УДК 517.9

А. М. Самойленко, К. Кенжебаев, В. Н. Лаптинский

О некоторых итерационных методах отыскания периодических решений неавтономных систем дифференциальных уравнений

В этой работе развиваются некоторые вопросы предложенных в [1, 2] и развитых в [3] численно-аналитических методов исследования периодических решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$dx/dt = f(t, x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

предполагая, что ω-периодическая по t вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна по t, x и имеет достаточное количество производных по x, непрерывных по t, x в некоторой области

$$D = \{t, x : -\infty < t < +\infty, \ \|x\| < \rho\}.$$

Лемма. *Пусть $\varphi(t, x)$ — произвольная вектор-функция, непрерывная по t, $x \in D_1 \subset D$ вместе со своей производной $\partial\varphi(t, x)/\partial x$, и пусть*

$$\det \left[E - \int_{t_0}^{t} (\partial\varphi(\tau, x)/\partial x)\, d\tau \right] \neq 0 \quad \forall t, \ x \in D_1 \tag{2}$$

(E — единичная матрица, $D_1 = \{t, x : |t - t_0| \leqslant a, \ \|x - x_0\| \leqslant \rho_1 < \rho\}$, $\|x_0\| < \rho$, $a > 0$).

Тогда задача Коши для (1) *с условием* $x(t_0) = x_0$ *эквивалентна уравнению*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(t))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \Bigg\{ f(\tau, x(\tau)) - \varphi(\tau, x(\tau)) - \int_{t_0}^{\tau} [\partial\varphi(\sigma, x(\tau))/\partial x]\, f(\tau, x(\tau))\, d\sigma \Bigg\}\, d\tau. \tag{3}$$

Доказательство. Если $x(t; t_0, x_0)$ — решение уравнения (1), то $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$. Согласно [2],

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau))\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(t))\, d\tau - \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} (\partial\varphi(\sigma, x(\tau))/\partial x)\, (dx(\tau)/d\tau)\, d\sigma. \tag{4}$$

Теперь нетрудно получить (3), если учесть, что $dx(\tau)/d\tau = f(\tau, x(\tau))$.

Пусть $x(t)$ — непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3). Очевидно, что $x(t_0) = x_0$.

Дифференцируя по t обе части (3), получим

$$dx(t)/dt = \int_{t_0}^{t} (\partial\varphi(\tau, x(t))/\partial x)\, d\tau\, (dx(t)/dt) + f(t, x(t)) - \int_{t_0}^{t} (\partial\varphi(\tau, x(t))/\partial x) \times d\tau f(t, x(t)).$$

Отсюда, используя условие (2), имеем $dx(t)/dt = f(t, x(t))$, т. е. решение уравнения (3) есть решение соответствующей задачи Коши для (1).

Замечание 1. Пусть $\|\partial\varphi(t, x)/\partial x\| \leqslant K = \text{const}$ $\forall t, x \in D_1$. Тогда $\left\| \int\limits_{t_0}^{t} (\partial\varphi(\tau, x)/\partial x)\, d\tau \right\| \leqslant K|t - t_0|$. В этом случае обратимость матрицы $E - \int\limits_{t_0}^{t} (\partial\varphi(\tau, x)/\partial x)\, d\tau$ будет обеспечена условием $Ka < 1$.

Следствие 1. *Пусть* $\varphi(t, x)$ — *решение уравнения*

$$\varphi(t, x) = -\int\limits_{t_0}^{t} (\partial\varphi(\tau, x)/\partial x)\, d\tau f(t, x) + f(t, x). \tag{5}$$

Тогда решение $x(t; t_0, x_0)$ *уравнения* (1) *представимо в виде*

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(t))\, d\tau.$$

Легко видеть, что выражение $x - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x)\, d\tau = x_0$ — интеграл уравнения (1). Ясно также, что заменой

$$x - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x)\, d\tau = y \tag{6}$$

уравнение (5) сводится к следующей задаче Коши:

$$\partial y/\partial t + \partial y/\partial x f(t, x) = 0, \tag{7}$$

$$y(t_0, x) = x. \tag{8}$$

Уравнение (7) можно записать в виде $\partial y/\partial t + \sum\limits_{k=1}^{n} \partial y/\partial x_k f_k(t, x) = 0$, где f_k — компоненты вектора f.

Задачу Коши для уравнений в частных производных (линейных и нелинейных) с непрерывными по t и аналитическими по x коэффициентами с помощью абстрактных методов исследовали многие авторы (см. [4]). Конструктивным методом в [5] получены коэффициентные оценки решения и области его существования (в линейном случае).

Если $f(t, x)$ аналитична по x в области D, то решение уравнения (5) можно строить классическим методом итераций

$$\varphi_k(t, x) = -\int\limits_{t_0}^{t} (\partial\varphi_{k-1}(\tau, x)/\partial x)\, d\tau f(t, x) + f(t, x), \tag{9}$$

где $k = 1, 2, \ldots,$ $\varphi_0 \equiv 0$.

Этот алгоритм соответствует следующему алгоритму построения решения задачи (7), (8): $y_k(t, x) = x - \int\limits_{t_0}^{t} (\partial y_{k-1}(\tau, x)/\partial x)\, f(\tau, x)\, d\tau$, где $y_0 = x$, причем $y_i(t, x) = x - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_i(\tau, x)\, d\tau$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Обоснование этого итерационного метода для линейных уравнений общего вида дано в [4].

Воспользовавшись приближениями $\varphi_m(t, x)$, $\varphi_{m+1}(t, x)$, из (3) получим

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_m(\tau, x(t))\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \delta\varphi_m(\tau, x(\tau))\, d\tau, \tag{10}$$

где $\delta\varphi_m(\tau, x) = \varphi_{m+1}(\tau, x) - \varphi_m(\tau, x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечание 2. Получим функцию $\varphi(t, x)$ из уравнения $\varphi(t, x) = -\int_{t_0}^{t} (\partial\varphi(\tau, x)/\partial x)\, d\tau f_0(t, x) + f_0(t, x)$, где $f_0(t, x) = f(t, x) - f(t, 0)$, тогда

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(t))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \left[E - \int_{t_0}^{\tau} (\partial\varphi(\sigma, x(\tau))/\partial x)\, d\sigma\right] f(\tau, 0)\, d\tau.$$

Следствие 2. *Пусть вектор-функция* $\psi(t, x)$ — *решение задачи* (7), (8), *причем* $\det(\partial\psi(t, x)/\partial x) \neq 0\ \forall t, x \in D_1$.

Тогда задача Коши для дифференциального уравнения $dx/dt = f(t, x) + g(t, x)$ *эквивалентна интегральному уравнению*

$$\psi(t, x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (\partial\psi(\tau, x(\tau))/\partial x)\, g(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Полученные результаты могут быть применены к исследованию задачи об ω-периодических решениях уравнения (1).

С этой целью рассмотрим следующие уравнения:

$$\varphi(t, x) = -\int_{0}^{t} (\partial\varphi(\tau, x)/\partial x)\, d\tau f(t, x) + f(t, x),$$

$$\psi(t, x) = -\int_{\omega}^{t} (\partial\psi(\tau, x)/\partial x)\, d\tau f(t, x) + f(t, x).$$

Пусть $\varphi_m(t, x)$, $\psi_k(t, x)$ — приближенные решения этих уравнений, построенные по итерационной схеме (9). Используя (10), запишем

$$x(t) = x(0) + \int_{0}^{t} \varphi_m(\tau, x(t))\, d\tau + \int_{0}^{t} \delta\varphi_m(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

$$x(t) = x(\omega) + \int_{\omega}^{t} \psi_k(\tau, x(t))\, d\tau + \int_{\omega}^{t} \delta\psi_k(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Введем в рассмотрение функциональную матрицу

$$H_{mk}(t, x) = \int_{0}^{t} (\partial\varphi_m(\tau, x(t))/\partial x)\, d\tau + \int_{t}^{\omega} (\partial\psi_k(\tau, x(t))/\partial x)\, d\tau.$$

Теорема. *Пусть для некоторых натуральных чисел* m, k *выполнено условие*

$$\det H_{mk}(t, x) \neq 0, \quad t \in [0, \omega], \quad \|x\| \leqslant r < \rho.$$

Тогда задача об ω-периодических решениях уравнения (1) *эквивалентна интегральному уравнению*

$$\int_{0}^{t} \varphi_m(\tau, x(t))\, d\tau + \int_{t}^{\omega} \psi_k(\tau, x(t))\, d\tau = -\int_{0}^{t} \delta\varphi_m(\tau, x(\tau))\, d\tau - \int_{t}^{\omega} \delta\psi_k(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{11}$$

Доказательство. Так как возможность сведения ω-периодической краевой задачи для (1) к уравнению (11) фактически показана, осталось показать только обратный переход.

Пусть $x(t)$, $\|x(t)\| \leqslant r$, — непрерывно дифференцируемое решение уравнения (11). Рассматривая (11) как тождество и дифференцируя по t обе его части, получим в результате несложных выкладок $H_{mk}(t, x(t)) \times dx(t)/dt = H_{mk}(t, x(t)) f(t, x(t))$. Так как $\det H_{mk}(t, x) \neq 0$, то $dx(t)/dt = f(t, x(t))$.

Покажем, что $x(\omega) = x(0)$. Для этого в правой части (11) заменим $f(\tau, x(\tau))$ на $dx(\tau)/d\tau$, а затем с помощью тождества (4), примененного поочередно к функциям $\varphi_m(t, x)$, $\psi_k(t, x)$, придем к равенству $\int\limits_0^\omega f(\tau, x(\tau))\,d\tau = 0$; следовательно, $x(\omega) = x(0)$.

Замечание 3. При $k = m = 1$ уравнение (11) принимает вид (см. [3])

$$\int\limits_0^\omega f(\tau, x(t))\,d\tau = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \frac{\partial f(\sigma, x(\tau))}{\partial x} f(\tau, x(\tau))\,d\sigma -$$

$$-\int\limits_t^\omega d\tau \int\limits_\tau^\omega \frac{\partial f(\sigma, x(\tau))}{\partial x} f(\tau, x(\tau))\,d\sigma.$$

Приведем способ задания функций $\varphi(t, x)$, заключающийся (см. [3]) в применении операции усреднения по явно входящему времени. Он состоит в рассмотрении уравнения

$$\varphi(t, x) = -\int\limits_0^t \frac{\partial\varphi(\tau, x)}{\partial x}\,d\tau f(t, x) + f(t, x) + \overline{\int\limits_0^t \frac{\partial\varphi(\tau, x)}{\partial x}\,d\tau f(t, x)} - \overline{f(t, x)}, \tag{12}$$

которое с помощью замены (6) преобразуется к виду

$$\partial y(t, x)/\partial t = -(\partial y(t, x)/\partial x) f(t, x) + \overline{(\partial y(t, x)/\partial x) f(t, x)}, \tag{13}$$

причем $y(0, x) = x$. Здесь и всюду ниже черта сверху означает усреднение по явно входящему аргументу t.

Вместо уравнения (12) можно взять (см. замечание 2) следующее:

$$\varphi(t, x) = -\int\limits_0^t \frac{\partial\varphi(\tau, x)}{\partial x}\,d\tau f_0(t, x) + f_0(t, x) + \overline{\int\limits_0^t \frac{\partial\varphi(\tau, x)}{\partial x}\,d\tau f_0(t, x)} - \overline{f_0(t, x)}. \tag{14}$$

Способ учета интегральных средних по периоду является типичным для теории колебаний (см. [2, 6—8]) и вызван необходимостью исключения вековых членов при построении периодических решений.

Уравнение (12) можно формально решать следующим методом итераций:

$$\varphi_k(t, x) = -\int\limits_0^t \frac{\partial\varphi_{k-1}(\tau, x)}{\partial x}\,d\tau f(t, x) + f(t, x) + \overline{\int\limits_0^t \frac{\partial\varphi_{k-1}(\tau, x)}{\partial x}\,d\tau f(t, x)} -$$

$$-\overline{f(t, x)}, \tag{15}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, $\varphi_0 \equiv 0$.

Очевидно, все $\varphi_k(t, x)$ — ω-периодические по t. Выбор функций $\varphi_k(t, x)$ таким способом позволяет расширить класс интегральных уравнений, эквивалентных задаче об ω-периодических решениях уравнения (1).

Если функция $\varphi(t, x)$ — решение уравнения (12), то определяющее уравнение ω-периодических решений уравнения (1) формально приводится к виду

$$\int\limits_0^\omega d\tau \int\limits_0^\omega \left[E - \int\limits_0^s (\partial\varphi(\sigma, x(\tau))/\partial x)\,\partial\sigma\right] f(s, x(\tau))\,ds = 0,$$

или с учетом (6)

$$\int\limits_0^\omega d\tau \int\limits_0^\omega (\partial y(s, x(\tau))/\partial x) f(s, x(\tau))\,ds = 0. \tag{16}$$

Если в уравнении (1) $f(t, x) \equiv A(t)x + p(t)$, то функцию $y(t, x)$ ищем в виде $y(t, x) = \Phi(t)x + g(t)$. Тогда из (13) получим

$$d\Phi(t)/dt = -\Phi(t)A(t) + \overline{\Phi(t)A(t)}, \quad dg(t)/dt = -\Phi(t)p(t) + \overline{\Phi(t)p(t)}, \tag{17}$$

где $\Phi(0) = E$, $g(0) = 0$. Уравнение (16) в этом случае примет вид

$$W\int_0^\omega x(\tau)\,d\tau + \int_0^\omega \Phi(\tau)p(\tau)\,d\tau = 0,$$

где $W = \overline{\Phi(t)A(t)}$.

Если в качестве $\varphi(t, x)$ взять решение уравнения (14), преобразованного с помощью (6) к виду

$$\partial y(t, x)/\partial t = -(\partial y(t, x)/\partial x) f_0(t, x) + \overline{(\partial y(t, x)/\partial x)\, f_0(t, x)}, \tag{18}$$

где $y(0, x) = x$, то определяющее уравнение приводится к виду

$$\int_0^\omega \overline{(\partial y(s, x(\tau))/\partial x) f_0(s, x(\tau))}\,d\tau + \int_0^\omega (\partial y(\tau, x(\tau))/\partial x) f(\tau, 0)\,d\tau = 0.$$

В линейном случае решение уравнения (18) ищем в виде $y(t, x) = \Phi(t)x$, причем $\Phi(t)$ находим из уравнения (17).

Определяющее уравнение снова приводится к виду

$$W\int_0^\omega x(\tau)\,d\tau + \int_0^\omega \Phi(\tau)p(\tau)\,d\tau = 0.$$

Так как матрица $\Phi(t)$ в общем случае не допускает представления в конечном виде, то целесообразно использовать ее приближения, построенные по схеме (см. [3])

$$\Phi_k(t) = E - \int_0^t [\Phi_{k-1}(\tau)A(\tau) - \overline{\Phi_{k-1}(\tau)A(\tau)}]\,d\tau,$$

где $k = 1, 2, \ldots$, $\Phi_0 \equiv 0$. Выбор функций $\Phi_k(t)$, таким образом, вытекает из результатов работы [2].

Покажем, что методика, изложенная в [2], позволяет получить усредненные уравнения асимптотического метода Крылова — Боголюбова — Митропольского [6, 7]. Для этого рассмотрим уравнение $dx/dt = \varepsilon f(t, x)$ с параметром ε и выведем уравнения первого и второго приближений.

Для нахождения уравнения первого приближения введем в (3) функцию $\varphi_1(t, x)$, найденную из (15) при $k = 1$. Получим

$$x(t) = x(0) + \varepsilon\psi_1(t, x(t)) - \varepsilon^2\int_0^t \frac{\partial\psi_1(\tau, x(\tau))}{\partial x} f(\tau, x(\tau))\,d\tau + \varepsilon\int_0^t \overline{f(\sigma, x(\tau))\,d\tau}, \tag{19}$$

где $\psi_1(t, x(t)) = \int_0^t \varphi_1(v, x(t))\,dv$.

Вводя замену переменных

$$x - \varepsilon\psi_1(t, x) = y \tag{20}$$

и учитывая, что $f(\sigma, x) = f(\sigma, y + \varepsilon\psi_1) = f(\sigma, y) + \varepsilon(\partial f(\sigma\ y)/\partial y)\psi_1 + \varepsilon^2, \ldots$, из (19) получим $y(t) = y(0) + \varepsilon\int_0^t \overline{f(\sigma, y(\tau))}\,d\tau + \varepsilon^2 \ldots$, откуда следует уравнение первого приближения $dy/dt = \overline{\varepsilon f(\tau, y)}$, причем функция $\psi_1(t, x)$ выбрана так, что $y(0) = x(0)$.

В отличие от [6] формула (20) дает замену новых пространственных переменных через старые.

Для вывода уравнения второго приближения поступаем следующим образом. Так как $\partial f(\sigma, y)/\partial y = \partial f(\sigma, x)/\partial x + \varepsilon\ldots$, то

$$x(t) = x(0) + \varepsilon\psi_1(t, x(t)) - \varepsilon^2 \int_0^t (\partial\psi_1(\tau, x(\tau))/\partial x) f(\tau, x(\tau))\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon^2 \int_0^t \overline{(\partial f(\sigma, x(\tau))/\partial x)}\, \psi_1(\tau, x(\tau))\, d\tau + \varepsilon \int_0^t \overline{f(\sigma, y(\tau))}\, d\tau + \varepsilon^3 \ldots . \qquad (21)$$

Обозначив выражение $\partial\psi_1(\tau, x(\tau))/\partial x\, f(\tau, x(\tau)) - \overline{\partial f(\sigma, x(\tau))/\partial x}\, \psi_1(\tau, x(\tau))$ через $g_1(\tau, x(\tau))$, запишем на основании тождества (4)

$$\int_0^t g_1(\tau, x(\tau))\, d\tau = \int_0^t [g_1(\tau, x(\tau)) - \overline{g_1(\sigma, x(\tau))}]\, d\tau + \int_0^t \overline{g_1(\sigma, x(\tau))}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t [g_1(\tau, x(t)) - \overline{g_1(\sigma, x(t))}]\, d\tau - \varepsilon \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial [g_1(\sigma, x(\tau)) - \overline{g_1(s, x(\tau))}]}{\partial x} \times$$

$$\times f(\tau, x(\tau))\, d\sigma + \int_0^t \overline{g_1(\sigma, x(\tau))}\, d\tau.$$

Далее с помощью замены $x - \varepsilon\psi_1(t, x) + \varepsilon^2\psi_2(t, x) = y$, где $\psi_2(t, x) = \int_0^t [g_1(\tau, x(t)) - \overline{g_1(\sigma, x(t))}]\, d\tau$, из (21) получим

$$y(t) = y(0) + \varepsilon^2 \int_0^t \overline{(\partial f(\sigma, y(\tau)/\partial y)}\, \overline{\psi_1(\sigma, y(\tau))\, d\tau} -$$

$$- \varepsilon^2 \int_0^t (\partial\psi_1(\sigma, y(\tau))/\partial y) f(\sigma, y(\tau))\, d\tau + \varepsilon \int_0^t \overline{f(\sigma, y(\tau))}\, d\tau + \varepsilon^3 \ldots .$$

Отсюда находим уравнение второго приближения

$$dy/dt = \overline{\varepsilon f(\tau, y)} + \varepsilon^2 \left[\overline{\frac{\partial f(\tau, y)}{\partial y}}\, \overline{\psi_1(\tau, y)} - \overline{\frac{\partial\psi_1(\tau, y)}{\partial y} f(\tau, y)} \right].$$

Легко видеть, что замену переменных $x - \varepsilon\psi_1(t, x) + \ldots = y$, осуществляющую переход к усредненным уравнениям, можно строить в виде ряда по степеням ε из уравнения $\partial y/\partial t + \varepsilon(\partial y/\partial x) f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k P_k(y)$. Вектор-функции $\psi_k(t, x)$, $P_k(y)$ последовательно находятся из последней формулы с учетом периодичности $y(t, x, \varepsilon)$.

В линейном случае из нашей методики следует алгоритм построения показательной матрицы, отличный от метода, изложенного в [9].

В заключение отметим, что поскольку выражение $y - \int_0^t f(\tau, y)\, d\tau = x_0$ — интеграл уравнения

$$dy/dt = \left(E - \int_0^t (\partial f(\tau, y)/\partial y)\, d\tau\right)^{-1} f(t, y), \quad y(0) = x_0,$$

то уравнение (1) запишем в виде

$$dx/dt = \left(E - \int_0^t (\partial f(\tau, x)/\partial x)\, d\tau\right)^{-1} f(t, x) -$$

$$- \left(E - \int_0^t (\partial f(\tau, x)/\partial x)\, d\tau\right)^{-1} \int_0^t (\partial f(\tau, x)/\partial x)\, d\tau f(t, x).$$

Далее, опираясь на следствие 2 доказанной леммы, получим эквивалентное интегральное уравнение

$$x(t) - \int_0^t f(\tau, x(t))\, d\tau = x_0 - \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\partial f(\sigma, x(\tau))/dx)\, f(\tau, x(\tau))\, d\sigma.$$

Итак, мы пришли к методу интегрирования уравнения (1), заключающемуся в последовательном применении преобразований вида $u - \int_0^t \varphi(\tau, u)\, d\tau = v$. Этим способом можно выводить также усредненные уравнения.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища школа, 1976.— 179 с.
2. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра.— Укр. мат. журн., 1962, **14**, № 3, с. 289—298.
3. *Лаптинский В. Н.* Об одном итерационном методе в теории нелинейных колебаний.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1980, № 2, с. 6—12.
4. *Аграчев А. А., Вахрамеев С. А.* Хронологические ряды и теорема Коши—Ковалевской.— Итоги науки и техники. Сер. Математика. Проблемы геометрии / ВИНИТИ, 1981, **12**, с. 165—189.
5. *Жестков С. В.* Об одном конструктивном алгоритме решения задачи Коши для линейных уравнений в частных производных первого порядка.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1980, № 6, с. 49—51.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
7. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М. : Изд-во МГУ, 1971.—508 с.
8. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах.— М. : Мир, 1966.— 231 с.
9. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Минск: Наука и техника, 1963.— 272 с.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наукова думка, 1969.— 247 с.
11. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.— Успехи мат. наук, **23**, № 4, 1968, с. 179—238.

Киев. гос. ун-т Поступила в редакцию— 21.03.83