УДК 517.210

И. П. Федчина

Об одном развитии оценки П. Л. Чебышева, связанной с интегралом Лапласа

В настоящей заметке в основном будем придерживаться терминологии и обозначений монографии [1].

Согласно известной теореме Бернштейна—Уиддера вполне монотонная на $(0, +\infty)$ функция $f(x)$ (т. е. такая функция, для которой $(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant \geqslant 0$ для всех $x > 0$) допускает интегральное представление

$$f(x) = \int_0^\infty \exp(-tx)\, d\sigma(t), \tag{1}$$

где $\sigma(t)$, $\sigma(0) = 0$,— неубывающая функция. (Разумеется, вместо дифференциала Стилтьеса $d\sigma(t)$ П. Л. Чебышев пишет $p(t)dt$, $p(t) \geqslant 0$).

Чаще всего найти функцию $\sigma(t)$ затруднительно. Возникает вопрос об ее оценке. В [2] указана такая оценка через $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$\int_0^{-f''(x)/f'(x)} d\sigma(t) \geqslant f(x) - (f'(x))^2/f''(x). \tag{2}$$

Доказательство этого неравенства впервые было опубликовано в [3].

Это неравенство можно доказать с помощью неравенства Чебышева—Маркова, в котором используются моменты $s_k(x) = (-1)^k f^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2$ (см. [4], [1]). Естественно, что с ростом числа используемых моментов получается все более точная оценка для функции $\sigma(t)$, но при этом, как и в случае, рассмотренном в [2], нужно следить за тем, чтобы корни соответствующего ортогонального многочлена при изменении x пробегали множество точек роста функции $\sigma(t)$.

В настоящей заметке проведено такое исследование для произвольного количества моментов.

Начнем со случая, когда $t = a$, $a > 0$,— первая точка роста функции $\sigma(t)$. Рассмотрим моментную последовательность

$$s_k(x) := (-1)^k f^{(k)}(x) = \int_a^\infty t^k \exp(-tx)\, d\sigma(t) = \int_a^\infty t^k d\sigma_1(t), \tag{3}$$

где $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$, $d\sigma_1(t) = \exp(-tx)\, d\sigma(t) \geqslant 0$. В дальнейшем наряду с последовательностью $\{s_k(x)\}_0^{2n-2}$ будем рассматривать последовательность

$$\tau_k(x) = s_{k+1}(x) - a s_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, 2n-3, \tag{4}$$

которая также является моментной последовательностью, так как справедливо представление

$$\tau_k(x) = \int_a^\infty t^k d\sigma_2(t), \quad d\sigma_2(t) = (t-a)\, d\sigma_1(t). \tag{5}$$

Для последовательности (3) составим матрицу

$$S(x) = \begin{pmatrix} s_0(x) & s_1(x) \ldots s_{n-1}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_{n-1}(x) & s_n(x) \ldots s_{2n-2}(x) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Отбрасывая тривиальный случай, когда $f(x)$ — экспоненциальный многочлен, можно считать, что

$$S(x) > 0. \tag{7}$$

Рассмотрим матрицы

$$S_{k,l}^j(x) = \begin{pmatrix} s_j(x) & s_{j+1}(x) \ldots s_{j+l-1}(x) & s_{j+l+1}(x) \ldots & s_{j+k}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_{j+k-1}(x) & s_{j+k}(x) \ldots s_{j+k+l-2}(x) & s_{j+k+l}(x) \ldots & s_{j+2k-1}(x) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Для частных случаев $l = 0$ и $l = k$ введем сокращенные обозначения

$$S_{k,k}^j(x) = S_k^j(x), \quad S_{k,0}^j(x) = S_k^{j+1}(x). \tag{9}$$

Определители этих матриц обозначим

$$\Delta_{k,l}^j(x) = \det S_{k,l}^j(x), \tag{10}$$

при этом

$$\Delta_{k,k}^j(x) = \Delta_k^j(x), \quad \Delta_{k,0}^j(x) = \Delta_k^{j+1}(x). \tag{11}$$

Очевидно, что $\Delta_{k,k}^j(x)$ — главные миноры порядка k матрицы $S_{n+1}^0(x) = S(x)$, и в силу (7) они все положительны.

Введем для последовательности $\{s_k(x)\}_0^{2\nu}$ ортогональные многочлены

$$P_\nu^j(t, x) = \begin{vmatrix} S_\nu^j(x) & \begin{matrix} s_{j+\nu}(x) \\ \vdots \end{matrix} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1\ t\ \ldots & t^\nu \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Известно [1], что корни этого многочлена — узлы главных представлений последовательности $\{s_k(x)\}_0^{2\nu}$. Для исследования поведения корней ортогональных многочленов рассмотрим ряд вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Отношения* $\Delta_k^{j+1}(x)/\Delta_k^j(x)$ *и* $\Delta_{k,k-1}^j(x)/\Delta_k^j(x)$ *убывают, а* $\Delta_{k,2}^j(x)/\Delta_k^{j+1}(x)$ *возрастают с увеличением* x.

Доказательство. Непосредственное вычисление производных этих отношений с учетом формулы

$$\frac{d\Delta_{k,l}^j(x)}{dx}=-\left|\begin{array}{c|c} S_{k-1,l}^j(x) & s_{j+k}(x) \\ & \vdots \\ \hline s_{j+k}(x)\ldots & s_{j+2k}(x)\end{array}\right| \tag{13}$$

и детерминантного тождества Сильвестра (см. [5], [6]) приводит к следующему:

$$d(\Delta_k^{j+1}(x)/\Delta_k^j(x))/dx=-\Delta_{k+1}^j(x)\,\Delta_{k-1}^{j+1}(x)/(\Delta_k^j(x))^2\leqslant 0,$$

$$d(\Delta_{k,k-1}^j(x)/\Delta_k^j(x))/dx=-\Delta_{k+1}^j(x)\,\Delta_{k-1}^j(x)/(\Delta_k^j(x))^2\leqslant 0,$$

$$d(\Delta_{k,2}^j(x)/\Delta_k^{j+1}(x))/dx=\Delta_{k+1}^j(x)\,\Delta_{k-1}^{j+2}(x)/(\Delta_k^{j+1}(x))^2\geqslant 0,$$

Из полученных соотношений следует заключение леммы.

Лемма 2. *Пусть*

$$P_k^j(a,x)=\frac{-1}{\Delta_k^j(x)}\left|\begin{array}{c|c} S_k^j(x) & s_{j+k}(x) \\ & \vdots \\ \hline 1a\ldots & a^k\end{array}\right|. \tag{14}$$

Тогда

$$dP_k^j(a,x)/dx=P_{k-1}^j(a,x)\,\Delta_{k-1}^j(x)\,\Delta_{k+1}^j(x)/(\Delta_k^j(x))^2. \tag{15}$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением с использованием формулы (13) и детерминантного тождества Сильвестра.

Лемма 3. *Если* $t=a$, $a>0$,*— первая точка роста функции* $\sigma(t)$, *то справедливы следующие соотношения:*

$$\lim_{x\to+\infty}\Delta_k^{j+1}(x)/\Delta_k^j(x)=a^k,\quad \lim_{x\to+\infty}P_k^j(a,x)=0, \tag{16}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(P_k^{j+1}(a,x)/P_k^j(a,x))=\lim_{x\to+\infty}(dP_k^{j+1}(a,x)/dx)/(dP_k^j(a,x)/dx)=1.$$

Доказательство будем проводить по индукции. Пусть $k=1$. Соотношение (16) примет вид

$$\lim_{x\to+\infty}(s_{j+1}(x)/s_j(x))=a. \tag{17}$$

Справедливость его доказана в [4]. Докажем остальные соотношения леммы при $k=1$, используя (17), (4).

$$\lim_{\to+\infty}P_1^j(a,x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{s_j(x)}\begin{vmatrix}s_j(x) & s_{j+1}(x)\\ 1 & a\end{vmatrix}=\lim_{\to+\infty}\left(\frac{s_{j+1}(x)}{s_j(x)}-a\right)=0,$$

$$\lim_{\to+\infty}\frac{P_1^{j+1}(a,x)}{P_1^j(a,x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\begin{vmatrix}s_{j+1}(x) & s_{j+2}(x)\\ 1 & a\end{vmatrix}\Big/s_{j+1}(x)\right)\Big/\left(\begin{vmatrix}s_j(x) & s_{j+1}(x)\\ 1 & a\end{vmatrix}\Big/s_j(x)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\tau_{j+1}(x)/\tau_j(x))/(s_j(x)/s_{j+1}(x)).$$

Получим $\lim\limits_{x\to+\infty}P_1^{j+1}(a,x)/P_1^j(a,x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(dP_1^{j+1}(a,x)/dx)/(dP_1^j(a,x)/dx)=1.$ Существование последнего предела следует из вида производной многочлена (15) и леммы 1.

Пусть утверждения леммы верны для $k=n-1$. Докажем, что они верны и для $k=n$. Действительно, в силу формул (14), (15)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Delta_n^{j+1}(x)}{\Delta_n^j(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{P_{n-2}^j(a,x)\,\Delta_{n-2}^j(x)\,d\,(P_{n-1}^{j+1}(a,x)/dx)\,(\Delta_{n-1}^{j+1}(x))^2}{P_{n-2}^{j+1}(a,x)\,\Delta_{n-2}^{j+1}(x)\,d\,(P_{n-1}^j(a,x)/dx)\,(\Delta_{n-1}^j(x))^2}=a^n.$$

Для доказательства остальных соотношений воспользуемся детерминантным тождеством Сильвестра

$$\lim_{x\to+\infty}P_n^j(a,x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\Delta_n^j(x)}\begin{vmatrix} s_j(x) & \ldots\ s_{j+n-1}(x) & s_{j+n}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ s_{j+n-1}(x) & S_{n-1}^{j+2}(x) & s_{j+2n-1}(x)\\ 1 & \ldots\ a^{n-1} & a^n\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}P_{n-1}^{j+2}(a,x)+P_{n-1}^{j+1}(a,x)\,\Delta_{n-1}^{j+1}(x)\,\Delta_n^{j+1}(x)/\Delta_{n-1}^{j+2}(x)\,\Delta_n^j(x)\right)=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_n^{j+1}(a,x)}{P_n^j(a,x)}=\lim_{x\to+\infty}\begin{vmatrix} S_n^{j+1}(x) & s_{j+n+1}(x)\\ & \vdots\\ 1\ \ldots & a^n\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} S_n^j(x) & s_{j+n}(x)\\ & \vdots\\ 1\ \ldots & a^n\end{vmatrix}\frac{\Delta_n^j(x)}{\Delta_n^{j+1}(x)}=1.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\begin{vmatrix} S_n^k(x) & s_{n+k+1}(x)\\ & \vdots\\ 1\ \ldots & a^n\end{vmatrix}$ — минор вида $\Delta_n^k(x)$, составленный из элементов последовательности $\{\tau_k(x)\}_0^{2n-3}$ (4). Наконец, $\lim\limits_{x\to+\infty}P_n^{j+1}(a,x)/P_n^j(a,x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(dP_n^{j+1}(a,x)/dx)/(dP_n^j(a,x)/dx)$. Существование последнего предела следует из вида производной многочлена (15) и леммы 1.

Теорема 1. *Пусть $t=a$, $a>0$, — первая точка роста функции $\sigma(t)$. Для корней $\xi_j^{(n)}(x)$ ортогонального многочлена $P_n^1(t,x)$ из* (12) *имеют место равенства:* $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi_j^{(n)}(x)=a$, $j=1,2,\ldots,n$.

Доказательство проведем по индукции. Для $n=1$ утверждение следует из [4]. Действительно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi_j^{(1)}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(s_2(x)/s_1(x))=a$. Пусть теорема верна для $n=k-1$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty}\xi_j^{(k-1)}(x)=a,\quad j=1,2,\ldots,k-1. \tag{18}$$

Докажем, что теорема верна и для $n=k$. Для этого учтем, что корни последовательных ортогональных многочленов перемежаются (см. [1]), т. е.

$$\xi_j^{(k)}(x)<\xi_j^{(k-1)}(x)<\xi_{j+1}^{(k)}(x),\quad j=1,2,\ldots,k-1.$$

Из (18) следует, что

$$\lim_{x\to+\infty}\xi_j^{(k)}(x)=a,\quad j=1,2,\ldots,k-1, \tag{19}$$

и нам остается доказать только, что и $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi_k^{(k)}(x)=a$. Из того, что $\xi_j^{(k)}(x)$, $j=1,2,\ldots,k$, — корни ортогонального многочлена $P_k^{(1)}(t,x)$ из (12), следует $\prod\limits_{j=1}^{k}\xi_j^{(k)}(x)=\Delta_k^2(x)/\Delta_k^1(x)$. Применяя лемму 3, найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}\prod\limits_{j=1}^{k}\xi_j^{(k)}(x)=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\Delta_k^2(x)/\Delta_k^1(x)=a^k$. Учитывая равенство (19), получим $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi_k^{(k)}(x)=a$.

Лемма 4. *Если $f(+\infty)=0$ (это равносильно условию $\sigma(+0)=0$)*

и в любой правой полуокрестности точки $t=0$ *имеются точки роста* $\sigma(t)$, *то*

$$\lim_{x\to+\infty}\begin{vmatrix} S_k^j(x) & & s_l(x) \\ & & \vdots \\ s_{k+j}(x) & \dots & s_{l+k}(x)\end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} S_k^j(x) & & s_m(x) \\ & & \vdots \\ s_{k+j}(x) & \dots & s_{m+k}(x)\end{vmatrix} = 0, \quad j+k<m<l.$$

Доказательство проводится по индукции. Для $k=1$ соотношение следует из результата, доказанного в [4]:
$\lim\limits_{x\to+\infty}(s_l(x)/s_m(x))=0,\quad m<l$. Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty}\begin{vmatrix} s_j(x) & s_l(x) \\ s_{j+1}(x) & s_{l+1}(x)\end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} s_j(x) & s_m(x) \\ s_{j+1}(x) & s_{m+1}(x)\end{vmatrix} = \lim_{x\to+\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{s_l(x)}{s_j(x)}\right)\Big/\frac{d}{dx}\left(\frac{s_m(x)}{s_j(x)}\right) =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(s_l(x)/s_m(x))=0, \quad m<l.$$

Пусть утверждение леммы справедливо для $k=n-1$. Докажем, что лемма верна и для $k=n$.

$$\lim_{x\to+\infty}\begin{vmatrix} S_n^j(x) & & s_l(x) \\ & & \vdots \\ s_{j+n}(x) & \dots & s_{l+n}(x)\end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} S_n^j(x) & & s_m(x) \\ & & \vdots \\ s_{j+n}(x) & \dots & s_{m+n}(x)\end{vmatrix} =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{d}{dx}\left(\begin{vmatrix} S_{n-1}^j(x) & & s_l(x) \\ & & \vdots \\ s_{j+n-1}(x) & \dots & s_{l+n-1}(x)\end{vmatrix} \Big/ \Delta_n^j(x)\right) \Big/ \frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left(\begin{vmatrix} S_{n-1}^j(x) & & s_m(x) \\ & & \vdots \\ s_{j+n-1}(x) & \dots & s_{m+n-1}(x)\end{vmatrix} \Big/ \Delta_n^j(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\begin{vmatrix} S_{n-1}^j(x) & & s_l(x) \\ & & \vdots \\ s_{j+n-1}(x) & \dots & s_{l+n-1}(x)\end{vmatrix} \Big/$$

$$\cdot \Big/ \begin{vmatrix} S_{n-1}^j(x) & & s_m(x) \\ & & \vdots \\ s_{j+n-1}(x) & \dots & s_{m+n-1}(x)\end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *Если* $f(+\infty)=0$ *и в любой правой полуокрестности точки* $t=0$ *имеются точки роста* $\sigma(t)$, *то для корней* $\xi_j^{(n)}(x)$ *ортогонального многочлена* $P_n^1(t,x)$ *из* (12) *имеют место равенства* $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi_j^{(n)}(x)=0$, $j=1,2,\dots,n$.

Доказательство равенств

$$\lim_{x\to+\infty}\xi_j^{(n)}(x)=0,\quad j=1,2,\dots,n-1, \tag{20}$$

проводится так же, как в теореме 1. Для доказательства того, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi_n^{(n)}(x)=0$ учтем, что $\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j^{(n)}(x)=\Delta_{n,n-1}^1(x)/\Delta_n^2(x)$. Используя результат леммы 4 и равенства (20), получаем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi_j^{(n)}(x)=0,\quad j=1,2,\dots,n$.

Исследуем поведение корней ортогональных многочленов, когда $x\to\to+0$. Для этого также понадобится ряд вспомогательных предложений.

Лемма 5. *Если* $\varphi(0)=0$, $g(0)=0$, *а* $\chi(x)$ *возрастает при убывании* x, *то* $\lim\limits_{x\to+0}(\varphi(x)/g(x))\chi(x)=\lim\limits_{x\to+0}(\varphi'(x)/g'(x))\chi(x)$ *при условии, что последний предел существует.*

Лемма проверяется непосредственно.

Лемма 6. *Если* $f(+0)=\infty$, *то справедливы следующие соотношения:*

$$\lim_{x\to+0}\begin{vmatrix} S_{k,2}^j(x) & & s_l(x) \\ & & \vdots \\ s_{j+k+1}(x) & \dots & s_{l+k}(x)\end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} S_{k,2}^{j+1}(x) & & s_l(x) \\ & & \vdots \\ s_{j+k+1}(x) & \dots & s_{l+k}(x)\end{vmatrix} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\left|\begin{matrix} S^j_{k,2}(x) & s_l(x) \\ & \vdots \\ s_{j+k+1}(x)\ldots & s_{l+k}(x)\end{matrix}\right| \Big/ \left|\begin{matrix} S^j_{k,2}(x) & s_m(x) \\ & \vdots \\ s_{j+k+1}(x)\ldots & s_{m+k}(x)\end{matrix}\right| = 0, \quad l < m,$$

$$\lim_{x\to+0}\Delta^j_{k-1,2}(x)/\Delta^j_{k,2}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+0}\Delta^{j+1}_{k-1}(x)/\Delta^{j+1}_k(x) = 0, \quad \lim_{x\to+0}(\Delta^j_{k,2}(x)/\Delta^j_{k-1}(x))/$$

$$/(\Delta^{j+1}_k(x)/\Delta^{j+1}_{k-1}(x)) = 1.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4. Используем результаты работы [4]: $\lim\limits_{x\to+\infty}(s_l(x)/s_m(x)) = 0$, $l < m$, а также лемм 1 и 5. Получаем

$$\lim_{x\to+0}\left|\begin{matrix} s_j(x) & s_l(x) \\ s_{j+1}(x) & s_{l+1}(x)\end{matrix}\right| \Big/ \left|\begin{matrix} s_{j+1}(x) & s_l(x) \\ s_{j+2}(x) & s_{l+1}(x)\end{matrix}\right| = \lim_{x\to+0}\frac{d}{dx}\left(\frac{s_l(x)}{s_j(x)}\right)\Big/\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left(\frac{s_l(x)}{s_{j+1}(x)}\right)\frac{s_j^2(x)}{s_{j+1}^2(x)} = \lim_{x\to+0}(s_j(x)/s_{j+1}(x)) = 0.$$

Остальные соотношения для $k = 1$ доказываются таким же образом. Предполагая, что лемма верна для $k = n - 1$, получим соотношения для $k = n$:

$$\lim_{x\to+0}\left|\begin{matrix} S^j_{k,2}(x) & s_l(x) \\ & \vdots \\ s_{j+k+1}(x)\ldots & s_{l+k}(x)\end{matrix}\right| \Big/ \left|\begin{matrix} S^{j+1}_k(x) & s_l(x) \\ & \vdots \\ s_{j+k+1}(x)\ldots & s_{l+k}(x)\end{matrix}\right| = \lim_{x\to+0}\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left(\left|\begin{matrix} S^j_{k-1,2}(x) & s_l(x) \\ & \vdots \\ s_{j+k}(x)\ \ldots & s_{l+k-1}(x)\end{matrix}\right| \Big/ \Delta^j_{k,2}(x)\right)\frac{(\Delta^j_{k,2}(x))^2}{\Delta^j_{k-1,2}(x)}\Big/\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left(\left|\begin{matrix} S^{j+1}_{k-1}(x) & s_l(x) \\ & \vdots \\ s_{j+k}(x)\ \ldots & s_{l+k-1}(x)\end{matrix}\right| \Big/ \Delta^j_k(x)\right)\frac{(\Delta^j_k(x))^2}{\Delta^j_{k-1}(x)} = 0.$$

Аналогично доказываются остальные соотношения.

Теорема 3. *Если $f(+0) = \infty$, то для корней $\xi^{(n)}_j(x)$ ортогонального многочлена $P^1_n(t, x)$ из (12) имеют место равенства $\lim\limits_{x\to+0}\xi^{(n)}_j(x) = \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Равенства

$$\lim_{x\to+0}\xi^{(n)}_j(x) = \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{21}$$

доказываются так же, как в теореме 1. Для доказательства равенства $\lim\limits_{x\to+0}\xi^{(n)}_n(x) = \infty$ учтем, что $\sum\limits_{j=1}^{n} 1/\xi^{(n)}_j(x) = \Delta^{(1)}_{k,2}(x)/\Delta^2_k(x)$.

Используя результаты леммы 6 и равенства (21), получим $\lim\limits_{x\to+0}\xi^{(n)}_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что корни ортогонального многочлена $P^1_n(t, x)$ пробегают весь промежуток $[0, +\infty)$, поэтому за счет подбора x можно добиться, чтобы в данной точке ξ находился любой корень ортогонального многочлена. Последнее позволяет получить следующую уточненную оценку $\sigma(t)$.

Теорема 4. *Пусть $s_k(x) = (-1)^k\int\limits_0^\infty t^k \exp(-tx)\,d\sigma(t)$. Для произвольного значения $\xi > 0$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\xi d\sigma(t) \geqslant \Delta^0_n(x)/\Delta^2_{n-1}(x), \tag{22}$$

где $x > 0$ — *то значение переменной, для которого наименьший корень* $\xi_1(x)$ *ортогонального многочлена* $P_n^1(t, x)$ *совпадает с* ξ.

Доказательство. Для последовательности $\{s_k(x)\}_0^{2n-2}$ построим нижнее главное представление [1] $s_k(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j(x) \xi_j^{(k)}(x)$, $k=0, 1, \ldots, 2n-2$, $\xi_0 = 0$. Подберем x так, чтобы корень $\xi_1(x)$ совпал с данным значением ξ.

Используя неравенство Чебышева—Маркова [1], получим $\int_0^{\xi} d\sigma(t) \geqslant \rho_0(x)$, где $\rho_0(x)$ — максимальная масса, сосредоточенная в точке $\xi_0 = 0$.

Для нахождения $\rho_0(x)$ построим сингулярно позитивную последовательность $s_k(x) - \rho_0(x)\delta_{0k} = \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j(x) \xi_j^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$. Справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} s_0 - \rho_0(x) & \ldots & s_{n-1}(x) \\ \vdots & & \\ s_{n-1}(x) & & S_n^2(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $\rho_0(x) = \Delta_n^0(x)/\Delta_n^2(x)$. Теорема доказана.

Заметим, что при $n = 2$ неравенство (22) естественно совпадает с неравенством (2).

1. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.— М. : Наука, 1973.— 551 с.
2. *Чебышев П. Л.* О суммах, составленных из коэффициентов рядов с положительными членами. Письмо С. В. Ковалевской.— Acta math., 1887, 9, с. 182—184.
3. *Сонин Н. Я.* О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам.— Записки по физ.-мат. отделению, 1898, сер. VIII, N 6, с. 16—24.
4. *Нудельман А. А.* Об одной заметке П. Л. Чебышева.— В кн.: Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций.— М. : Физматгиз, 1961, с. 292—294.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
6. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы.— М. : Наука, 1974.— 263 с.

Одесск. инженерно-строит. ин-т

Поступила в редакцию 16.02.83,
после переработки — 15.12.83