УДК 519.53

В. А. Романов

Предельные переходы с мерами в гильбертовом пространстве относительно различных видов сходимости

Пусть H — линейная оболочка ортонормированного базиса в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X. В данной работе исследован вопрос о том, какие меры в пространстве X могут быть представлены как пределы H-квазиинвариантных, бесконечно H-дифференцируемых и H-непрерывных мер относительно различных видов сходимости.

1. Под мерами понимаются конечные неотрицательные счетноаддитивные функции множества, заданные на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X.

Под сдвигом меры μ на вектор h понимается мера μ, задаваемая на измеримых множествах B формулой $\mu_h(B) = \mu(B + h)$.

Мера μ называется H-квазиинвариантной, если для каждого $h \in H$ меры μ, μ_h эквивалентны, т. е. имеют одинаковый запас множеств нулевой меры (H-квазиинвариантные меры подробно исследованы в [1], гл. 4; [2]).

Напомним, что мера μ называется h-дифференцируемой (дифференцируемой по направлению h) в смысле Фомина [3], если для любого измеримого множества B существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\mu(B + th) - \mu(B)).$$

Пусть $E(X)$ — множество всех вещественнозначных ограниченных непрерывных функций на X. Мера μ называется h-дифференцируемой в смысле Скорохода (см. [1], § 21), если для любой функции $f \in E(X)$ существует предел

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_X (f(x + th) - f(x))\, d\mu(x).$$

Из двух определений дифференцируемости меры более широким является определение А. В. Скорохода.

По индукции определяется n-кратная дифференцируемость для любого натурального n. Меру называем бесконечно H-дифференцируемой, если для каждого n она n-кратно дифференцируема по всем направлениям из H.

Меру μ называем h-непрерывной, если

$$\lim_{t\to 0} \| \mu_{th} - \mu \| = 0,$$

где $\|\cdot\|$ означает вариацию. Меру называем H-непрерывной, если она h-непрерывна для любого $h \in H$. Понятие H-непрерывной меры введено в работе [4].

Из h-дифференцируемости меры (в смысле любого из двух приведенных определений) легко следует ее h-непрерывность. Поэтому множество всех H-непрерывных мер шире множества всех H-дифференцируемых мер. Как доказано в теореме 1 работы [5], множество всех H-непрерывных мер шире и множества всех H-квазиинвариантных мер.

На множестве $M = M(X)$ всех мер, заданных на борелевских подмножествах пространства X, рассматриваются три вида сходимости.

1. Сходимость последовательности мер μ_n к мере μ по вариации означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \| \mu_n - \mu \| = 0. \tag{1}$$

2. Последовательность мер μ_n называется сходящейся к мере μ на каждом измеримом множестве, если для любого измеримого множества B

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B). \quad (2)$$

3. Слабая сходимость последовательности мер μ_n к мере μ означает, что для любой функции $f \in E(X)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\, d\mu_n(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x). \quad (3)$$

Из условия (1) вытекает условие (2), а из условия (2) — условие (3). Общие свойства указанных видов сходимости мер описаны в работах [6], гл. 3, 4; [7]; [8], гл. 9, §1.

2. Рассмотрим предельные переходы с мерами относительно сходимостей по вариации и на каждом измеримом множестве.

Предложение 1. *Множество всех H-непрерывных мер в пространстве X замкнуто относительно операции предельного перехода в смысле сходимости на каждом измеримом множестве.*

Доказательство. Пусть для меры μ существует такая последовательность H-непрерывных мер μ_n, что для любого измеримого множества B выполняется условие (2). Не уменьшая общности, можно считать, что $\mu_n(X) \neq 0$. Рассмотрим новую меру λ, задаваемую на каждом измеримом множестве B формулой

$$\lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\mu_n(X))^{-1} \mu_n(B). \quad (4)$$

Выполнимость условия счетной аддитивности для функции множества λ вытекает из теоремы Никодима (см. [6], с. 177).

Из формулы (4) следует, что мера λ представима как предел в смысле сходимости по вариации последовательности H-непрерывных мер λ_m, задаваемых формулами

$$\lambda_m(B) = \sum_{n=1}^{m} 2^{-n}(\mu_n(X))^{-1}\mu_n(B), \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Отсюда и из предложения 1 работы [5] о замкнутости множества H-непрерывных мер относительно операции предельного перехода по вариации получаем, что мера λ H-непрерывна.

Из формулы (4) вытекает, что для каждого натурального числа n мера μ абсолютно непрерывна по мере λ. Отсюда и из соотношения (2) следует, что мера μ также абсолютно непрерывна по мере λ. Согласно теореме 1 работы [9], мера, абсолютно непрерывная по H-непрерывной мере, тоже H-непрерывна. Поэтому мера μ H-непрерывна. Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть M_1 — множество всех H-непрерывных, M_2 — всех H-квазиинвариантных, M_3 — всех бесконечно H-дифференцируемых, M_4 — всех одновременно H-квазиинвариантных и бесконечно H-дифференцируемых мер в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X.*

Тогда при любом i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, множества $M_i(v)$ и $M_i(w)$ всех тех мер в пространстве X, которые представимы соответственно как пределы в смысле сходимости по вариации и как пределы в смысле сходимости на каждом измеримом множестве последовательностей мер из M_i, совпадают с множеством M_1 всех H-непрерывных мер.

Замечание 1. В условиях теоремы 1 дифференцируемость мер может пониматься как в смысле Фомина, так и в смысле Скорохода.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что $M_4 = M_2 \cap M_3 \subset \subset M_2 \cup M_3 \subset M_1$. Отсюда и из того факта, что более сильному виду сходимости соответствует меньший запас сходящихся последовательностей, вытекает, что все восемь множеств $M_i(v)$, $M_i(w)$, $i = 1,2,3,4$, являются подмножествами множества $M_1(w)$ и включают в себя множество $M_4(v)$.

Поэтому справедливость теоремы будет установлена, если докажем, что

$$M_1(w) = M_4(v) = M_1. \tag{5}$$

Согласно теореме 2 работы [10], каждая H-непрерывная мера может быть представлена как предел в смысле сходимости по вариации последовательности таких мер, которые одновременно H-квазиинвариантны и бесконечно H-дифференцируемы. Следовательно,

$$M_1 \subset M_4(v) \subset M_1(w). \tag{6}$$

Из предложения 1 получаем, что $M_1 = M_1(w)$. Отсюда и из соотношений (6) и вытекают равенства (5). Теорема доказана.

3. Рассмотрим случай слабой сходимости мер. Естественно ожидать, что в этом случае запас сходящихся последовательностей мер соответствующих классов должен возрасти по сравнению со случаями сходимости по вариации и сходимости на каждом измеримом множестве. Это подтверждает следующая теорема.

Теорема 2. *Любая мера μ в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X может быть представлена как предел относительно слабой сходимости некоторой последовательности таких мер μ_n, которые одновременно H-квазиинвариантны и бесконечно H-дифференцируемы.*

Доказательство. Если мера μ нулевая, то утверждение теоремы очевидно, а если мера ненулевая, то, умножив ее на некоторый положительный скаляр, можно добиться, чтобы мера стала вероятностной. Следовательно, не уменьшая общности, можно считать, что мера μ вероятностная.

Докажем, что можно построить соответствующую последовательность (μ_n), состоящую из таких мер, которые не только одновременно H-квазиинвариантны и бесконечно H-дифференцируемы, но к тому же и вероятностные.

Известно, что слабая сходимость вероятностных мер в сепарабельном пространстве порождается некоторой метрикой, называемой метрикой Прохорова, а множество вероятностных мер с конечными носителями всюду плотно в пространстве вероятностных мер, наделенном этой метрикой (см. [7], добавление 3, теоремы 4, 5).

Поэтому доказательство теоремы достаточно провести для случая, когда μ — вероятностная мера с конечным носителем $F=\{x_1, \ldots, x_p\}$. Обозначим $\alpha_i = \mu\{x_i\}$. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1. \tag{7}$$

Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в пространстве X, линейная оболочка которого совпадает с H, A — линейный оператор, матрица которого диагональна в базисе $\{e_n\}$ и собственные значения которого равны $1/n$, m—гауссова мера с нулевым средним и корреляционным оператором A^2.

Согласно теореме 5.3.1 работы [11], мера m бесконечно дифференцируема по подпространству $A(X)$. Кроме того, эта гауссова мера квазиинвариантна по подпространству $A(X)$. Поскольку $A(X) \supset A(H)$ и $A(H) = H$, отсюда следует, что мера m бесконечно H-дифференцируема и H-квазиинвариантна.

Пусть δ — наибольшее из расстояний между парами точек конечного носителя F меры μ, n — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию $(1/n) < \delta$. Тогда открытые шары $U_i = U(x_i, 1/n)$ с центрами в точках $x \in F$ радиуса $1/n$ попарно не пересекаются. Пусть $\psi_{n,i}$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на X, отличная от нуля в точке x_i, равная нулю вне шара U_i и ограниченная вместе со всеми своими дифференциалами любых порядков. Умножив эту функцию на некоторый положительный скаляр, можно добиться того, чтобы

$$\int_{U_i} \psi_{n,i}(x)\, dm(x) = 1. \tag{8}$$

Обозначим

$$\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\psi_{n,i}(x),\quad g_n(x)=(1/n)+(1/n-1)\varphi_n(x). \tag{9}$$

Тогда φ_n, g_n будут бесконечно дифференцируемыми и ограниченными вместе со всеми своими дифференциалами любых порядков функциями, причем функция g_n строго положительна.

Рассмотрим меру $\mu_n=g_n m$. Из теоремы 2.2.1 работы [11] следует, что мера μ_n бесконечно H-дифференцируема. Из положительности функции g_n вытекает, что мера μ_n, задаваемая как произведение этой функции на меру m, эквивалентна гауссовой мере m и, следовательно, H-квазиинвариантна. Из соотношений (7)—(9) вытекает, что мера μ_n вероятностная.

Пусть теперь $f\in E(X)$. Обозначим

$$L=\sup_{x\in X}|f(x)|. \tag{10}$$

Из построения меры μ_n вытекает, что

$$\int_X f(x)\,d\mu_n(x)=\frac{1}{n}\int_X f(x)\,dm(x)+\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{p}\int_{U_i} f(x)\,\alpha_i\psi_{n,i}(x)\,dm(x). \tag{11}$$

Из соотношений (10), (11), а также из равенства

$$\int_X f(x)\,d\mu(x)=\sum_{i=1}^{p}\int_{U_i} f(x_i)\,\alpha_i\psi_{n,i}(x)\,dm(x)$$

следует, что

$$\left|\int_X f(x)\,d\mu_n(x)-\int_X f(x)\,d\mu(x)\right|\leqslant\frac{L}{n}+\left(\frac{L}{n}+\max_{1\leqslant i\leqslant p}\sup_{x\in U_i}|f(x)-f(x_i)|\right)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{p}\int_{U_i}\alpha_i\psi_{n,i}(x)\,dm(x). \tag{12}$$

Из равенств (7), (8) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{U}\alpha_i\psi_{n,i}(x)\,dm(x)=1.$$

Отсюда, а также из непрерывности функции f, следует, что при $n\to\infty$ правая часть неравенства (12) имеет нулевой предел. Поэтому из неравенства (12) вытекает, что выполняется условие (3). Таким образом, последовательность (μ_n) обладает всеми необходимыми свойствами. Теорема доказана.

1. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1975.— 230 с.
2. *Скороход А. В.* О допустимых сдвигах мер в гильбертовом пространстве.—Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, вып. 4, с. 577—598.
3. *Фомин С. В.* Дифференцируемые меры в линейных пространствах.—Успехи мат. наук, 1968, 23, вып. 1, с. 221—222.
4. *Романов В. А.* О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах.— Докл. АН СССР, 1976, 227, № 3, с. 569—570.
5. *Романов В. А.* Пределы квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 2, с. 211—214.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.
7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 352 с.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М. : Наука, 1977.—568 с.
9. *Романов В. А.* Об H-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве.— Вестник Московск. ун-та. Мат., мех., 1977, № 1, с. 81—85.

10. *Романов В. А.* Пределы дифференцируемых мер в гильбертовом пространстве. —Укр. мат. журн., 1981, 33, № 2, с. 215—219.
11. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. 1. Дифференцируемые меры.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1971, **24**, с. 133—174.

Кировоград. пед. ин-т

Поступила в редакцию
05.04.82