УДК 517.95

О. Г. Гоман

К вопросу о представлении p-аналитических функций через аналитические

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}=\frac{1}{x^k}\,\frac{\partial v_k}{\partial y},\qquad \frac{\partial u_k}{\partial y}=-\frac{1}{x^k}\,\frac{\partial v_k}{\partial x},\tag{1}$$

определяющую p-аналитическую функцию u_k+iv_k с характеристикой $p=x^k$, $k=\mathrm{const}>0$ [1]. Функции u_k и v_k удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}+\frac{k}{x}\,\frac{\partial u_k}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2}-\frac{k}{x}\,\frac{\partial v_k}{\partial x}=0.\tag{2}$$

Пусть D — область в полуплоскости $x>0$, имеющая в составе своей границы участок мнимой оси l. Тогда при $k>0$ имеет место следующее интегральное представление Положего для функции u_k+iv_k, удовлетворяющей условию $v_k\,|_l=0$:

$$\begin{gathered} u_k=\frac{1}{2}\int\limits_L f(\xi)\left(\frac{z-\zeta}{2}\right)^{1-k}(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}d\xi,\\ v_k=-\frac{i}{2}\int\limits_L f(\xi)\left(\xi-\frac{z+\zeta}{2}\right)(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}d\xi, \end{gathered}\tag{3}$$

где $f(z)=U+iV$ — аналитическая в D функция, такая, что $V\,|_l=0$, и продолженная по принципу симметрии в область D^* полуплоскости $x<0$; L — контур в $D+l+D^*$, соединяющий точки $\zeta=-x+iy$ и $z=x+iy$ [1]. Формулы (3) устанавливают взаимно однозначное соответствие между x^k-аналитическими и аналитическими функциями в D, мнимые части которых на l равны нулю (зависимость f от параметра k ни здесь, ни в дальнейшем отражаться не будет).

Поскольку система (1) при $k=0$ превращается в систему Коши—Римана, от представления x^k-аналитических функций естественно потребовать, чтобы оно было применимо при $k\geqslant 0$ и удовлетворяло условию

$$u_0+iv_0=f(z).\tag{4}$$

Между тем формулы (3) при $k=0$ неприменимы из-за неинтегрируемых особенностей, и чтобы удовлетворить указанному требованию, их нужно видоизменить и использовать в виде

$$\begin{gathered} u_k=\frac{k}{2}\int\limits_L f(\xi)\left(\frac{z-\zeta}{2}\right)^{1-k}(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}d\xi,\\ v_k=-k\,\frac{i}{2}\int\limits_L f(\xi)\left(\xi-\frac{z+\zeta}{2}\right)(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}d\xi. \end{gathered}\tag{5}$$

Представление (5), не отличаясь принципиально от (3) при $k > 0$, удобно тем, что его правые части при $k \to 0$ имеют пределы, которые мы и примем за u_0 и v_0. Чтобы вычислить эти пределы, следует выполнить в (5) замену $\xi = \zeta + \sigma(z - \zeta)$ и найти предел

$$\lim_{k\to 0} k\sigma^{k/2-1}(1-\sigma)^{k/2-1} = h(\sigma), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

Введем в рассмотрение левую $\delta^-(x)$ и правую $\delta^+(x)$ половины δ-функции, действующие по правилам

$$\int_{-\infty}^{0} \delta^-(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\varphi(0), \quad \int_{0}^{\infty} \delta^+(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\varphi(0),$$

$$\delta^-(x) + \delta^+(x) = \delta(x).$$

Поскольку для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$,

$$\lim_{k\to 0} k\int_{0}^{\varepsilon} \sigma^{k/2-1}(1-\sigma)^{k/2-1}d\sigma = \lim_{k\to 0} k\int_{1-\varepsilon}^{1} \sigma^{k/2-1}(1-\sigma)^{k/2-1}d\sigma = 2,$$

то, учитывая, что $h(\sigma) = 0$ при $0 < \sigma < 1$, будем иметь $h(\sigma) = 4(\delta^+(\sigma) + \delta^-(\sigma - 1))$. Пользуясь этим выражением, из формул (5) в пределе $k \to 0$ получим равенство (4).

В прикладных вопросах (в частности, в гидродинамике, где u_1 и v_1 означают потенциал и функцию тока осесимметричного течения несжимаемой жидкости) бывает полезным рассматривать u_k и v_k как функции от параметра k, непрерывно изменяющегося в некотором диапазоне (см. напр., [2], где функция тока течения жидкости изучалась в зависимости от k в диапазоне $-1 \leqslant k \leqslant 1$). В связи с этим встает вопрос об аналитическом продолжении представления x^k-аналитических функций (5) по меньшей мере на отрицательные значения параметра k.

Как следует из [3], формулы

$$u_k = m_k \frac{k}{2}\int_C f(\xi)\left(\frac{z-\zeta}{2}\right)^{1-k}(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}\,d\xi,$$

$$v_k = -m_k \frac{ik}{2}\int_C f(\xi)\left(\xi - \frac{z+\zeta}{2}\right)(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}d\xi, \tag{6}$$

$$m_k = \left(1 - \exp i2\pi\left(\frac{k}{2} - 1\right)\right)^{-2},$$

где C — двойная петля, охватывающая точки ζ и z, осуществляют аналитическое продолжение функций u_k и v_k (5) на любые комплексные значения k, но эти выражения неудобны для приложений. Поэтому будем искать такое представление x^k-аналитических функций, которое и при положительных и при отрицательных значениях k выражалось бы, аналогично (5), через интегралы по контуру L.

В переменных $z = x + iy$ и $\zeta = -x + iy$ уравнения (2) имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial z\partial\zeta} - \frac{k}{2(z-\zeta)}\frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{k}{2(z-\zeta)}\frac{\partial u_k}{\partial\zeta} = 0, \quad k \geqslant 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial z\partial\zeta} + \frac{k}{2(z-\zeta)}\frac{\partial v_k}{\partial z} - \frac{k}{2(z-\zeta)}\frac{\partial v_k}{\partial\zeta} = 0, \quad k \geqslant 0. \tag{8}$$

и являются частными случаями уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу [4 — 6]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\partial\zeta} - \frac{\beta}{(z-\zeta)}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\alpha}{(z-\zeta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) при $\alpha+\beta\neq 1$ имеет два линейно независимых частных решения

$$(z-\zeta)^{1-\alpha-\beta}(z-\xi)^{\beta-1}(\xi-\zeta)^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad (z-\xi)^{-\alpha}(\xi-\zeta)^{-\beta}, \tag{10}$$

где ξ — произвольный параметр [4]. Для уравнения (7) эти частные решения запишем в виде

$$a_k^1 = k\left(\frac{z-\zeta}{2}\right)^{1-k}(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}, \quad a_k^2 = (z-\xi)^{-k/2}(\xi-\zeta)^{-k/2},$$

а для (8) — в виде

$$b_k^1 = (z-\xi)^{k/2}(\xi-\zeta)^{k/2}, \quad b_k^2 = -k\left(\frac{z-\zeta}{2}\right)^{1+k}(z-\xi)^{-k/2-1}(\xi-\zeta)^{-k/2-1}.$$

Сопряженными парами решений будут

$$\varphi_k^1(z,\zeta,\xi) = a_k^1, \quad \psi_k^1(z,\zeta,\xi) = i\,\frac{\partial b_k^1}{\partial\xi} \tag{11}$$

и

$$\varphi_k^2(z,\zeta,\xi) = -i\,\frac{\partial a_k^2}{\partial\xi}, \quad \psi_k^2(z,\zeta,\xi) = b_k^2. \tag{12}$$

В качестве частных решений можно применять также любые производные и первообразные по ξ от функций (11) и (12). Подчеркнем, что во всех приведенных выше выражениях $k\geqslant 0$.

Используя первую пару частных решений (11), получим, что решениями уравнений (7) и (8), сопряженными между собой, будут также интегралы

$$u_k^1 = \frac{1}{2}\int_\zeta^z f(\xi)\,\varphi_k^1(z,\zeta,\xi)\,d\xi = \frac{k}{2}\int_\zeta^z f(\xi)\left(\frac{z-\zeta}{2}\right)^{1-k}(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}d\xi,$$

$$\begin{aligned} v_k^1 &= \frac{1}{2}\int_\zeta^z f(\xi)\,\psi_k^1(z,\zeta,\xi)\,d\,\xi = \\ &= -\frac{ik}{2}\int_\zeta^z f(\xi)\left(\xi-\frac{z+\zeta}{2}\right)(z-\xi)^{k/2-1}(\xi-\zeta)^{k/2-1}d\xi, \end{aligned} \tag{13}$$

где $f(z)$ — аналитическая функция в $D+l+D^*$. При условии $V|_l=0$ выражения (13) являются формулами Положего (5) для представления x^k-аналитических функций при $k\geqslant 0$.

Обратимся теперь к случаю $k<0$. Из уравнения (1) следует, что выражение $-v_{-k}^1+iu_{-k}^1$, $k>0$, является некоторой x^k-аналитической функцией с $k>0$, которую обозначим $u_k^2+iv_k^2$. Таким образом,

$$u_{-k}^1+iv_{-k}^1 = -i\,(u_k^2+iv_k^2), \quad k\geqslant 0, \tag{14}$$

т. е. аналитическое продолжение x^k-аналитической функции $u_k^1+iv_k^1$ на отрицательные значения k выражается через некоторую x^k-аналитическую функцию $u_k^2+iv_k^2$ с $k>0$. Для построения этой функции привлечем вторую пару частных решений (12), поскольку $\varphi_k^1+i\psi_k^1$ и $\varphi_k^2+i\psi_k^2$ удовлетворяют условию (14). Учитывая, что частное решение $\varphi_k^2+i\psi_k^2$ само по себе непригодно для представления $u_k^2+iv_k^2$ в виде, аналогичном (13), из-за получающихся неинтегрируемых особенностей в точках ζ и z, вместо φ_k^2 и ψ_k^2 будем использовать их первообразные по ξ:

$$\Phi_k^2 = -i\,(z-\xi)^{-k/2}(\xi-\zeta)^{-k/2}, \quad \Psi_k^2 = \frac{1}{2^{1+k}}\,A_{-k}\left(\frac{\xi-\zeta}{z-\zeta}\right),$$

где

$$A_{-k}(\sigma) = -k\int_{1/2}^{\sigma} t^{-k/2-1}(1-t)^{-k/2-1}dt, \quad k \geqslant 0.$$

При $k = 0$ функция $A_{-k}(\sigma)$ доопределяется своими предельными значениями

$$\lim_{k\to 0} A_{-k}(\sigma) = \begin{cases} -2, & \sigma = 0, \\ 0, & 0 < \sigma < 1, \\ 2, & \sigma = 1. \end{cases} \tag{15}$$

С помощью Φ_k^2 и Ψ_k^2 получим следующее представление для x^k-аналитической функции $u_k^2 + iv_k^2$, пригодное при $0 \leqslant k < 2$:

$$\begin{gathered} u_k^2 = \frac{i}{2}\int_{\zeta}^{z} f'(\xi)(z-\xi)^{-k/2}(\xi-\zeta)^{-k/2}d\xi, \\ v_k^2 = \frac{1}{2^{1+k}} N_{-k}(f(z)+f(\zeta)) - \frac{1}{2^{2+k}}\int_{\zeta}^{z} f'(\xi) A_{-k}\left(\frac{\xi-\zeta}{z-\zeta}\right)d\xi, \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$N_{-k} = \lim_{\sigma\to 1}\left(\sigma^{-k/2+1}(1-\sigma)^{-k/2} + \frac{1}{2}\sigma A_{-k}(\sigma)\right) =$$

$$= \lim_{\sigma\to 0}\left(\sigma^{-k/2}(1-\sigma)^{-k/2+1} - \frac{1}{2}(1-\sigma) A_{-k}(\sigma)\right).$$

Общая величина этих пределов равна

$$N_{-k} = 2^{k/2} + \frac{k}{2}\int_{1/2}^{1}(1-t)^{-k/2-1}(1-t^{-k/2-1})\,dt.$$

В справедливости формул (16) можно убедиться непосредственно с помощью уравнений (1).

Если перейти к первообразным для первой пары частных решений, то представление (13) функции $u_k^1 + iv_k^1$, $k \geqslant 0$, будет иметь вид

$$\begin{gathered} u_k^1 = \frac{1}{2^{1-k}} M_k(f(z)+f(\zeta)) - \frac{1}{2^{2-k}}\int_{\zeta}^{z} f'(\xi) A_k\left(\frac{\xi-\zeta}{z-\zeta}\right)d\xi, \\ v_k^1 = -\frac{i}{2}\int_{\zeta}^{z} f'(\xi)(z-\xi)^{k/2}(\xi-\zeta)^{k/2}\,d\xi, \end{gathered} \tag{17}$$

где $M_k = N_k = \frac{1}{2}A_k(1) = -\frac{1}{2}A_k(0)$, $k \geqslant 0$.

Равенство (4) следует из (17) в силу (15).

Нетрудно видеть, что выражения (16) и (17) являются аналитическими продолжениями друг друга по k в смысле равенства (14). Поэтому, выражение (17) может рассматриваться как единое представление x^k-аналитической функции $u_k + iv_k$, справедливое и при положительных и при отрицательных значениях $k > -2$ и превращающееся в представление Положего (13) для $k \geqslant 0$.

Отметим, что формулы (16) можно рассматривать также как самостоятельный вид представления x^k-аналитических функций при $k \geqslant 0$, отличный от представления Положего (13) и не сводимый к нему при $k \neq 1$ в силу линейной независимости решений (11) и (12).

Приведем формулы обращения представления (16) на прямолинейном контуре $y = \mathrm{const}$, для которого

$$u_k^2(x, y) = -\int_0^x \frac{\partial V(\xi, y)}{\partial x}(x^2 - \xi^2)^{-k/2}\, d\xi, \tag{18}$$

$$v_k^2(x, y) = 2^{-k} N_{-k} U(x, y) - 2^{-1-k}\int_0^x \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial x} A_{-k}\left(\frac{x+\xi}{2x}\right) d\xi, \tag{19}$$

причем

$$N_{-k}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U(2x\sigma - x, y)}{\partial x}\left(\sigma^{-k/2}(1-\sigma)^{-k/2} + \frac{1}{2}(2\sigma - 1) A_{-k}(\sigma)\right)\Bigg|_{\sigma=1/2}^{\sigma=1} =$$

$$= \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}\lim_{\sigma\to 1}\left(\sigma^{-k/2}(1-\sigma)^{-k/2} + \frac{1}{2}(2\sigma - 1) A_{-k}(\sigma)\right). \tag{20}$$

Выражение (18), представляющее собой уравнение типа Абеля [1], имеет обращение

$$V = -\frac{2}{B_k}\int_0^x \frac{\xi u_k^2(\xi, y)\, d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{1-k/2}} = -\frac{2}{kB_k}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \xi u_k^2(\xi, y)(x^2 - \xi^2)^{k/2}\, d\xi, \tag{21}$$

где $B_k = \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{k}{2}\right)$ и Γ — гамма-функция.

Пользуясь выражением (20), перепишем (19) в виде

$$\frac{\partial v_k^2}{\partial x} = x^k\int_0^x \frac{\partial^2 U(\xi, y)}{\partial x^2}(x^2 - \xi^2)^{-k/2} d\xi.$$

Отсюда следуют формулы обращения

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{B_k}\int_0^x \frac{\partial v_k^2(\xi, y)}{\partial x}\frac{\xi^{1-k} d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{1-k/2}} = \frac{2}{kB_k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x v_k^2(\xi, y)\,\xi^{-k}(x^2 - \xi^2)^{k/2}\, d\xi,$$

$$U = v_k^2(0, y)\left(\frac{2^k}{N_{-k}} - \frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1 - \frac{k}{2}\right)}\right) + \frac{2}{B_k}x\int^x \frac{v_k^2(\xi, y)\, d\xi}{\xi^k (x^2 - \xi^2)^{1-k/2}}. \tag{22}$$

Что касается формул обращения представления (17), то они отличаются от известных формул Положего [1] только за счет введенного множителя k. А именно, имеем

$$v_k^1 = k\int_0^x \xi V(\xi, y)(x^2 - \xi^2)^{k/2-1} d\xi, \quad V = \frac{2}{kB_k}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{\xi v_k^1(\xi, y)\, d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{k/2}},$$

$$u_k^1 = kx^{1-k}\int_0^x U(\xi, y)(x^2 - \xi^2)^{k/2-1} d\xi, \quad U = \frac{2}{kB_k}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{\xi^k u_k^1(\xi, y)\, d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{k/2}}. \tag{23}$$

Если последнее выражение использовать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{kB_k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{\xi^k u_k^1(\xi, y)\, d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{k/2}}, \tag{24}$$

то формулы обращения (23) и (24) путем замены k на $-k$ превращаются в формулы (21) и (22) (с учетом (14)).

В заключение заметим, что известная взаимосвязь между p-аналитическими функциями с характеристиками $p = x^k$ и $p = x^{k-2}$ [1, 6], позволяет ограничиться интегральным представлением таких функций только для $|k| \leqslant 1$, в качестве которого можно использовать формулы (17).

1. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций.— К. : Наук. думка, 1973.— 424 с.
2. *Garabedian P. R.* Calculation of axially symmetric cavities and jets.— Pac. J. Math., 1956, **6**, N 4, p. 611—684.
3. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 466 с.
4. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.— М. : Физматгиз, 1962.— 768 с.
5. *Poisson S. D.* Mèmoire sur l'intègration des equations linèaires aux diffèrences partielles.— J. ècole polytech. Ser. 1, 1823, **19**, p. 215—248.
6. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler — Poisson.— Proc. Symp. Appl. Math. (A. M. S.), 1954, **5**, p. 137—147.

Днепропетровск. гос. ун-т

Поступила в редакцию 31.03.82,
после переработки — 17.01.83