УДК 517.911

Н. А. Перестюк

Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем

В статье с помощью идей из [1—3] исследуется вопрос существования инвариантных множеств одного класса линейных и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений, подвергающихся импульсному воздействию в момент попадания изображающей точки в заданные множества фазового пространства.

Полученные результаты дополняют исследования, проведенные в [4].

1. Линейные системы. Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&dx/dt = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \bar{\in} \Gamma, \\
&d\varphi/dt = \omega, \\
&\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = I(\varphi),
\end{aligned} \tag{1}
$$

в которой $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — векторы с положительными компонентами; $f(\varphi)$ и $I(\varphi)$ — непрерывные (кусочно непрерывные с разрывами первого рода на множестве Γ) функции, 2π-периодические по каждой компоненте φ_j, $j = \overline{1, m}$; $A(\varphi)$ — непрерывная 2π-периодическая по каждой компоненте φ_j квадратная матрица.

Точку $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ будем интерпретировать как точку m-мерного тора $\mathscr{T}^m$, так что областью определения функций $A(\varphi)$, $f(\varphi)$ и $I(\varphi)$ будет тор $\mathscr{T}^m$. Относительно множества Γ предполагаем, что оно является подмножеством тора $\mathscr{T}^m$ и представляет собой многообразие размерности $m - 1$, которое можно определить уравнением $\Phi(\varphi) = 0$, где $\Phi(\varphi)$ — скалярная функция переменной φ, непрерывная и 2π-периодическая по φ.

Обозначим через $t = t_i(\varphi)$ решения уравнения

$$\Phi(\varphi + \omega t) = 0. \tag{2}$$

Пусть функция $\Phi(\varphi)$ такая, что уравнение (2) имеет решения $t = t_i(\varphi)$, так как в противном случае система уравнений (1) не подвергалась бы импульсному воздействию и превратилась в обычную динамическую систему.

Лемма 1. *Для любого решения $t = t_i(\varphi)$ уравнения (2) справедливо равенство для всех $\varphi \in \mathscr{T}^m$, $t \in R$:*

$$t_i(\varphi - \omega t) - t_i(\varphi) = t. \tag{3}$$

Доказательство. Если $t_i(\varphi)$ — решение уравнения (2), то при всех $\varphi \in \mathscr{T}^m$ имеем $\Phi(\varphi + \omega t_i(\varphi)) = 0$. При любом $t \in R$ точка $\varphi - \omega t$ принадлежит $\mathscr{T}^m$. Поэтому, заменяя φ на $\varphi - \omega t$, имеем $\Phi(\varphi - \omega t + \omega t_i(\varphi - \omega t)) = 0$. Отсюда следует, что при некотором j и всех $\varphi \in \mathscr{T}^m$, $t \in R$

$$t_i(\varphi - \omega t) - t = t_j(\varphi). \tag{4}$$

При $t = 0$ из (4) при любом $\varphi \in \mathscr{T}^m$ имеем $t_i(\varphi) = t_j(\varphi)$, следовательно, $i = j$, что и доказывает лемму.

Пусть $G(t, \tau, \varphi)$, $G(\tau, \tau, \varphi) = E$, — фундаментальная матрица системы уравнений

$$dx/dt = A(\varphi + \omega t)x. \tag{5}$$

Непосредственно убеждаемся, что $G(t, \tau, \varphi)$ удовлетворяет равенствам

$$G(t, \tau, \varphi + 2\pi) = G(t, \tau, \varphi), \quad G(t, t + \tau, \varphi - \omega t) = G(0, \tau, \varphi) \tag{6}$$

для всех $t, \tau \in R$ и $\varphi \in \mathscr{T}^m$.

Пусть матрица $G(t, \tau, \varphi)$ и функции $t_i(\varphi)$ таковы, что функции

$$x_t(\varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t, \tau, \varphi) f(\varphi + \omega\tau)\, d\tau + \sum_{t_i(\varphi) < t} G(t, t_i(\varphi), \varphi) I(\varphi + \omega t_i(\varphi)), \tag{7}$$

зависящие от φ как от параметра, определены при всех $t \in R$ и равномерно ограничены. Достаточные условия сходимости интеграла и суммы из (7) приведены ниже.

Положим $x_t(\varphi) = u(\varphi + \omega t)$ и заменим в (7) φ на $\varphi - \omega t$. Тогда с учетом (3) и (6) получим

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t, \tau, \varphi - \omega t) f(\varphi + \omega(\tau - t))\, d\tau + \sum_{t_i(\varphi - \omega t) < t} G(t, t_i(\varphi - \omega t), \varphi - \omega t) \times$$

$$\times I_i(\varphi+\omega(t_i(\varphi-\omega t)-t)) = \int\limits_{-\infty}^{0} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi+\omega\tau)\,d\tau +$$

$$+ \sum_{t_i(\varphi)<0} G(0, t_i(\varphi), \varphi) I(\varphi+\omega t_i(\varphi)). \qquad (8)$$

В предположении, что интеграл и сумма в (7) равномерно сходящиеся, получаем, что функция $u(\varphi)$ определяет инвариантное множество системы уравнений (1):

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi+2\pi) = u(\varphi). \qquad (9)$$

Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся, что $x_t(\varphi) = u(\varphi+ +\omega t)$ при $t \neq t_i(\varphi)$, т. е. при $\varphi+\omega t_i(\varphi) \overline{\in} \Gamma$, удовлетворяет уравнению

$$dx/dt = A(\varphi+\omega t)x + f(\varphi+\omega t),$$

а при $t = t_i(\varphi)$ — условию скачка:

$$\Delta x = u(\varphi+\omega(t_i+0)) - u(\varphi+\omega(t_i-0)) = I(\varphi+\omega t_i(\varphi)),$$

т. е. $(x_t(\varphi), \varphi+\omega t)$ — решение исходных уравнений (1).

Отметим, что для сходимости интеграла и суммы из (7) достаточно, чтобы функция $G(t, \tau, \varphi)$ удовлетворяла неравенству

$$\| G(t, \tau, \varphi) \| \leqslant K \exp(-\gamma(t-\tau)) \qquad (10)$$

для всех $t, \tau \in R$, $t \geqslant \tau$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ при некоторых положительных K и γ, а решения уравнения (2) $t_i(\varphi)$ были такими, что

$$t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geqslant \theta > 0 \qquad (11)$$

для всех $i \in Z$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ и некоторого $\theta > 0$.

При указанных условиях из (7) имеем

$$\| x_t(\varphi) \| \leqslant K/\gamma \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| f(\varphi) \| + K/(1-\exp(-\gamma\theta)) \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| I(\varphi) \| \qquad (12)$$

для всех $t \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}^m$. Поэтому можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений* (1) 2π*-периодические функции* $f(\varphi)$ *и* $I(\varphi)$ *непрерывны на* $\mathcal{T}^m$ (*кусочно непрерывные с разрывами первого рода при* $\varphi \in \Gamma$); $A(\varphi)$ —*непрерывная на* $\mathcal{T}^m$ 2π*-периодическая матрица.*

Если матрица $G(t, \tau, \varphi)$ *удовлетворяет оценке* (10), *а функции* $t_i(\varphi)$ — *неравенству* (11), *то система уравнений* (1) *имеет асимптотически устойчивое инвариантное множество*

$$x = u(\varphi), \; u(\varphi+2\pi) = u(\varphi),$$

где $u(\varphi)$ — *кусочно непрерывная с разрывами первого рода на множестве* Γ *функция. При этом можно указать такую постоянную* C, *не зависящую от функций* $f(\varphi)$ *и* $I(\varphi)$, *что*

$$\| u(\varphi) \| \leqslant C \max\{\max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| f(\varphi) \|, \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| I(\varphi) \|\}. \qquad (13)$$

В условиях теоремы инвариантное множество $x = u(\varphi)$ определяется функцией $u(\varphi)$ из соотношения (8). Оценка (13) следует из (12), если положить $C = \max\{K/\gamma, K/1-\exp(-\gamma\theta)\}$.

Асимптотическая устойчивость инвариантного множества следует из того, что в силу неравенства (9) любое решение $(x_t = x_t(x_0), \varphi_t = \varphi_0 + +\omega t)$ исходного уравнения притягивается к решению $(u(\varphi_0+\omega t), \varphi_0 + +\omega t)$, лежащему на инвариантном множестве.

Укажем случай, когда матрица $G(t, \tau, \varphi)$ и корни уравнения (2) удовлетворяют соответственно неравенствам (10) и (11). Обозначим через $\Lambda(\varphi)$ наибольшее из собственных чисел симметрической матрицы $A^*(\varphi) = 1/2 \times \times (A(\varphi) + A'(\varphi))$, где $A'(\varphi)$ — транспонированная по отношению к

$A(\varphi)$ матрица. Согласно неравенству Важевского, для любого решения $x(t)$ системы уравнений

$$dx/dt = A(\varphi + \omega t)\, x \tag{14}$$

справедливо неравенство

$$\| x(t)\| \leqslant \exp\left(\int_{\tau}^{t} \Lambda(\varphi + \omega\sigma)\, d\sigma\right) \| x(\tau)\|, \quad t \geqslant \tau, \quad \| x\|^2 = \langle x, x\rangle. \tag{15}$$

Поэтому если существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} \Lambda(\varphi + \omega\sigma)\, d\sigma = \lambda \tag{16}$$

равномерно относительно $t \in R$ и $\lambda < 0$, то матрица $G(t, \tau, \varphi)$ удовлетворяет неравенству (10).

Если компоненты вектора ω рационально независимы, т. е. равенство $\langle k, \omega\rangle = 0$, где $k = (k_1, \ldots, k_m)$ — вектор с целочисленными компонентами, возможно лишь для нулевого вектора k, то траектории уравнения $\dot{\varphi} = \omega$ на торе $\mathcal{T}^m$ равномерно распределены и временное среднее от функции $\Lambda(\varphi)$ равно пространственному среднему. Таким образом, если

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{0}^{2\pi} \cdots \int_{0}^{2\pi} \Lambda(\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m < 0, \tag{17}$$

то матрица $G(t, \tau, \varphi)$ удовлетворяет неравенству (10).

Предположим, что функция $\Phi(\varphi)$, определяющая множество Γ, имеет вид $\Phi(\varphi) = \Phi_0(\langle a, \varphi\rangle)$, где $\Phi_0(s)$ — периодическая по s с периодом 2π функция с конечным числом p нулей на периоде, $a = (a_1, \ldots, a_m)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами. Покажем, что при таком предположении решения уравнения (2) удовлетворяют условию (11). В самом деле, пусть $s_1, \ldots, s_p$ — корни уравнения $\Phi_0(s) = 0$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$. Каждому корню s_j соответствует семейство решений уравнения (2)

$$t = t_k^j(\varphi) = (-\langle a, \varphi\rangle + s_j + 2k\pi)/\langle a, \omega\rangle. \tag{18}$$

Понятно, что множество решений $\{t_k^j(\varphi)\}$, $k \in Z$, $j = \overline{1, p}$, можно занумеровать одним индексом так, чтобы $t_i(\varphi) \to \infty$ при $i \to +\infty$ и $t_i(\varphi) \to -\infty$ при $i \to -\infty$, при этом будут выполняться равенства

$$t_{i+p}(\varphi) - t_i(\varphi) = 2\pi/\langle a, \omega\rangle, \quad t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) = (s_{j+1} - s_j)/\langle a, \omega\rangle \tag{19}$$

для всех $i \in Z$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ и некоторого $j = \overline{1, p}$. Из (19) следует, что $t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geqslant \theta > 0$, если в качестве θ взять

$$1/\langle a, \omega\rangle \min_{1\leqslant j\leqslant p} (s_{j+1} - s_j).$$

2. Нелинейные системы. Укажем достаточные условия существования инвариантных множеств слабо нелинейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вида

$$\begin{gathered} d\varphi/dt = \omega, \quad dx/dt = A(\varphi)\, x + f(\varphi, x), \quad \varphi \overline{\in} \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = I(\varphi, x). \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь матрица $A(\varphi)$ и множество Γ такие же, как и в системе (1), а функции $f(\varphi, x)$ и $I(\varphi, x)$ определены для всех $\varphi \in \mathcal{T}^m$, $x \in R^n$, непрерывны (кусочно-непрерывны с разрывами первого рода на множестве Γ), периодические с периодом 2π по φ и удовлетворяют условию Липшица по x равномерно относительно $\varphi \in \mathscr{T}^m$:

$$\|f(\varphi, x') - f(\varphi, x'')\| + \|I(\varphi, x') - I(\varphi, x'')\| \leqslant N \|x' - x''\| \tag{21}$$

для всех $x', x'' \in R^n$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если матрица $G(t, \tau, \varphi)$ удовлетворяет неравенству (10), а решения $t = t_i(\varphi)$ уравнения (2) такие, что выполняется неравенство (11), то при достаточно малой постоянной Липшица N система уравнений (20) имеет асимптотически устойчивое инвариантное множество*

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi),$$

где $u(\varphi)$ — кусочно-непрерывная с разрывами первого рода при $\varphi \in \Gamma$ функция и

$$\Delta u|_{\varphi_t(\varphi)\in\Gamma} = I(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)))|_{\varphi_t(\varphi)\in\Gamma}, \quad \varphi_t(\varphi) = \varphi + \omega t. \tag{22}$$

Доказательство. Следуя [3], инвариантное множество системы уравнений (20) ищем как предел последовательности множеств $\mathfrak{M}^{(k)}$:

$$x = u^{(k)}(\varphi), \ \varphi \in \mathscr{T}^m, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad u^0(\varphi) \equiv 0, \tag{23}$$

каждое из которых — инвариантное множество системы уравнений

$$\begin{gathered} d\varphi/dt = \omega, \quad dx/dt = A(\varphi)x + f(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)), \quad \varphi \overline{\in} \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = I(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)). \end{gathered} \tag{24}$$

В силу теоремы 1 при каждом $k = 1, 2, \ldots$ система уравнений (24) имеет инвариантное множество

$$\begin{aligned} x = u^{(k)}(\varphi) = &\int_{-\infty}^{0} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi + \omega\tau, u^{(k-1)}(\varphi + \omega\tau))\, d\tau + \\ &+ \sum_{t_i(\varphi)<0} G(0, t_i(\varphi), \varphi)\, I(\varphi + \omega t_i(\varphi), \quad u^{(k-1)}(\varphi + \omega t_i(\varphi))). \end{aligned} \tag{25}$$

Из (25) с учетом неравенств (10), (11), (13), (21) в предположении, что константа Липшица настолько мала, что $2NC < 1$, имеем

$$\|u^{(1)}(\varphi)\|_0 \equiv \max_{\varphi\in\mathscr{T}^m} \|u^{(1)}(\varphi)\| \leqslant 2C \max\{\|f(\varphi, 0)\|_0, \ \|I(\varphi, 0)\|_0\},$$

$$\begin{aligned} \|u^{(k)}(\varphi)\| \leqslant \|u^{(k)}(\varphi) - u^{(1)}(\varphi)\|_0 + \|u^{(1)}(\varphi)\|_0 \leqslant \frac{1}{1-2NC}\|u^{(1)}(\varphi)\|_0 = \\ = \frac{2C}{1-2NC}\max\{\|f(\varphi, 0)\|_0, \ \|I(\varphi, 0)\|_0\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Кроме того,

$$\|u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)\|_0 \leqslant 2NC\|u^{(k)}(\varphi) - u^{(k-1)}(\varphi)\|_0. \tag{27}$$

Оценки (26) и (27) при $2NC < 1$ обеспечивают равномерную сходимость последовательности функций $u^{(k)}(\varphi)$. Пусть

$$u(\varphi) = \lim_{k\to\infty} u^{(k)}(\varphi). \tag{28}$$

В силу равномерной сходимости последовательности $u^{(k)}(\varphi)$ предельная функция $u(\varphi) = 2\pi$-периодическая, кусочно гладкая с разрывами первого рода на множестве Γ.

Переходя в равенстве (26) к пределу при $k \to \infty$, убеждаемся, что функция $u(\varphi)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} u(\varphi) = &\int_{-\infty}^{0} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi + \omega\tau, u(\varphi + \omega\tau))\, d\tau + \\ &+ \sum_{t_i(\varphi)<0} G(0, t_i(\varphi), \varphi)\, I(\varphi + \omega t_i(\varphi), \ u(\varphi + \omega t_i(\varphi))). \end{aligned} \tag{29}$$

Отсюда нетрудно проверить, что при $\varphi_t(\varphi) \in \Gamma$, т. е. при $t \neq t_i(\varphi)$, $x(t) = u(\varphi_t(\varphi))$ удовлетворяет уравнению

$$dx/dt = A(\varphi + \omega t)\, x + f(\varphi + \omega t,\, x),$$

а при $\varphi_t(\varphi) \in \Gamma$, т. е. при $t = t_i(\varphi)$, — условию $x(t + 0) - x(t - 0) = I(\varphi_t(\varphi),\, x(t))$.

Таким образом, $(x(t),\ \varphi_t(\varphi))$ — решение системы уравнений (20). Это говорит о том, что $x = u(\varphi)$ определяет инвариантное множество системы уравнений (20).

Для завершения доказательства теоремы 2 остается доказать асимптотическую устойчивость инвариантного множества.

Пусть $(y(t),\ \varphi + \omega t)$ — произвольное решение уравнений (20), а $(x(t),\ \varphi + \omega t)$ — решение этих уравнений, лежащее на инвариантном множестве. Поскольку

$$y(t) - x(t) = y(t) - u(\varphi + \omega t) = G(t, 0, \varphi)(y(0) - u(\varphi)) + \int_0^t G(t, \tau, \varphi)[f(\varphi + \omega\tau,\ y(\tau)) - f(\varphi + \omega\tau,\ u(\varphi + \omega\tau))]\, d\tau + \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} G(t,\ t_i(\varphi),\ \varphi)[I(\varphi + \omega t_i(\varphi),\ y(t_i(\varphi))) - I(\varphi + \omega t_i(\varphi),\ u(\varphi + \omega t_i(\varphi)))],$$

то в силу неравенств (10) и (21) имеем:

$$\| y(t) - u(\varphi + \omega t) \| \leqslant K e^{-\gamma t} \| y(0) - u(\varphi) \| + KN \int_0^t e^{-\gamma(t - \tau)} \| y(\tau) - u(\varphi + \omega\tau) \|\, d\tau + KN \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} e^{-\gamma(t - t_i(\varphi))} \| y(t_i(\varphi)) - u(\varphi + \omega t_i(\varphi)) \|.$$

Отсюда в силу леммы 2 [5] для функции $\| y(t) - u(\varphi + \omega t) \| \exp(\gamma t)$ справедлива оценка

$$\| y(t) - u(\varphi + \omega t) \| \exp(\gamma t) \leqslant K(1 + KN)^{i(t)} \exp(KNt) \| y(0) - u(\varphi) \|, \quad (30)$$

где $i(t)$ обозначает количество точек $t_i(\varphi)$ на промежутке $[0;\ t[$.

Из неравенства (30), учитывая (11), получаем

$$\| y(t) - u(\varphi + \omega t) \| \leqslant K \exp\left[-\left(\gamma - KN - \frac{1}{\theta} \ln(1 + KN)\right) t\right] \| y(0) - u(\varphi) \|,$$

т. е. $\| y(t) - u(\varphi + \omega t) \| \to 0$ при $t \to \infty$, если только константа Липшица N достаточно мала.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 410 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— К. : Наук. думка, 1969.— 247 с.
3. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1970, 34, № 6, с. 1219—1240.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* О существовании инвариантных тороидальных множеств систем с мгновенным изменением.— В кн.: Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях.— К. : Наук. думка, 1973, с. 262—273.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Дифферен. уравнения, 1977, № 11, с. 1981—1992.

Киев, гос. ун-т

Поступила в редакцию
15.09.81