УДК 513.88

О. Г. Строж

О максимальной диссипативности обыкновенных дифференциально-граничных и некоторых других операторов

Пусть H — фиксированное комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)$. Напомним [1—7], что линейный оператор $T:H \to H$ называется диссипативным (аккумулятивным), если при всех y из области определения $D(T)$ оператора T $\operatorname{Im}(Ty|y) \geqslant 0$ $(Im (Ty|y) \leqslant 0)$. Диссипативный (аккумулятивный) оператор называется максимальным, если он не имеет собственных диссипативных (аккумулятивных) расширений.

Так как все утверждения, касающиеся аккумулятивных операторов, могут быть без труда переформулированы в терминах диссипативных операторов, то в дальнейшем речь будет идти о последних, а именно будут установлены условия максимальной диссипативности одного класса линейных операторов в H, каждый из которых — конечномерное расширение некоторого симметрического, вообще говоря, неплотно заданного оператора. В случае дифференциальных операторов эти условия формулируются в терминах краевых форм.

1. Пусть L_0 — линейный замкнутый плотно заданный симметрический оператор в H с индексом дефекта $(m; m)$ $(m < \infty)$ и $L = L_0^*$. В дальнейшем применяется символ $D[L]$ для обозначения области определения $D(L)$ оператора L, рассматриваемой как гильбертово пространство относительно скалярного произведения $(\cdot \mid \cdot)_L$ графика оператора L. Кроме того, условимся обозначать через $R(T)$ и $Z(T)$ соответственно область значений и многообразие нулей оператора T, а через $(\cdot \mid \cdot)_k$ — стандартное скалярное произведение k-мерного арифметического комплексного пространства $\mathbf{C}$.

Определение 1. *Линейное непрерывное отображение* $\Gamma\colon D[L] \to \mathbf{C}^{2m}$ *называется полным краевым оператором (для пары* (L, L_0)*), если* $R(\Gamma) = \mathbf{C}^{2m}$, $Z(\Gamma) = D(L_0)$.

Определим оператор J следующим образом:

$$J = \begin{pmatrix} 0_m & -\mathrm{i}I_m \\ \mathrm{i}I_m & 0_m \end{pmatrix}$$

(0_m и I_m — соответственно нулевой и единичный операторы в $\mathbf{C}^m$). Ясно, что

$$J = J^* = J^{-1}. \tag{1}$$

Справедливость следующего утверждения вытекает непосредственно из результатов работ [8, 9].

Предложение 1. *Для всякого полного краевого оператора* Γ *существует единственный полный краевой оператор* $\widetilde{\Gamma}$, *такой, что при всех* $y, z \in D(L)$

$$(Ly \mid z) - (y \mid Lz) = (\Gamma y \mid \mathrm{i}J\widetilde{\Gamma} z)_{2m}. \tag{2}$$

При этом

$$\Gamma L_u \widetilde{\Gamma}^* = -\mathrm{i}J, \tag{3}$$

$$L_u = -\mathrm{i}\Gamma^* J\Gamma_u, \tag{4}$$

$$L_u^2 = -I_u, \tag{5}$$

где индекс и применяется для обозначения сужения соответствующего оператора на $D[L]\Theta_L D(L_0)$(Θ_L — *знак ортогонального дополнения относительно скалярного произведения* $(\cdot \mid \cdot)_L$.

Следствие 1. *В условиях предложения 1*

$$\Gamma = \mathrm{i}\Gamma L_u \Gamma^* J\widetilde{\Gamma}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как сужения операторов, стоящих в обеих частях соотношения (6), на $D(L_0)$ нулевые, то достаточно показать, что $\Gamma_u = i\Gamma L_u \Gamma^* J\widetilde{\Gamma}_u$. Но это следует из (4) и (5).

Лемма 1. *Пусть* Γ — *полный краевой оператор, а* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — *линейно независимые элементы из* H. *Для всяких* $c_1, \ldots, c_{2m+r} \in \mathbf{C}$ *существует* $y \in D(L)$, *такое, что* $\Gamma y = (c_1, \ldots, c_{2m})$, $(y \mid \varphi_i) = c_{2m+i}$, $i = 1, \ldots, r$.

Доказательство. Из определения полного краевого оператора следует, что существует $\widetilde{y} \in D(L)$, такое, что $\Gamma\widetilde{y} = (c_1, \ldots, c_{2m})$. Далее, так как функционалы $(\cdot \mid \varphi_i)$, $i = 1, \ldots, r$, линейно независимы на $D(L_0)$, то существуют $\psi_1, \ldots, \psi_r \in D(L_0)$, такие, что $(\psi_j \mid \varphi_i) = \delta_i^j$, $i, j = 1, \ldots, r$, δ — дельта Кронеккера. Ясно, что элемент $y = \widetilde{y} + \sum\limits_{j=1}^{r} (c_{2m+j} - (\widetilde{y} \mid \varphi_j))\psi_j$ — искомый.

В заключение настоящего пункта приведем одно утверждение, являющееся прямым следствием результатов, изложенных в [1] (теорема 1.1), [7] (теорема 1) и [10] (теорема 1).

Предложение 2. *Пусть* $H_0 \subset H$ — *конечномерное подпространство. Определим оператор* $\widehat{L}_0$ *следующим образом:* $\mathrm{D}(\widehat{L}_0) = D(L_0) \cap (H \ominus \ominus H_0)$, $\widehat{L}_0 \subset L_0$. *Если* T — *диссипативное расширение оператора* $\widehat{L}_0$, *то* а) $D(T) \subset D(L)$; б) T *максимально диссипативен тогда и только тогда, когда* $\dim(D(L)/D(T)) = m$.

2. Опишем основной объект нашего исследования. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, $r = 0, 1, \ldots, m$, — линейно независимые элементы из H, а $u_1, \ldots, u_{m+r}$ — линейно независимые $D[L] \to \mathbf{C}$-непрерывные линейные функционалы, аннулирующиеся на $D(L_0)$. Положим $\Phi y = ((y \mid \varphi_1), \ldots, (y \mid \varphi_r))$, $y \in H$; $Wy = (u_1(y), \ldots, u_{m+r}(y))$; $W_1 y = (u_1(y), \ldots, u_m(y))$; $W_2 y = (u_{m+1}(y), \ldots, u_{m+r}(y))$, $y \in D(L)$; $Pc = (c_1, \ldots, c_{m+r})$; $P_1 c = (c_1, \ldots, c_m)$; $P_2 c = (c_{m+1}, \ldots, c_{2m})$, где

$c = (c_1, \ldots, c_{2m}) \in \mathbf{C}^{2m}$. Кроме того, для всяких комплексных $c_1, \ldots, c_k$ условимся отождествлять векторы $(c_1, \ldots, c_k)$ и $(c_1, \ldots, c_k, 0, \ldots, 0)$.

Рассмотрим оператор S, определяемый условиями

$$D(S) = \{y \in D(L) : W_1 y = \Phi y\},$$

$$Sy = Ly + \Phi^* W_2 y, \quad y \in D(S).$$

Очевидно, что существует полный краевой оператор Γ, такой, что $W = P\Gamma$. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ существующий в силу предложения 1 единственный полный краевой оператор, определяемый по Γ из (2), и положим $\tilde{\Gamma}_i = P_i \tilde{\Gamma}$, $i = 1, 2$. Известно [8, 9], что S замкнут и плотно задан, а сопряженный оператор S^* может быть записан посредством следующих соотношений:

$$D(S^*) = \{z \in D(L) : \tilde{\Gamma}_1 z = \Phi z\}, \tag{7}$$

$$S^* z = Lz + \Phi^* \tilde{\Gamma}_2 z, \quad z \in D(S^*). \tag{8}$$

Лемма 2. *Для всех* $z \in D(S^*)$

$$\operatorname{Im}(-S^* z \mid z) = \frac{1}{2}((\mathrm{i}WLW^* - PJP) f \mid f)_{m+r}, \tag{9}$$

где $f = J\tilde{\Gamma} z$.

Доказательство. Пусть $z \in D(S^*)$. Учитывая, что при таких z $f \in \mathbf{C}^{m+r}$ и принимая во внимание (1), (2), (6)—(8), получаем $2\mathrm{i}\operatorname{Im}(S^* z \mid z) = (S^* z \mid z) - (z \mid S^* z) = (Lz \mid z) - (z \mid Lz) + (\Phi^* \tilde{\Gamma}_2 z \mid z) - (z \mid \Phi^* \tilde{\Gamma}_2 z) = (\Gamma z \mid \mathrm{i} J \tilde{\Gamma} z)_{2m} - (\tilde{\Gamma} z \mid \mathrm{i} J \tilde{\Gamma} z)_{2m} = (\mathrm{i}\Gamma L \Gamma^* f \mid \mathrm{i} f)_{2m} - (Jf \mid \mathrm{i} f)_{2m} = (\mathrm{i}WLW^* f \mid \mathrm{i} f)_{m+r} - (PJPf \mid \mathrm{i} f)_{m+r}$, что эквивалентно соотношению (9).

Теорема 1. *S максимально диссипативен тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{i}WLW^* \geqslant PJP. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть S максимально диссипативен. Тогда таковым же является и $-S^*$ [2]. Таким образом, (10) следует из (9) и из того, что в силу леммы 1 область значений оператора $J\tilde{\Gamma}$, суженного на $D(S^*)$, совпадает с $\mathbf{C}^{m+r}$.

Наоборот, пусть справедливо (10). Как показывает (9), в этом случае $-S^*$ — диссипативный, а следовательно (см. предложение 2), и максимальный диссипативный оператор. Поэтому тем же свойством обладает и $S = S^{**}$ [2].

Следствие 2. *Пусть S — произвольное максимальное диссипативное расширение оператора L_0. Существует линейное непрерывное отображение $W : D[L] \to \mathbf{C}^m$, такое, что $R(W) = \mathbf{C}^m$, $Z(W) \supset D(L_0)$ и $\mathrm{i}WLW^* \geqslant 0$, а S задается следующими условиями:*

$$D(S) = \{y \in D(L) : Wy = 0\}, \quad S \subset L. \tag{11}$$

Наоборот, при сделанных выше предположениях относительно W оператор S, определенный согласно (11), *является максимально диссипативным расширением оператора L_0.*

Доказательство. Так как каждое максимальное диссипативное расширение оператора L_0 является сужением оператора L (см. [4]), то справедливость нашего утверждения вытекает непосредственно из теоремы 1.

Следствие 3. *Пусть $w_1, \ldots, w_{m+r}$, $r = 0, 1, \ldots, m$, — линейно независимые по модулю $D(L_0)$ элементы из $D(L)$ и при всех $y, z \in D(L)$ $\{y, z\} \overset{\text{def}}{=} (Ly \mid z) - (y \mid Lz)$. Оператор S, определяемый соотношениями $D(S) = \{y \in D(L) : \{y, w_i\} = (y \mid \varphi_i),\ i = 1, \ldots, r,\ \{y, w_i\} = 0,\ i = r + 1, \ldots$*

$\ldots, m\}$, $Sy = Ly + \sum_{i=1}^{r} \{y, \omega_{m+i}\} \varphi_i$, $y \in D(S)$, *где* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — *линейно независимые элементы из* H, — *максимальный диссипативный тогда и только тогда, когда* $i\Omega \geqslant PJP$, *где* Ω — *линейный оператор в* $\mathbf{C}^{m+r}$, *соответствующий (в каноническом базисе этого пространства) матрице*

$$\begin{pmatrix} \{\omega_1, \omega_1\}, & \ldots, & \{\omega_{m+r}, \omega_1\} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \{\omega_1, \omega_{m+r}\}, & \ldots, & \{\omega_{m+r}, \omega_{m+r}\} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Положим для всех $y \in D(L)$ $Wy = (\{y, \omega_1\}, \ldots, \{y, \omega_{m+r}\})$. Непосредственные вычисления показывают, что $WLW^* = \Omega$. Поэтому для завершения доказательства достаточно применить теорему 1.

3. В настоящем пункте под L и L_0 мы понимаем соответственно максимальный и минимальный дифференциальные операторы, порожденные в $L_2(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, самосопряженным, регулярным в смысле [11] дифференциальным выражением порядка $2n$ с действительными коэффициентами. Применяя результаты работы [12], нетрудно перенести изложенные ниже утверждения на случай, когда $l[y]$ имеет нечетный порядок или комплексные коэффициенты. Известно [11], что L и L_0 взаимно сопряжены, в частности L_0 — симметрический оператор с индексом дефекта $(2n; 2n)$ и оператор Δ: $D[L] \to \mathbf{C}^{4n}$ такой, что

$$\Delta y = (y(a), y^{[1]}(a), \ldots, y^{[2n-1]}(a), y(b), y^{[1]}(b), \ldots, y^{[2n-1]}(b))$$

($y^{[k]}$ — квазипроизводная порядка k функции y относительно $l[y]$, [11, 12]) является полным краевым. Кроме того, при всех $y, z \in D(L)$

$$(Ly \mid z) - (y \mid Lz) = (B\Delta y \mid \Delta z)_{4n}, \tag{12}$$

где линейный оператор $B: \mathbf{C}^{4n} \to \mathbf{C}^{4n}$ определяется с помощью матрицы $E_n = \{e_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, такой, что

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i + j = n + 1, \\ 0, & i + j \neq n + 1, \end{cases}$$

следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & E_n & 0_n & 0_n \\ -E_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0 & 0_n & 0_n & -E_n \\ 0_n & 0_n & E_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть α_{ij}, β_{ij}, $i = 1, \ldots, 2n + r$, $j = 1, \ldots, 2n$, — произвольные комплексные числа, такие, что ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,2n}, & \beta_{1,1}, \ldots, \beta_{1,2n} \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{2n+r,1}, \ldots, \alpha_{2n+r,2n}, & \beta_{2n+r,1}, \ldots, \beta_{2n+r,2n} \end{pmatrix}$$

равен $2n + r$, $r = 0, 1, \ldots, 2n$,

$$u_i(y) = \sum_{j=1}^{2n} (\alpha_{ij} y^{[j-1]}(a) + \beta_{ij} y^{[j-1]}(b)), \quad y \in D(L), \quad i = 1, \ldots, 2n + r,$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — линейно независимые элементы из $L_2(a, b)$.

Рассмотрим дифференциально-граничный оператор S:

$$D(S) = \{y \in D(L) : u_i(y) = (y \mid \varphi_i),\ i = 1, \ldots, r,\ u_i(y) = 0,\ i = r + 1, \ldots, 2n\},$$

$$Sy = Ly + \sum_{i=1} u_{2n+i}(y) \varphi_i, \quad y \in D(S).$$

Теорема 2. *S максимально диссипативен тогда и только тогда, когда $iABA^* \geqslant PJP$, где P — каноническая проекция $\mathbf{C}^{4n} \to \mathbf{C}^{2n+r}$.*

Доказательство. Так как $B^{-1} = -B$, то из (3) и (12) следует, что $\Delta L \Delta^* = B$. Поэтому справедливость доказываемого утверждения вытекает из теоремы 1.

Замечание. Применяя теорему 2 при $r = 0$, легко получить описание максимальных диссипативных расширений оператора L_0 (ср. со следствием 2). Далее, исходя из этой теоремы, можно вывести условия самосопряженности рассматриваемого оператора, которые исследовались в [13, 14].

1. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, 32, № 1, с. 186—207.
2. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Мир, 1970.— 432 с.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
4. *Филлипс Р. С.* Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных.— Математика. Сб. переводов, 1962, 6, № 4, с. 11—70.
5. *Горбачук М. Л., Кочубей А. Н., Рыбак М. А.* Диссипативные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— Докл. АН СССР, 1972, 205, № 5, с. 1029—1032.
6. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.— Мат. заметки, 1975, 17, № 1, с. 41—48.
7. *Кочубей А. Н.* О расширениях неплотно заданного симметрического оператора.—Сиб. мат. журн., 1977, 18, № 2, с. 314—320.
8. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве.— В сб. : Теория функций, функцион. анализ и их прилож. Харьков, 1972, вып. 16, с. 165—186.
9. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Условия взаимной сопряженности некоторых замкнутых операторов в терминах абстрактных граничных операторов.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1980, № 6, с. 29—32.
10. *Coddington E. A.* Self-adjoint subspaces extensions of nondensely defined symmetric operators.— Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, N 4, p. 712—715.
11. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 528 с.
12. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— В сб. : Теория функций, функцион. анализ и их прилож. Харьков, 1969, вып. 8, с. 3—24.
13. *Сторож О. Г.* Самоспряжені оператори, споріднені диференціальним.— Доп. АН УРСР. Сер. А., 1974, № 2, с. 134—137.
14. *Сторож О. Г.* Условия самосопряженности некоторых дифференциально-граничных операторов.— В кн. : Граничные задачи для дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1980, с. 193—199.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов

Поступила в редакцию
08.04.82