УДК 517.947.5.37

И. П. Фишман

О задаче Коши для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим задачу Коши

$$u^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k u^{(k)}(t) = f(t), \tag{1}$$

$$u^{(k)}(0) = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где A_k,— вообще говоря, неограниченные операторы, $f(t) \in C[H, [0; T]]$— множество сильно непрерывных вектор-функций со значениями в H на $[0; T]$.

Под решением задачи Коши (1)—(2) на отрезке $[0; T]$ будем понимать вектор-функцию $u(t)$ со значениями в H, m раз сильно непрерывно дифференцируемую по t на $[0; T]$ (при каждом t $u^{(k)}(t) \in \mathcal{D}(A_k)$, $k=0, 1, \ldots, m-1$), удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям (2).

Будем говорить, что задача Коши корректно разрешима на отрезке $[0; T]$, если

1) при любом наборе $\varphi_k \in \mathcal{D}(A_k)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, существует единственное решение задачи (1)—(2);

2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из $\varphi_{k,n} \to \varphi_k$ в H будет следовать $u_n(t) \to u(t)$ в $C[H, [0; T]]$ при $n \to \infty$.

Хорошо известно, что в случае ограниченных операторных коэффициентов A_k задача Коши (1)—(2) корректно разрешима при любых $\varphi_k \in H$, $f(t) \in C[H, [0; T]]$. В случае же неограниченных A_k такое утверждение не всегда справедливо.

Естественно поставить вопрос: существует ли пространство $H_+(H_-)$, где $H_+ \subset H \subset H_-$, в котором задача Коши (1)—(2) корректно (однозначно) разрешима? Когда $H = L_2(\mathbb{R}^n)$ или $H = L_2(T^n)$ (T^n — n-мерный тор), а A_k — дифференциальные операторы, такой вопрос рассматривался в работах [1—3].

В общей ситуации имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть коэффициентами уравнения* (1) *служит семейство коммутирующих самосопряженных операторов в H. Тогда существует локально-выпуклое топологическое пространство H_Φ, непрерывно и плотно вложенное в H, такое, что для произвольных $\varphi_k \in H_\Phi$ и $f(t) \in C[H_\Phi, [0; T]]$ задача Коши* (1) — (2) *корректно разрешима.*

Доказательство. Поскольку операторы A_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, коммутируют, то можно построить их совместное m-мерное разложение единицы E_λ [4, гл. 2, § 1].

Рассмотрим последовательность замкнутых подпространств $H_n = E_{\Delta_n} H$, где $\Delta_n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : |\lambda_i| < n,\ i = 0, 1, \ldots, m\}$, $n = 0, 1, \ldots$. Очевидно $H_n \subset H_{n+1}$. Обозначим $H_\Phi = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{ind} H_n$. В силу замкнутости H_n и совпадения топологии τ_n подпространства H_n с топологией $\tau_n^{(n+1)}$, индуцируемой в H_n топологией τ_{n+1} подпространства H_{n+1}, получаем: H_Φ — регулярный индуктивный предел гильбертовых пространств. Ясно, что $H_\Phi \subset H$, вложение плотно и непрерывно.

Для любой $\varphi_k \in H_\Phi$ существует номер $n_k : \varphi_k \in H_{n_k}$ и, следовательно, номер $n = \max\limits_k \{n_k\} : \varphi_k \in H_n$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Легко понять, что в силу регулярности H_Φ и замкнутости промежутка $[0; T]$ принадлежность $f(t)$ пространству $C[H_\Phi, [0; T]]$ эквивалентна существованию номера $p : f(t) \in C[H_p, [0; T]]$. Тогда для номера $N = \max\{n, p\}$: $: \varphi_k, f(t) \in H_N$.

Однако на H_N коэффициенты уравнения (1) являются ограниченными операторами. Поэтому задача Коши (1)—(2) корректно разрешима в H_Φ [5], а следовательно, и в H_Φ.

Замечание 1. Утверждение теоремы остается справедливым и в случае, когда вместо семейства коммутирующих самосопряженных операторов A_k рассматривается семейство коммутирующих нормальных операторов.

Замечание 2. Построенное выше пространство H_Φ универсально в том смысле, что в нем разрешима задача Коши

$$u^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} B_k(A)\, u^{(k)}(t) = f(t),$$

$$u^{(k)}(0) = \varphi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

для любых коэффициентов $B_k(A)$, являющихся функциями данного самосопряженного (нормального) оператора. Для каждого же конкретного уравнения пространство H_Φ можно иногда расширить [6].

2. Обозначим через H'_Φ пространство линейных непрерывных функционалов над H_Φ. Из непрерывности и плотности вложения H_Φ в H следует непрерывность и плотность вложения H в H_Φ. Согласно построению [4, гл. 1, § 1], скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, рассматриваемое на $H_\Phi \otimes H$, допускает расширение до полуторалинейной непрерывной формы на пространстве $H_\Phi \otimes H'_\Phi$, которую в дальнейшем будем обозначать тем же символом $(\cdot, \cdot)$. Операторы A_k, непрерывно переводящие H_Φ в H_Φ, допускают расширение до операторов $\hat{A}_k$, действующих из H'_Φ в H'_Φ, таких, что $A_k \subseteq \hat{A}_k$ и $(A_k v, l) = (v, \hat{A}_k l)$, $v \in H_\Phi$, $l \in H'_\Phi$.

Все это позволяет рассмотреть вопрос о разрешимости задачи Коши вида (1)—(2) в пространстве H'_Φ.

Под обобщенным решением задачи (1)—(2) будем понимать вектор-функцию $u(t)$ со значениями в H'_Φ, m раз непрерывно дифференцируемую по $t \in [0; T]$, удовлетворяющую уравнению

$$u^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \hat{A}_k u^{(k)}(t) = f(t) \tag{3}$$

и начальным условиям (2). Здесь $\varphi_k \in H'_\Phi$, $f(t) \in C[H'_\Phi [0, T]]$.

Очевидно, что всякое решение в смысле определения пункта 1 является обобщенным.

Будет иметь место результат, аналогичный теореме 1.

Теорема 2. *Для любых $\varphi_k \in H'_\Phi$ и $f(t) \in C[H'_\Phi, [0; T]]$ существует и единственно решение задачи Коши* (1) — (2).

Доказательство. В силу принципа Дюамеля достаточно провести доказательство для однородного уравнения $f(t) \equiv 0$. В пункте 1 отмечено, что решение уравнения (1) в H_Φ сводится к его решению в некотором H_n.

Уравнение (1) в пространстве H_n — дифференциально-операторное с ограниченными операторными коэффициентами. Обозначим через U_{jn} операторное решение однородного уравнения (1) на H_n при начальных условиях

$$U_{jn}^{(k)}(0) = \delta_{kj} I, \qquad k, j = 0, 1, \dots, m-1,$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, I — единичный оператор.

Поскольку $U_{jn}: H_n \to H_n$ непрерывно и $U_{jn} \subseteq U_{jn+1}$, то можно определить непрерывные операторы $U_j: H_\Phi \to H_\Phi$, такие, что любое решение уравнения (1) при $f(t) \equiv 0$, $\varphi_j \in H_\Phi$ будет иметь вид

$$u(t) = \sum_{j=0}^{m-1} U_j(t) \varphi_j.$$

Обозначим через $\hat{U}_j$ расширения операторов U_j, такие, что $U_j \subseteq \hat{U}_j$, $\hat{U}_j: H'_\Phi \to H'_\Phi$ и $(U_j v, l) = (v, \hat{U}_j l)$, $l \in H'_\Phi$, $v \in H_\Phi$. Тогда вектор-функция

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{U}_j(t) \varphi_j$$

будет обобщенным решением однородного уравнения (1).

В силу определения операторов $\hat{U}_j(0)$ выполнение начальных условий очевидно.

Докажем единственность решения. Пусть вектор-функция $\hat{u}(t)$ — обобщенное решение однородного уравнения (1) в H'_Φ с нулевыми начальными условиями

$$u^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{4}$$

Обозначим через $v_s(t)$ решение однородного уравнения (1) при условиях

$$v_s^{(i)}(s) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, m-2; \\ \varphi, & i = m-1, \end{cases} \tag{5}$$

где φ — произвольный элемент из H_Φ.

Такое решение по теореме 1 всегда существует.

Применяя для вектор-функций $v_s(t)$ и $\hat{u}(t)$ формулу интегрирования по частям, с учетом (4) и (6) получаем

$$\left(\left[v_s^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k v_s^{(k)}(t)\right], \hat{u}(t)\right) = (\varphi, \hat{u}(s)) + \\ + \left(v_s(t), \left[\hat{u}^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \hat{A}_k \hat{u}^{(k)}(t)\right]\right).$$

В силу определения $v_s(t)$ и $\hat{u}(t)$ и произвольности $\varphi \in H_\Phi \hat{u}(s) = 0$. Согласно произвольности $s \in [0; T]$, $\hat{u}(t) \equiv 0$.

3. Пример. Пусть роль H играет $L_2(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} \frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(D) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} = f(t, x) \\ \left.\frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $P_k(D) = \sum_{|\alpha|=1}^{m_k} a_\alpha D^\alpha$, где D^α — замыкание в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператора $\varphi \to \to (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, заданного на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Ясно, что $P_k(D)$ — самосопряженные коммутирующие операторы.

Используя преобразование Фурье и теорему Пэли—Винера, получим, что пространство H_Φ состоит из тех и только тех функций $\varphi(x) \in L_2(R^n)$, которые допускают аналитическое продолжение $\varphi(z)$, $z = x + iy$, в полное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющее неравенству $|\varphi(z)| \leqslant c \exp(\theta_1 |y_1| + \ldots + \theta_n |y_n|)$, где $\theta_j < \infty$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $c > 0$ — некоторые постоянные.

Сходимость в H_Φ означает, что все члены последовательности $\{\varphi_j\}$ после аналитического продолжения в $\mathbb{C}^n$ будут функциями первого порядка роста не более чем фиксированного типа и имеет место равномерная сходимость.

Теоремы 1 и 2 позволяют сделать вывод, что задача (6) корректно разрешима в H_Φ и однозначно разрешима в H'_Φ.

Замечание 3. В соответствии с замечанием 1, вместо многочленов $P_k(D)$, можно было рассматривать произвольные функции от оператора D. Отметим, что задача (6) была рассмотрена в [1] и [3], где в качестве $P_k(D)$ выступали линейные дифференциальные операторы вообще говоря, бесконечного порядка, символы которых $a(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \xi^{2\alpha}$ $(a_\alpha \geqslant 0)$ суть аналитические функции при $|\xi| < R$, $R \leqslant \infty$.

В этих работах было установлено существование и единственность решений такой задачи в классах обычных и обобщенных функций бесконечного порядка. В [2] были также получены результаты о нетривиальности пространства H_Φ и ему близких, которые можно было бы получить, непосредственно отправляясь от функционального исчисления семейства коммутативных операторов по указанной в данной работе схеме.

Замечание 4. Вместо $L_2(\mathbb{R}^n)$ уместно рассмотреть $L_2(T^n)$, где T^n — n-мерный тор и D^α — замыкание в $L_2(T^n)$ оператора $u \to (-i)^{|\alpha|} \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, заданного на 2π-периодических по каждому переменному функциях из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. В этом случае H_Φ — пространство тригонометрических многочленов, H'_Φ — пространство формальных тригонометрических рядов [7].

Можно было бы ввести некоторые специальные пространства периодических функций, совпадающих с областью определения неограниченного оператора, являющегося функцией от коммутирующего семейства нормальных операторов, и на основании спектральной теоремы для такого семейства выписать условия нетривиальности таких пространств, что и сделано в [1].

1. *Дубинский Ю. А.* К теории задачи Коши для уравнений в частных производных.— Докл. АН СССР, 1981, 259, № 4, с. 781—785.
2. *Дубинский Ю. А.* Нетривиальность пространств Соболева бесконечного порядка в случае полного евклидового пространства и тора.— Мат. сб., 1976, 100(142), № 3, с. 436—446.
3. *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическим символом и ее приложения в математической физике.— Успехи мат. наук, 1982, 37, вып. 5 (227), с. 97—159.
4. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— К.: Наук. думка, 1978.— 360 с.
5. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1969, вып. 8, с. 3—24.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1977, 102(144), № 1, с. 124—150.
7. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции.— Докл. АН СССР, 1981, 257, № 4, с. 799—804.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила в редакцию
16.12.82