УДК 519.21

А. Ю. Шевляков

О фильтрации процессов с независимыми приращениями

1. Пусть $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$ — вероятностное пространство с заданными на нем независимыми сепарабельными стохастически непрерывными с вероятностью 1, непрерывными справа процессами $\eta_j(t)$ с независимыми приращениями, принимающими значения из R^1 и определенных при $t \in [0, T]$, $\eta_j(0) = 0$, $j = 1,2$, характеристические функции которых имеют вид

$$\mathbf{M} \exp\{iy(\eta_j(t) - \eta_j(s))\} = \exp\left\{ iy \int_s^t a_j(v)\, dv - \frac{y^2}{2} \int_s^t b_j(v)\, dv + \right.$$

$$\left. + \int_s^t \int_{|z|\leqslant 1} [e^{iyz} - 1 - iyz]\, \Pi_j(s, dz)\, ds + \int_s^t \int_{|z|\geqslant 1} [e^{iyz} - 1]\, \Pi_j(s, dz)\, ds \right\},$$

где $y \in R^1$, $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $a_j(v)$ — непрерывные функции, $b_j(v)$ — непрерывные неотрицательные функции, $\Pi_j(v, \Gamma)$ — непрерывные по v функции и меры по $\Gamma \in \mathfrak{B}_0 = \sigma\left\{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathfrak{B}_\varepsilon\right\}$, $\mathfrak{B}_\varepsilon$ — σ-алгебра борелевских подмножеств из $Z_\varepsilon = \{z : z \in R_1, |z| > \varepsilon\}$, для любого $\varepsilon > 0$ $\Pi_j(v, Z_\varepsilon) < \infty$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Z_\varepsilon} |z|^2\, \Pi_j(v, dz) < \infty. \tag{1}$$

Последнее условие даст нам

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{M} |\eta_j(t)|^2 < \infty.$$

Рассмотрим частично наблюдаемый процесс $\{\theta(t), \xi(t)\}$, причем $\theta(t) = a\eta_1(t) + \eta_2(t)$ — не наблюдаемая компонента, а $\xi(t) = b\eta_1(t) + \eta_2(t)$ — наблюдаемая, где a и b — произвольные постоянные. Требуется построить наилучшую в среднеквадратическом смысле оценку для процесса $\theta(t)$, основанную на значениях процесса $\xi(s)$ при $s \in [0, t]$. Как хорошо известно, эта оценка дается величиной $m(t) = \mathbf{M}\{\theta(t)/\mathfrak{F}_t\}$ с $\mathfrak{F}_t = \sigma\{\xi(s), s \in [0, t]\}$. Если $b = 0$, т. е. $\xi(t) = \eta_2(t)$, то $m(t) = a\mathbf{M}\eta_1(t) + \eta_2(t)$. Поэтому считаем, что $b \neq 0$.

Процесс $\xi(t)$ является сепарабельным стохастически непрерывным с вероятностью 1 непрерывным справа процессом с независимыми приращениями, допускающим разложение [1]

$$\xi(t) = \int_0^t a(s)\, ds + \xi_c(t) + \int z\tilde{\nu}(t, dz),$$

где

$$a(s) = b\left(a_1(s) + \int_{|z|>1} z\Pi_1(s, dz)\right) + a_2(s) + \int_{|z|>1} z\Pi_2(s, dz),$$

$\xi_c(t)$ — с вероятностью 1 непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями, $\mathbf{M}\xi_c(t) = 0$, $\mathbf{M}\xi_c^2(t) = \int\limits_0^t b(s)\,ds$, $b(s) = b^2 b_1(s) + b_2(s)$, $\nu(t, \Gamma) = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant s \leqslant t \\ \xi(s) - \xi(s-0) \neq 0}} \chi_\Gamma(\xi(s) - \xi(s-0))$, $\chi_\Gamma(z)$ — характеристическая функция множества $\Gamma \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, $\nu(t, \Gamma)$ — пуассоновский процесс, не зависящий от $\xi_c(t)$, $\mathbf{M}\nu(t, \Gamma) = \int\limits_0^t Q(s, \Gamma)\,ds$, $Q(s, \Gamma) = \Pi_1^{(b)}(s, \Gamma) + \Pi_2(s, \Gamma)$, $\Pi_1^{(b)}(s, \Gamma) = \Pi_1(s, \Gamma_b)$, $\Gamma_b = \{z : bz \in \Gamma\}$ и $\tilde{\nu}(t, \Gamma) = \nu(t, \Gamma) - \int\limits_0^t Q(s, \Gamma)\,ds$.

На протяжении всей работы нам будут необходимы стохастические интегралы по процессу $\xi_c(t)$ и мерам $\nu(t, \Gamma)$ и $\tilde{\nu}(t, \Gamma)$, определения и свойства которых можно найти в [1, 2].

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что*

а) *для всех* $s \in [0, T]$ $b(s) > 0$;

б) *мера* $\Pi_1^{(b)}(s, \Gamma)$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\Pi_2(s, \Gamma)$ и $\Pi_1^{(b)}(s, \Gamma) = \int\limits_\Gamma \rho(s, z)\,\Pi_2(s, dz)$.

Тогда с вероятностью 1

$$m(t) = \int\limits_0^t \left[a\left(a_1(s) + \int\limits_{|z|>1} z\Pi_1(s, dz)\right) + a_2(s) + \int\limits_{|z|>1} z\Pi_2(s, dz)\right] ds + $$

$$+ \int\limits_0^t \frac{abb_1(s) + b_2(s)}{b^2 b_1(s) + b_2(s)}\,d\xi_c(s) + \int\limits_0^t \int z\,\frac{a\rho(x, z) + b}{b\rho(s, z) + b}\,\tilde{\nu}(ds, dz) \qquad (2)$$

и, если $\gamma(t) = \mathbf{M}\{(\theta(t) - m(t))^2/\mathfrak{F}_t\}$, *то*

$$\gamma(t) = \int\limits_0^t \frac{b_1(s)\,b_2(s)\,(a-b)^2}{b^2 b_1(s) + b_2(s)}\,ds + \int\limits_0^t \int z^2\,\frac{\rho(s, z)\,(a-b)^2}{b^2(1 + \rho(s, z))^2}\,\nu(ds, dz). \qquad (3)$$

2. Для доказательства теоремы 1 мы получим обобщение формулы Кларка [3] для процессов с независимыми приращениями.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, определенная на R^n, и $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$, $n \geqslant 1$. Введем обозначения: $F(g) = F(g(t_1), \ldots, g(t_n))$ и $\frac{\partial F}{\partial x_j}(g) = \left.\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\right|_{x_1 = g(t_1), \ldots, x_n = g(t_n)}$, где $g(t)$ — произвольная функция со значениями из R^1.

Теорема 2. *Если* $F(x_1, \ldots, x_n)$ — *непрерывно дифференцируемая по всем переменным функция, ограниченная вместе со своими производными, то с вероятностью 1*

$$F(\xi) = \mathbf{M}F(\xi) + \int\limits_0^{t_n} \mathbf{M}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)\,\chi_s(t_j)/\mathfrak{F}_s\right\} d\xi_c(s) +$$

$$+ \int\limits_0^{t_n} \int \mathbf{M}\{F(\xi + z\chi_s) - F(\xi)/\mathfrak{F}_s\}\,\tilde{\nu}(ds, dz), \qquad (4)$$

где $\chi_s(t) = 1$ *при* $t \geqslant s$ и $\chi_s(t) = 0$ *при* $t < s$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$F_m(x_1, \ldots, x_n) = m^n \int\limits_{x_1}^{x_1 + \frac{1}{m}} \ldots \int\limits_{x_n}^{x_n + \frac{1}{m}} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_n \ldots dy_1, \quad m \geqslant 1.$$

Функции $F_m(x_1, \ldots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем переменным и ограничены по $(x_1, \ldots, x_n)$ вместе со своими производными первого и второго порядков. Кроме того,

$$\lim_{m\to\infty} F_m(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) \tag{5}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial F_m(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

равномерно на любом компакте в R^n.

Пусть $\alpha_m(s) = \mathbf{M}\{F_m(\xi)/\mathfrak{F}_s\}$, $0 \leqslant s \leqslant t_n$. При $s \in [t_{j-1}, t_j]$ $\alpha_m(s) = g_{jm}(s, \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{j-1}), \xi(s))$, где $g_{jm}(s, x_1, \ldots, x_{j-1}, x) = \mathbf{M}F_m(x_1, \ldots, x_{j-1}, \xi(t_j) - \xi(s) + x, \ldots, \xi(t_n) - \xi(s) + x)$. Функция $g(s, x) = g_{jm}(s, x_1, \ldots, x_{j-1}, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, ограничена вместе со своими производными и удовлетворяет уравнению [1]:

$$\frac{\partial g(s, x)}{\partial s} + a(s)\frac{\partial g(s, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} b(s)\frac{\partial^2 g(s, x)}{\partial x^2} + \\ + \int \left[g(s, x + z) - g(s, x) - \frac{\partial g(s, x)}{\partial x} z \right] Q(s, dz) = 0. \tag{7}$$

Применяя формулу Ито и учитывая (7), получаем

$$\alpha_m(t_j) - \alpha_m(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x}(s, \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{j-1}), \xi(s))\, d\xi_c(s) + \\ + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int [g_{jm}(s, \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{j-1}), \xi(s) + z) - g_{jm}(s, \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{j-1}), \xi(s))] \times \\ \times \tilde{\nu}(ds, dz). \tag{8}$$

Легко увидеть, что

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial x}(s, \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{j-1}), \xi(s)) = \mathbf{M}\left\{\sum_{k=j}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(\xi)/\mathfrak{F}_s\right\} \tag{9}$$

и

$$g_{jm}(s, \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{j-1}), \xi(s) + z) = \mathbf{M}\{F_m(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_{j-1}), \\ \xi(t_j) + z, \ldots, \xi(t_n) + z)/\mathfrak{F}_s\}. \tag{10}$$

Замечая, что

$$F_m(\xi) = \mathbf{M}F_m(\xi) + \sum_{j=1}^{n} [\alpha_m(t_j) - \alpha_m(t_{j-1})],$$

в силу (8) — (10) имеем

$$F_m(\xi) = \mathbf{M}F_m(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{M}\left\{\sum_{k=j}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(\xi)/\mathfrak{F}_s\right\} d\xi_c(s) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int \mathbf{M}\{F_m(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_{j-1}), \xi(t_j) + z, \ldots, \xi(t_n) + z) - \\ - F_m(\xi)/\mathfrak{F}_s\}\, \tilde{\nu}(ds, dz).$$

Отсюда, на основании определения функции $\chi_s(t)$, вытекает

$$F_m(\xi) = \mathbf{M}F_m(\xi) + \int_0^{t_n} \mathbf{M}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(\xi)\, \chi_s(t_j)/\mathfrak{F}_s\right\} d\xi_c(s) + \\ + \int_0^{t_n} \int \mathbf{M}\{F_m(\xi + z\chi_s) - F_m(\xi)/\mathfrak{F}_s\}\, \tilde{\nu}(ds, dz).$$

Принимая во внимание (5)—(6) и совершая здесь среднеквадратический предельный переход при $m \to \infty$, получаем формулу (4).

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, формула (4) имеет место не только для процессов с конечными моментами первого и второго порядков, но и для произвольных процессов.

Теорема 2 может быть обобщена в следующем направлении.

Обозначим через $D[0, T]$ пространство функций $g(t)$, $t \in [0, T]$, принимающих значения из R^1, не имеющих разрывов второго рода, непрерывных справа и в точке $t = T$.

Теорема 3. *Пусть $F(g)$ — функционал на $D[0, T]$, удовлетворяющий условиям:*

1) *$F(g)$ — ограничен и непрерывен в топологии Скорохода;*

2) *для всех $g, h \in D[0, T]$ $F(g+h) - F(g) = F'(g, h) + G(g, h)$;*

3) *$F'(g, h)$ непрерывен в топологии Скорохода по (g, h), $F'(g, h)$ — линейный функционал по h и $F'(g, h) \leqslant K\|h\|$, $\|h\| = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |h(t)|$;*

4) *равномерно по g $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{|G(g, h)|}{\|h\|} = 0$.*

Тогда с вероятностью 1

$$F(\xi) = \mathbf{M}F(\xi) + \int_0^T \mathbf{M}\{F'(\xi, \chi_s)/\mathfrak{F}_s\} \, d\xi_c(s) +$$

$$+ \int_0^T \int \mathbf{M}\{F(\xi + z\chi_s) - F(\xi)/\mathfrak{F}_s\} \tilde{\nu}(ds, dz). \qquad (11)$$

Доказательство. Введем обозначения: $S_n g(t) = g\left(\frac{k}{n} T\right)$ при $t \in \left[\frac{k}{n} T, \frac{k+1}{n} T\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и $S_n g(T) = g\left(\frac{n-1}{n} T\right)$. Из [1] вытекает, что последовательность $S_n g(t)$ при $n \to \infty$ сходится в топологии Скорохода к $g(t)$, и, следовательно, $F(g) = \lim\limits_{n \to \infty} F(S_n g)$ и $F'(g, h) = \lim\limits_{n \to \infty} F'(S_n g, S_n h)$. Кроме того, $F(S_n g) = F\left(g(0), \ldots, g\left(\frac{n-1}{n} T\right)\right)$, где $F(x_1, \ldots, x_n)$ в силу наших предположений — непрерывно дифференцируемая по всем переменным функция, ограниченная вместе со своими производными, причем $F'(S_n g, S_n h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(g) \, h\left(\frac{j-1}{n} T\right)$. Теперь, применив теорему 2, получаем

$$F(S_n \xi) = \mathbf{M}F(S_n \xi) + \int_0^{\frac{n-1}{n}T} \mathbf{M}\{F'(S_n \xi, S_n \chi_s)/\mathfrak{F}_s\} \, d\xi_c(s) +$$

$$+ \int_0^{\frac{n-1}{n}T} \int \mathbf{M}\{F(S_n(\xi + z\chi_s)) - F(S_n \xi)/\mathfrak{F}_s\} \tilde{\nu}(ds, dz).$$

Переходя здесь к среднеквадратическому пределу при $n \to \infty$, а законность предельного перехода, учитывая условия наложенные на $F(g)$, легко обосновать, будем иметь (11).

3. Приступим к доказательству теоремы 1. Введем обозначения: $t_j = \frac{jt}{2^n}$, $j = 0, 1, \ldots, 2^n$, $n \geqslant 1$, $J(y, u_1, \ldots, u_{2^n}) = \mathbf{M} \exp\left\{i \sum\limits_{j=1}^{2^n} u_j \xi(t_j) + iy\theta(t)\right\}$, $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ — функции, стоящие под лебеговским и стохастическим по $\xi_c(s)$ интегралами в (2), и $\psi(s, z) = (a\rho(s, z) + b)/(b\rho(s, z) + b)$.

Отметим, что для почти всех $(s, z) \in [0, T] \times R_1$ $|\varphi_2(s)| \leqslant \max\left\{\left|\frac{a}{b}\right|, 1\right\}$

и $|\psi(s, z)| \leqslant \max\left\{\left|\frac{a}{b}\right|, 1\right\}$. Поэтому стохастические интегралы в (2) определены.

Далее, с одной стороны

$$\left.\frac{\partial J(y, u_1, \ldots, u_{2^n})}{\partial y}\right|_{y=0} = i\mathbf{M}\theta(t) G(\xi), \tag{12}$$

где

$$G(x_1, \ldots, x_{2^n}) = \exp\left\{i \sum_{j=1}^{2^n} u_j x_j\right\}, \tag{13}$$

а с другой стороны, так как

$$J(y, u_1, \ldots, u_{2^n}) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Delta t_j} \left[i(ya + v_j b)\left(a_1(s) + \int_{|z|>1} z\Pi_1(s, dz)\right) + \right.\right.$$

$$+ i(y + v_j)\left(a_2(s) + \int_{|z|>1} z\Pi_2(s, dz)\right) - \frac{1}{2}\left[(ya + v_j b)^2 b_1(s) + (y + v_j)^2 b_2(s)\right] +$$

$$+ \int \left[e^{i(ya+v_jb)z} - 1 - i(ya + v_j b) z\right] \Pi_1(s, dz) + \int \left[e^{i(y+v_j)z} - 1 - \right.$$

$$\left.\left.\left. - i(y + v_j) z\right] \Pi_2(s, dz)\right] ds\right\}, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \quad v_j = u_j + \ldots + u_{2^n},$$

то

$$\left.\frac{\partial J(y, u_1, \ldots, u_{2^n})}{\partial y}\right|_{y=0} = \left[i \int_0^t \varphi_1(s)\, ds - A_n + iB_n\right] \mathbf{M}G(\xi), \tag{14}$$

где

$$A_n = \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Delta t_j} v_j (abb_1(s) + b_2(s))\, ds = \int_0^t \varphi_2(s) \sum_{j=1}^{2^n} u_j \chi_s(t_j) b(s)\, ds$$

и

$$B_n = \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Delta t_j} \left[\int az(e^{iv_jbz} - 1)\Pi_1(s, dz) + \int z(e^{iv_jz} - 1)\Pi_2(s, dz)\right] ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Delta t_j} \int z\left(\frac{a}{b}\rho(s, z) + 1\right)(e^{iv_jz} - 1)\Pi_2(s, dz)\, ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Delta t_j} \int z\psi(s, z)(e^{iv_jz} - 1) Q(s, dz)\, ds = \int_0^t \int z\psi(s, z)(G(z\chi_s) - 1) Q(s, dz)\, ds.$$

Записав для функции (13) формулу (4), на основании свойств стохастических интегралов получаем

$$i\mathbf{M} \int_0^t \varphi_2(s)\, d\xi_c(s) G(\xi) = i\mathbf{M} \int^t \mathbf{M}\left\{\sum_{j=1}^{2^n} \frac{\partial G}{\partial x_j}(\xi)\chi_s(t_j)/\mathfrak{F}_s\right\} \varphi_2(s) b(s)\, ds =$$

$$= -\mathbf{M} \int^t \sum^{2^n} u_j \chi_s(t_j) G(\xi) \varphi_2(s) b(s)\, ds = -A_n \mathbf{M}G(\xi), \tag{15}$$

и в силу равенства $G(g + h) = G(g) G(h)$

$$\mathbf{M} \int\int z\psi(s, z)\tilde{\nu}(ds, dz) G(\xi) = \mathbf{M} \int_0^t \int \mathbf{M}\{G(\xi + z\chi_s) - G(\xi)/\mathfrak{F}_s\} z\psi(s, z) \times$$

$$\times Q(s, dz)\,ds = \mathbf{M}\int_0^t\int z\psi(s, z)\,G(\xi)\,(G(z\chi_s) - 1)\,Q(s, dz)\,ds = B_n\mathbf{M}G(\xi). \quad (16)$$

Из (12) и (14) — (16) вытекает

$$\mathbf{M}\theta(t)\,G(\xi) = \mathbf{M}\left[\int_0^t \varphi_1(s)\,ds + \int_0^t \varphi_2(s)\,d\xi_c(s) + \int_0^t\int z\psi(s, z)\,\tilde{\nu}(ds, dz)\right]G(\xi).$$

Так как это равенство справедливо для функций $G(x_1, \ldots, x_{2n})$ вида (13), то оно справедливо и для произвольной ограниченной борелевской функции $G(x_1, \ldots, x_{2n})$. Тогда по определению условного математического ожидания

$$\mathbf{M}\{\theta(t)/\mathfrak{F}_t^{(n)}\} = \mathbf{M}\left\{\int_0^t \varphi_1(s)\,ds + \int_0^t \varphi_2(s)\,d\xi_c(s) + \int_0^t\int z\psi(s, z)\,\tilde{\nu}(ds, dz)/\mathfrak{F}_t^{(n)}\right\}, \quad (17)$$

где $\mathfrak{F}_t^{(n)} = \sigma\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_{2n})\}$. Но $\mathfrak{F}_t^{(n)} \subset \mathfrak{F}_t^{(n+1)}$ и $\mathfrak{F}_t = \sigma\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_t^{(n)}\right\}$. Следовательно, по теореме Леви [4] с вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\{\theta/\mathfrak{F}_t^{(n)}\} = \mathbf{M}\{\theta/\mathfrak{F}_t\}$ для любой случайной величины с конечным математическим ожиданием. Учитывая $\mathfrak{F}_t$-измеримость выражения, стоящего в правой части равенства (2), и устремляя в (17) n в бесконечность, устанавливаем формулу (2).

Докажем теперь (4).

Пусть $F(x_1, \ldots, x_{2^n})$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2. Не изменяя хода доказательства этой теоремы, нетрудно показать, что с вероятностью 1

$$F(\xi)\,m(t_{2^n}) = \mathbf{M}F(\xi)\,m(t_{2^n}) + \int_0^{t_{2^n}}\mathbf{M}\left\{\sum_{j=1}^{2^n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)\,\chi_s(t_j)\,m(t_{2^n}) + \right.$$

$$\left. + F(\xi)\,\varphi_2(s)/\mathfrak{F}_s\right\}d\xi_c(s) + \int_0^{t_{2^n}}\int\mathbf{M}\{F(\xi + \chi_s z)\,(m(t_{2^n}) + z\psi(s, z)) -$$

$$- F(\xi)\,m(t_{2^n})/\mathfrak{F}_s\}\,\tilde{\nu}(ds, dz). \quad (18)$$

Далее, аналогично (12) и (14), получаем

$$\left.\frac{\partial^2 J(y, u_1, \ldots, u_{2^n})}{\partial y^2}\right|_{y=0} = -\mathbf{M}\theta^2(t)\,G(\xi) \quad (19)$$

и

$$\frac{\partial^2 J(y, u_1, \ldots, u_{2^n})}{\partial y^2} = i\left[i\int_0^t \varphi_1(s)\,ds - A_n + iB_n\right]\mathbf{M}m(t)\,G(\xi) -$$

$$-\left[\int_0^t (a^2 b_1(s) + b_2(s))\,ds + C_n\right]\mathbf{M}G(\xi), \quad (20)$$

где

$$C_n = \sum_{j=1}^{2^n}\int_{\Delta t_j}\left[\int a^2 z^2 e^{iv_j bz}\Pi_1(s, dz) + \int z^2 e^{iv_j z}\Pi_2(s, dz)\right]ds =$$

$$= \int_0^t\int z^2\,\frac{a^2\rho(s, z) + b^2}{b^2\rho(s, z) + b^2}\,G(z\chi_s)\,Q(s, dz)\,ds$$

и интегралы по мерам Π_j и Q определены в силу (1).

Учитывая формулы (4) и (18), будем иметь

$$iMm(t)G(\xi)\left[i\int_0^t \varphi_1(s)\,ds - A_n + iB_n\right] =$$

$$= -M\left[m^2(t) - \int_0^t \frac{(abb_1(s)+b_2(s))^2}{b(s)}\,ds - \int_0^t\int z^2\psi^2(s,z)\,\nu(ds,dz)\right]G(\xi) \tag{21}$$

и

$$C_n MG(\xi) = M\int_0^t\int z^2\frac{a^2\rho(s,z)+b^2}{b^2\rho(s,z)+b^2}\,\nu(ds,dz)\,G(\xi). \tag{22}$$

Объединяя теперь (19) — (22), получаем

$$M\theta^2(t)G(\xi) = M\left[m^2(t) + \int_0^t \frac{(a-b)^2 b_1(s)\,b_2(s)}{b^2b_1(s)+b_2(s)}\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t\int z^2\frac{(a-b)^2\rho(s,z)}{b^2(1+\rho(s,z))^2}\,\nu(ds,dz)\right]G(\xi),$$

что и доказывает (3).

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями.— М. : Наука, 1965.— 280 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов : В 3-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 3. 496 с.
3. *Clarc I. M. C.* The representaition of functional of Brownian motion by stochastic integrals. AMS, 1971, 41, № 4, p. 46—56.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М.: Наука, 1971.— Т. 1. 664 с.

Донецк. гос. ун-т

Поступила в редакцию
18.04.82