УДК 513.5

Н. А. Давыдов

Критерии суммируемости расходящейся последовательности к крайней точке ее ядра регулярной положительной матрицей

1. Пусть $A=((a_{nk}))$, $n, k=0, 1, 2, \ldots,$ — бесконечная матрица и $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность комплексных чисел. Говорят [1, с. 62], что последовательность $\{z_k\}$ суммируется матрицей A к числу z, если ряды

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z_k \tag{1}$$

сходятся для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = z$. Матрица A называется регулярной [1, с. 62], если она суммирует каждую сходящуюся последовательность к ее пределу.

Если регулярная положительная матрица A суммирует к числу z некоторую расходящуюся последовательность $\{z_k\}$, то по известной теореме Кноппа [2, с. 162] z принадлежит ядру последовательности $\{z_k\}$. Точка ζ называется крайней точкой ядра расходящейся последовательности $\{z_k\}$, если она не является внутренней точкой никакого отрезка прямой, целиком лежащего в ядре этой последовательности.

2. Справедливы следующие предложения.

Теорема 1. *Для того чтобы регулярная положительная матрица $A = ((a_{nk}))$ суммировала хотя бы одну расходящуюся последовательность к крайней точке ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \max_{0\leqslant n<\infty} a_{nk} = 0. \tag{2}$$

Эту теорему можно сформулировать иначе: для того чтобы регулярная положительная матрица $A = ((a_{nk}))$ не суммировала ни одной расходящейся последовательности к крайней точке ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{k\to\infty} \max_{0\leqslant n<\infty} a_{nk} > 0. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $A = ((a_{nk}))$ — регулярная положительная матрица, $\{z_k\}_0^\infty$ — расходящаяся последовательность комплексных чисел, ядро которой имеет по крайней мере одну крайнюю точку, и пусть ряды* (1) *сходятся для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Для того чтобы матрица $A = ((a)_{nk})$ суммировала последовательность $\{z_k\}$ к крайней точке ζ ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы точка ζ была единственным A-частичным пределом второго рода этой последовательности.*

Определение A-частичного предела первого и второго рода последовательности $\{z_k\}$ см. в [5, с. 31].

Теорема 3. *Если регулярная положительная матрица $A=((a_{nk}))$ суммирует расходящуюся последовательность $\{z_k\}_0^\infty$ к крайней точке ζ ее ядра, то для любого $\delta>0$ в δ-окрестность точки ζ попадают члены $z_{k_i^{(\delta)}}$, $i=1,2,\ldots,$ причем*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} z_{k_i^{(\delta)}} = \zeta. \tag{4}$$

Теорема 4. *Для того чтобы регулярная положительная матрица $A=((a_{nk}))$ суммировала расходящуюся ограниченную последовательность $\{z_k\}_0^\infty$ к крайней точке ζ ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta>0$ в ζ-окрестность точки ζ попадали члены $z_{k_i^{(\delta)}}$, $i = 1, 2, \ldots,$*

причем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} = 1. \tag{5}$$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $A = ((a_{nk}))$ — регулярная положительная матрица и пусть выполнено условие (2). Тогда из леммы [3, с. 29] следует существование такой возрастающей последовательности целых неотрицательных чисел p_i, $i = 1, 2, \ldots$, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i} \to 0$; $n \to \infty$.

Возьмем последовательность

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{если } k \in \{0, 1, \ , \ldots\} \setminus \{p_i\}. \end{cases}$$

Ясно, что эта расходящаяся последовательность суммируется матрицей A к нулю, т. е. к крайней точке ее ядра. Достаточность доказана. Пусть регулярная положительная матрица $A = ((a_{nk}))$ суммирует по крайней мере одну расходящуюся последовательность к крайней точке ее ядра. Пусть этой последовательностью будет $\{z_k\}_0^{\infty}$ и ζ — крайняя точка ее ядра. Тогда ряды (1) сходятся для каждого $n = 0, 1, \ , \ldots$ и $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}z_k = \zeta$. Так как ζ — крайняя точка ядра последовательности $\{z_k\}$, то это ядро, будучи замкнутым выпуклым множеством, принадлежит некоторой замкнутой полуплоскости, граница которой проходит через точку ζ. Ядро будет отличным как от этой полуплоскости, так и от полосы, на границе которой лежит точка ζ (в частности, от прямой, проходящей через точку ζ). Поэтому существует угол $A\zeta B$ с вершиной в точке ζ раствора α, $\alpha < \pi$, такой, что точки z_k, находящиеся от точки ζ на достаточно большом расстоянии, будут в этом угле. С помощью преобразования

$$w = (z - \zeta)\exp(i\varphi), \tag{6}$$

где φ — некоторое действительное число, угол $A\zeta B$ преобразуется в угол $A'OB'$ того же раствора α с вершиной в начале координат и расположенный симметрично относительно действительной оси. Последовательность $\{z_k\}$ преобразуется при этом в последовательность

$$w_k = (z_k - \zeta)\exp(i\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}w_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(z_k - \zeta)\exp(i\varphi) = \exp(i\varphi)\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}z_k - \exp(i\varphi)\,\zeta\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \tag{8}$$

в силу сходимости рядов (1) сходятся для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Расходящаяся последовательность $\{w_k\}_0^{\infty}$ суммируется матрицей A к нулю, причем нуль — крайняя точка ее ядра. Тогда $u_k = \operatorname{Re} w_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — расходящаяся последовательность, суммируемая матрицей A к нулю, причем нуль — нижний предел этой последовательности. Без ограничения общности можем считать $u_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}u_k = 0$. Действительно, если существуют члены $u_{k_i} < 0$, $i = 1, 2, \ldots$, рассмотрим последовательность

$$u'_k = \begin{cases} u_k, & \text{если } k \neq k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{если } k = k_i, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Так как $0 \leqslant u'_k - u_k \to 0$, $k \to \infty$, то последовательность $\{u'_k\}$ расходится и суммируется матрицей A к нулю. Итак, расходящаяся последовательность неотрицательных действительных чисел $\{u_k\}_0^{\infty}$ суммируется матрицей A к нижнему пределу этой последовательности, равному нулю. Предположим, что условие (2) для матрицы A не выполнено. Тогда для $k > k_0$ будут справедливы неравенства

$$\max_{0\leqslant n<\infty} a_{nk} = a_{n_k k} \geqslant \alpha > 0, \tag{9}$$

где $\{n_k\}$ — некоторая последовательность целых неотрицательных чисел (не обязательно монотонная). Убедимся в том, что $n_k \to \infty$, $k \to \infty$. Если бы это было не так, то существовала бы ограниченная последовательность $\{n_{k_\nu}\}_1^\infty$, $n_{k_\nu} \leqslant N$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Тогда на одной из строк матрицы A для $n \in [0, N]$ (пусть в строке $n_0 \in [0, N]$) было бы бесконечное множество элементов $a_{n_{k_{\nu_i}} k_{\nu_i}}$, $i = 1, 2, \ldots$, бóльших или равных $\alpha > 0$, что противоречит регулярности матрицы A. Итак, $n_k \to \infty$, $k \to \infty$. Так как $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k \to 0$, $n \to \infty$ и $n_k \to \infty$, $k \to \infty$, то $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n_k \nu} u_\nu \to 0$, $k \to \infty$. При $k \to \infty$ $0 \leftarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n_k \nu} u_\nu \geqslant a_{n_k k} u_k \geqslant \alpha u_k \geqslant 0$, $k > k_0$. Отсюда $u_k \to 0$, $k \to \infty$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия (2). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Регулярная положительная матрица* $A = ((a_{nk}))$, *удовлетворяющая условию* (3), *не суммирует ни одной неограниченной последовательности, все члены которой содержатся в замкнутом угле раствора* α, $\alpha < \pi$.

Следствие 2. *Если регулярная положительная матрица* $A = ((a_{nk}))$, *удовлетворяющая условию* (3), *суммирует действительную расходящуюся ограниченную последовательность, то эта матрица из неограниченных действительных последовательностей может суммировать только неограниченные сверху и снизу действительные последовательности.*

Справедливость следствия 2 вытекает из следствия 1 и известной теоремы Мазура—Орлича [2, с. 375].

4. Доказательство теоремы 2. Здесь нам понадобится лемма.

Лемма. *Пусть* $A = ((a_{nk}))$ — *положительная матрица, для которой* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \leqslant H$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $\{z_k\}_0^\infty$ — *расходящаяся последовательность комплексных чисел, ядро которой имеет по крайней мере одну крайнюю точку. Тогда из сходимости рядов* (1) *для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *следует их абсолютная сходимость для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство леммы. Если $\{z_k\}$ — ограниченная последовательность, то ряды (1) будут сходится абсолютно. Предположим, что $\{z_k\}$ — неограниченная последовательность и ζ — крайняя точка ее ядра $R(z)$. Тогда существует угол $A\zeta B$ с вершиной в точке ζ раствора α, $\alpha < \pi$, такой, что точки z_k, отстоящие от точки ζ на достаточно большом расстоянии, будут находиться в этом угле. С помощью преобразования (6) угол $A\zeta B$ преобразуется в угол $A'OB'$ того же раствора α с вершиной в начале координат, расположенный в правой полуплоскости симметрично относительно действительной оси. Последовательность $\{z_k\}$ преобразуется в последовательность $\{w_k\}$ (7). Ряды (8), в силу сходимости рядов (1), сходятся для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Для расходящейся последовательности $\{w_k\}$ нуль будет крайней точкой ядра этой последовательности. Тогда $u_k = \operatorname{Re} w_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, будет действительной неограниченной последовательностью, причем нуль будет ее нижним пределом. Если у последовательности $\{u_k\}$ есть отрицательные члены $u_{k_i} < 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то, рассмотрев последовательность

$$u'_k = \begin{cases} u_k, & \text{если } k \neq k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{если } k = k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

получим $0 \leqslant u'_k - u_k \equiv \alpha_k \to 0$, $k \to \infty$. Из сходимости рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k$ следует сходимость рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u'_k$, $u'_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots$, и, следовательно, ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k$ сходятся абсолютно. Те точки w_k, которые попадают в R-окрестность бесконечно удаленной точки (пусть это будут точки $w_{k_i^{(R)}}$, $i = 1, 2, \ldots$) при достаточно большом $R > 0$ будут находиться в угле A'OB'. Поэтому $|v_{k_i^{(R)}}| = |\operatorname{Im} w_{k_i^{(R)}}| \leqslant u_{k_i^{(R)}} \operatorname{tg} \alpha/2$, $i = 1, 2, \ldots$,

и, следовательно, ряды $\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(R)}} w_{k_i^{(R)}}$ сходятся абсолютно. Ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n\mu_i^{(R)}} w_{\mu_i^{(R)}}, \ \mu_i^{(R)} = \{0, 1, 2, \ldots\} \diagdown \{k_i^{(R)}\},$$

также сходятся абсолютно, так как $|w_{\mu_i^{(R)}}| \leqslant R$, $i = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует абсолютная сходимость рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} w_k$. Но тогда сходятся абсолютно и ряды (1) для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Лемма доказана.

В силу леммы из сходимости рядов (1) для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ следует их абсолютная сходимость. Если крайняя точка ζ ядра последовательности $\{z_k\}$ — единственный A-частичный предел второго рода, то по следствию 1 теоремы 1 из [5] последовательность $\{z_k\}$ будет суммироваться матрицей A к числу ζ. Достаточность условий теоремы доказана. Докажем необходимость. Пусть последовательность $\{z_k\}$ суммируется матрицей A к крайней точке ее ядра. Существует угол AζB с вершиной в точке ζ раствора α, $\alpha < \pi$, такой, что точки z_k, находящиеся от точки ζ на достаточно большом расстоянии, будут в этом угле. С помощью преобразования вида (6) угол AζB преобразуется в угол A'OB' того же раствора α с вершиной в начале координат в плоскости (w), расположенный симметрично относительно действительной оси. Последовательность $\{z_k\}$ при этом преобразуется в расходящуюся последовательность (7). Ряды (8), в силу абсолютной сходимости рядов (1), будут сходиться абсолютно для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, и последовательность $\{w_k\}$ суммируется матрицей A к нулю, причем нуль — крайняя точка ядра этой последовательности. Записав числа w_k в алгебраической форме, $w_k = u_k + iv_k$, убедимся в том, что действительная расходящаяся последовательность $\{u_k\}$ суммируется матрицей A к нулю, причем $\varliminf_{k \to \infty} u_k = 0$. Без ограничения общности можем считать $u_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots$. Пусть $O(0, \delta)$ — δ-окрестность точки нуль и пусть в эту окрестность попадают члены $u_{k_i^{(\delta)}}$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} u_{k_i^{(\delta)}} + \sum a_{nm_i^{(\delta)}} u_{m_i^{(\delta)}}$, где $\{m_i^{(\delta)}\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \diagdown \{k_i^{(\delta)}\}$. Отсюда при $n \to \infty$ $0 \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k \geqslant \sum_i a_{nm_i^{(\delta)}} u_{m_i^{(\delta)}} \geqslant \delta \sum_i a_{nm_i^{(\delta)}} \geqslant 0$ и, следовательно, при $n \to \infty$

$$\sum a_{nm_i^{(\delta)}} \to 0, \tag{10}$$

$$\sum_i a_{nm_i^{(\delta)}} u_{m_i^{(\delta)}} \to 0, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} u_{k_i^{(\delta)}} \to 0. \tag{12}$$

В силу регулярности матрицы А справедливо равенство $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} = 1$. Из (10) следует утверждение, что каждый конечный частичный предел последовательности $\{w_k\}$, отличный от нуля, является ее А-частичным пределом первого рода.

Если последовательность $\{z_k\}$ (а значит, и последовательность $\{w_k\}$) не ограничена, то точки w_k, попавшие в достаточно малую R-окрестность $O(\infty, R) = \{w : |w| > R)$ бесконечно удаленной точки, будут содержаться в угле A'OB' и, так как ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} w_k$ сходятся абсолютно, то из (12) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(R)}} w_{k_i^{(R)}} = 0, \tag{13}$$

где $\{w_{k_i^{(R)}}\} \subset \{w_{m_i^{(k)}}\}$, $w_{k_i^{(R)}} \in \angle A'OB'$, $|w_{k_i^{(R)}}| > R > \delta$, $i = 1, 2, \ldots$.

Действительно, из (12) следует равенство $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(R)}} u_{k_i^{(R)}} = 0$. Отсюда и из неравенства $|v_{k_i^{(R)}}| \leqslant u_{k_i^{(R)}} \operatorname{tg}\alpha/2$, $i = 1, 2, \ldots$, получаем $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(R)}} v_{k_i^{(R)}} = 0$, и равенство (13) доказано.

Из (10) следует $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(R)}} = 0$. Из этого предела и из (13) вытекает, что бесконечно удаленная точка является A-частичным пределом первого рода последовательности $\{w_k\}$. Таким образом, точка нуль — единственный A-частичный предел второго рода последовательности $\{w_k\}$, а точка ζ — единственный A-частичный предел второго рода последовательности $\{z_k\}$. Теорема доказана.

5. Доказательство теорем 3 и 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда по теореме 2 точка ζ будет единственным A-частичным пределом второго рода последовательности $\{z_k\}$. Пусть $z_{m_i^{(\delta)}}$, $i = 1, 2, \ldots$, — все те члены последовательности $\{z_k\}$, которые отстоят от точки ζ на расстоянии больше или равном $\delta > 0$. Так как точка ζ — единственный A-частичный предел второго рода последовательности $\{z_k\}$, то все другие частичные пределы этой последовательности (а значит, и все частичные пределы последовательности $\{z_{m_i^{(\delta)}}\}$ будут A-частичными пределами первого рода. Легко видеть (см. доказательство теоремы 1 из [5]), что

$$\sum_i a_{nm_i^{(\delta)}} \to 0, \quad \sum_i a_{nm_i^{(\delta)}} z_{m_i^{(\delta)}} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Так как ряды (1) сходятся абсолютно, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z_k = \sum_i a_{nk_i^{(\delta)}} z_{k_i^{(\delta)}} + \sum a_{nm_i^{(\delta)}} z_{m_i(\delta)}.$$

Отсюда и из (14), в силу суммируемости к числу ζ последовательности $\{z_k\}$ матрицей А, вытекает справедливость равенств (4). Теорема 3 доказана.

Если последовательность $\{z_k\}$ ограничена, то из теоремы 3 вытекает справедливость равенства (5), если последовательность $\{z_k\}$ суммируется матрицей А к крайней точке ζ ее ядра. Легко видеть, что справедливо обратное утверждение: если для любого $\delta > 0$ в δ-окрестность крайней точки ζ ядра ограниченной расходящейся последовательности $\{z_k\}$ попадают члены

$z_{k_i^{(\delta)}}$, причем выполнено равенство (5), то последовательность $\{z_k\}$ суммируется матрицей A к этой крайней точке.

Действительно, зададимся числом $\delta > 0$, тогда в δ-окрестность точки ζ попадут члены $z_{k_i^{(\delta)}}$, причем справедливо равенство (5). Заметив, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1 + \alpha_n$, где $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z_k - \zeta\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} z_{k_i^{(\delta)}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{nm_i^{(\delta)}} z_{m_i^{(\delta)}} - \zeta\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \alpha_n\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} |z_{k_i^{(\delta)}} - \zeta| + \sum_{i=1}^{\infty} a_{nm_i^{(\delta)}} |z_{m_i^{(\delta)}} - \zeta| + o(1) \leqslant \delta \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} +$$

$$+ C \sum_{i=1}^{\infty} a_{nm_i^{(\delta)}} + o(1), \qquad (15)$$

где $|z_{m_i^{(\delta)}} - \zeta| \leqslant C$, $\{m_i^{(\delta)}\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \setminus \{k_i^{(\delta)}\}$.

Так как при $n \to \infty$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{nk_i^{(\delta)}} \to 1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{nm_i^{(\delta)}} \to 0$, то из (15) для $n > n_0(\delta)$ получим $\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} z_k - \zeta\right| \leqslant \delta + o(1) \leqslant 2\delta$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} z_k = \zeta$. Теорема 4 доказана.

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М.: Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
2. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.— М. : Физматгиз, 1960.— 471 с.
3. *Давыдов Н. А.* Суммирование ограниченных последовательностей регулярными матрицами.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1975, вып. 23, с. 24—31.
4. *Давыдов Н. А.* Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами.— Мат. заметки, 1973, 13, № 2, с. 179—188.
5. *Давыдов Н. А.* О ядре в смысле Кноппа регулярного положительного преобразования.— Изв. вузов. Математика, 1983, № 2 (249), с. 30—40.

Киев. пед. ин-т

Поступила в редакцию 27.01.83