappa_3 n^{1/2} \rho_{(t)})^{-1},$$

где

$$U_n^{(t)}(u) = \sum_{\lambda=1}^{4} U_{\lambda n}^{(t)}(u), \quad U_{1n}^{(t)}(u) = \left| \sum_{j=1}^{n} d_n^{-1} \nabla f(j, u)(\chi\{x_j * f(j, u)\} - \right.$$

$$\left. - \chi\{x_j < f(j, v)\}) \right|,$$

$$U_{2n}^{(t)}(u)=\left|\sum_{j=1}^{n} d_n^{-1}(\nabla f(j,u)-\nabla f(j,v))(2\chi\{x_j<f(j,v)\}-1)\right|,$$

$$U_{3n}^{(t)}(u)=2\left|\sum_{j=1}^{n} d_n^{-1}\nabla f(j,u)(F(f(j,u)-f(j,0))-F(f(j,v)-f(j,0))\right|,$$

$$U_{4n}^{(t)}(u)=\left|\sum_{j=1}^{n} d_n^{-1}(\nabla f(j,u)-\nabla f(j,v))(2F(f(j,v)-f(j,0))-1)\right|;$$

$$V_n^{(t)}=\left|\sum_{j=1}^{n}(\nabla f(j,v)(2\chi\{x_j<f(j,v)\}-1)-\nabla f(j,0)(2\chi\{\varepsilon_j*0\}-1)-\right.$$

$$\left.-\nabla f(j,v)(2F(f(j,v)-f(j,0))-1))\right|.$$

Из условия D_2 вытекает, что

$$\sup_{u\in s_{(t)}} n^{-1/2}U_{\lambda n}^{(t)}(u)\leqslant \varkappa_4 d_{(t)},\ \lambda=2,4. \tag{9}$$

Аналогично с помощью условий D_1 и H получаем

$$\sup_{u\in s_{(t)}} n^{-1/2}U_{3n}^{(t)}(u)\leqslant \varkappa_5 d_{(t)}. \tag{10}$$

Оценим $U_{1n}^{(t)}(u)$. Заметим, что для любых $u,\ v\in s_{(t)}$

$$|\chi\{x_j*f(j,u)\}-\chi\{x_j<f(j,v)\}|\leqslant\chi\{\inf_{u\in s_{(t)}} f(j,u)-f(j,0)\leqslant\varepsilon_j\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{u\in s_{(t)}} f(j,u)-f(j,0)\}=\chi_j.$$

Следовательно, по условию D_1

$$\sup_{u\in s_{(t)}} n^{-1/2}U_{1n}^{(t)}(u)\leqslant\sup_{u\in s_{(t}} n^{-1/2}\left[\sum_{i=1}^{p}(d_{in}^{-1}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|f_i(j,u)|)^2\right]^{1/2}\sum_{j=1}^{n}\chi_j\leqslant\varkappa_6 n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\chi_j.$$

С другой стороны, благодаря условиям H и D_1

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n}E_\theta^{(n)}\chi_j\leqslant\varkappa_7 n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\sup_{u_1,u_2\in s_{(t)}}|f(j,u_1)-f(j,u_2)|\leqslant\varkappa_8 d_{(t)}. \tag{11}$$

Оценки (9), (10) и (11) показывают, что существуют такие константы $\varkappa_9$ и $\varkappa_{10}$, что

$$P_\theta^{(n)}\left\{\sup_{u\in s_{(t}} U_n^{(t)}(u)(1+\varkappa_3 n^{1/2}\rho_{(t)})^{-1}>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P_\theta^{(n)}\left\{\varkappa_9 n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(\chi_j-E_\theta^{(n)}\chi_j)>\frac{\varepsilon}{2}\rho_{(t)}-\varkappa_{10}d_{(t)}\right\}. \tag{12}$$

Заметим, что $(\varepsilon/2)\,\rho_{(t)}-\varkappa_{10}d_{(t)}>0$, если q достаточно мало. Поэтому вероятность (12) по неравенству Чебышева и (11) оценивается величиной

$$\varkappa_{11}n^{-2+2\gamma k/k_0}\sum_{j=1}^{n}E_\theta^{(n)}\chi_j\leqslant\varkappa_{12}n^{-1+\gamma k/k_0}. \tag{13}$$

Нетрудно увидеть, что

$$P_\theta^{(n)}\{V_n^{(t)}(1+\varkappa_3 n^{1/2}\rho_{(t)})^{-1}>\varepsilon/2\}\leqslant\varkappa_{13}n^{-1}\rho_{(t)}^{-2}\sum_{i=1}^{p}d_{in}^{-2}\left(\Psi_{2n}^{(t)}(v,0)+\right.$$

$$\left.+4\sum_{j=1}^{n}f_i(j,v)f_i(j,0)|F(f(j,v)-f(j,0))-F(0)|\right). \tag{14}$$

В соответствии с (5)

$$n^{-1}\rho_{(t)}^{2}d_{in}^{-2}\Psi_{2n}^{(i)}(v,0)\leqslant \varkappa_{14}n^{-1}\rho_{(t)}^{-2}(\rho_{(t)}+d_{(t)})^{2}=\varkappa_{14}(1-q)^{-2}n^{-1},\quad i=1,\ldots,p. \tag{15}$$

Вторая сумма в (14) оценивается по D_1 и H величиной

$$\varkappa_{15}n^{-1}\rho_{(t)}^{-2}(n^{-1}\Psi_{2n}(v,0))^{1/2}\leqslant \varkappa_{16}n^{-1}\rho_{(t)}^{-2}(\rho_{(t)}+d_{(t)})=\varkappa_{16}(1-q)^{-2}n^{-1+\gamma k/k_0}. \tag{16}$$

Оценки (13), (15) и (16) показывают, что для $t=1,\ldots,N_0-1$ и $k=k(t)$

$$\sup_{\theta\in K}P_{\theta}^{(n)}\{\sup_{u\in s_{(t)}}z_n^{+}(u)>\varepsilon\}=O(n^{-1+\gamma k/k_0}). \tag{17}$$

Аналогично (17) можно получить неравенство

$$\sup_{\theta\in K}P_{\theta}^{(n)}\{\sup_{u\in s_{(N_0)}}z_n^{+}(u)>\varepsilon\}\leqslant\sup_{\theta\in K}P_{\theta}^{(n)}\{\sup_{|u|_0<n^{-\gamma}}|L_n^{+}(\theta+n^{1/2}d_n^{-1}u)-$$

$$-L_n^{+}(\theta)-E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\theta+n^{1/2}d_n^{-1}u)|>\varepsilon\}\leqslant\varkappa_{17}n^{-\gamma}. \tag{18}$$

Неравенства, аналогичные (7), (17) и (18), верны и для L_n^{-}.

Положим $E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\theta_n)=E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\tau)|_{\tau=\theta_n}$.

Лемма 2. *В условиях теоремы 2*

$$\sup_{\theta\in K}P_{\theta}^{(n)}\{|L_n^{+}(\theta)+E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\theta_n)|>\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{19}$$

Доказательство. Введем события

$$A_{in}^{\pm}=\{L_{in}^{\pm}(\theta)+E_{\theta}^{(n)}L_{in}^{\pm}(\theta_n)-L_{in}^{\pm}(\theta_n)\geqslant-\varepsilon(1+|E_{\theta}^{(n)}L_n^{\pm}(\theta_n)|)\},$$
$$i=1,\ldots,p.$$

Из леммы 1 и состоятельности θ_n вытекает, что

$$\inf_{\theta\in K}P_{\theta}^{(n)}\{A_{in}^{\pm}\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1,\ i=1,\ldots,p. \tag{20}$$

Поскольку для $n>n_0$ $L_{in}^{\pm}(\theta_n)\geqslant 0$, то соотношения (20) верны и для событий

$$B_{in}^{\pm}=\{L_{in}^{\pm}(\theta)+E_{\theta}^{(n)}L_{in}^{\pm}(\theta_n)\geqslant-\varepsilon(1+|E_{\theta}^{(n)}L_n^{\pm}(\theta_n)|)\}\supseteq A_{in}^{\pm}.$$

События B_{in}^{-} равновероятны событиям

$$C_{in}^{+}=\{L_{in}^{+}(\theta)+E_{\theta}^{(n)}L_{in}^{+}(\theta_n)\leqslant\varepsilon(1+|E_{\theta}^{(n)}L_n^{\pm}(\theta_n)|)\}.$$

Получаем далее

$$B_{in}^{+}\cap C_{in}^{+}\subseteq D_{in}^{+}=\{|E_{\theta}^{(n)}L_{in}^{+}(\theta_n)|-|L_{in}^{+}(\theta)|\leqslant\varepsilon(1+|E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\theta_n)|)\},$$
$$i=1,\ldots,p;$$

$$\bigcap_{i=1}^{p}D_{in}^{+}\subseteq\left\{\sum_{i=1}^{p}|E_{\theta}^{(n)}L_{in}^{+}(\theta_n)|-\sum_{i=1}^{n}|L_{in}^{+}(\theta)|\leqslant p\varepsilon(1+|E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\theta_n)|)\right\}\subseteq$$
$$\subseteq\{(1-p\varepsilon)|E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\theta_n)|\leqslant p\varepsilon+\sqrt{p}\,|L_n^{+}(\theta)|\}.$$

Из последнего включения следует, что для $n>n_0$

$$\sup_{\theta\in K}P_{\theta}^{(n)}\{|E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\theta_n)|>\rho\}\xrightarrow[\rho\to\infty]{}0. \tag{21}$$

Из (21) и предыдущих рассуждений следует (19).

Лемма 3. *В условиях теоремы 2 для любого* $\varepsilon>0$

$$\sup_{\theta\in K}P_{\theta}^{(n)}\{|E_{\theta}^{(n)}L_n^{+}(\theta_n)-2\varphi(0)\mathscr{I}_n(\theta)d_n(\theta)(\theta_n-\theta)|>\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{22}$$

Доказательство. Из состоятельности θ_n, оценки (8) и (21) следует, что для $n > n_0$

$$\sup_{\theta \in K} P_\theta^{(n)} \{| d_n(\theta)(\theta_n - \theta)| > \rho\} \xrightarrow[\rho \to \infty]{} 0. \tag{23}$$

Утверждение леммы получаем из (23) и рассуждений, предшествовавших (8).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* D_1 *и* G. *Тогда для* $n > n_0$

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{C \in C^p} | P_\theta^{(n)} \{L_n^+(\theta) \in C\} - \Phi_{\mathcal{I}_n(\theta)}(C)| \leqslant \varkappa_{18} n^{-1/2}. \tag{24}$$

Доказательство. Положим $L_n^+(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n x_{jn}$, где $x_{jn} = (n^{1/2} d_{in}^{-1}(\theta) g_i(j, \theta)(2\chi\{\varepsilon_j * 0\} - 1))_{i=1}^p$, $j = 1, \ldots, n$. Матрица $\mathcal{I}_n(\theta)$ является корреляционной матрицей суммы $n^{-1/2} \sum_{j=1}^n x_{jn}$. По условию D_1 равномерно по $\theta \in K$

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n E_\theta^{(n)} | x_{jn} |^3 \leqslant p^{3/2} \sum_{i=1}^p n^{-1} \sum_{j=1}^n d_{in}^{-3} | g_i(j, \theta)|^3 n^{3/2} \leqslant \varkappa_{19} < \infty.$$

Таким образом, (24) вытекает из следствия 17.2 в работе [8, с. 165].

Докажем теорему 2. Неравенство (24) эквивалентно неравенству

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{C \in C^p} | P_\theta^{(n)} \{\mathcal{I}_n^{-1/2}(\theta) L_n^+(\theta) \in C\} - \Phi_{1_p}(C)| \leqslant \varkappa_{18} n^{-1/2}. \tag{25}$$

Из (19), (22), (25) и условия G следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и $C \in C^p$

$$-\Delta_n + \Phi_{1_p}(C_{-\varepsilon}) \leqslant P_\theta^{(n)} \{2\varphi(0) \mathcal{I}_n^{1/2}(\theta) d_n(\theta)(\theta_n - \theta) \in C\} \leqslant \Delta_n + \Phi_{1_p}(C_\varepsilon), \tag{26}$$

где C_ε и $C_{-\varepsilon}$ — внешнее и внутреннее множества, параллельные C, $\Delta_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ равномерно по $C \in C^p$ и $\theta \in K$. Утверждение теоремы следует из (26) и неравенства из [8, с. 24].

1. *Pfanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates.— Metrika, 1969, 14, N 2, p. 249—272.
2. *Цыбаков А. Б.* Оценки точности метода минимизации эмпирического риска.— Проблемы передачи информации, 1981, 17, № 1, с. 50—61.
3. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания.— М. : Наука, 1979.— 527 с.
4. *Bassel G., Koenker R.* Asymptotic theory of least absolute error regression.— J. Amer. Stat. Assoc., 1978, 73, N 363, p. 618—622.
5. *Иванов А. В., Козлов О. М.* О состоятельности оценок минимального контраста в случае разнораспределенных наблюдений.— Теория вероятн. и мат. статистика, 1980, N 23, с. 59—68.
6. *Bloomfeld P., Steiger W.* Least absolute deviations curve — fitting.— SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1980, 1, N 2, p. 290—301.
7. *Huber P. J.* The behavior of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions.— In: Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. University of California Press, 1967, v. 1, p. 221—234.
8. *Bhattacharya R. N., Ranga Rao R.* Normal approximation and asymptotic expansions.— N. Y. : Wiley, 1976.— 274 p.

Ин-т киберн. АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 18.01.83