УДК 517.5

В. Л. Великин

Точные оценки погрешности некоторых оптимальных способов восстановления дифференцируемых периодических функций

Пусть M^r — некоторое множество из линейного пространства $C_{2\pi}^{r-1}$, $r \geqslant 0$ $(C_{2\pi}^0 = C_{2\pi})$, 2π-периодических функций f, имеющих $r-1$ непрерывную производную на всей числовой прямой и $\Delta_N = \{x_1, \ldots, x_N\}$, $x_i < x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, — разбиение промежутка $(0, 2\pi]$, $\overline{\Delta}_N = \{2k\pi/N\}_{k=1}^N$ — равномерное разбиение.

Каждой функции $f \in M^{r-1}$, $r \geqslant 1$, поставим в соответствие числовые множества — информацию о функции f — $T_N^p(f) = \{f^{([p])}(x_k),\ f^{([p+1/2])}(x_k)\}_{k=1}^N$, $p = \pm s/2$, $s = 0, 1, 2, \ldots$; $p \leqslant r-1$, где $[\alpha]$ — наибольшее из целых, не превосходящее действительного числа α, и $f^{(-1)}, f^{(-2)}, \ldots$ — соответственно 1-й, 2-й, ... периодические интегралы от функции f.

Ясно, что для $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $T_N^p(f) = \{f^{(p)}(x_k)\}_{k=1}^N$, а для $p = s/2$, $s = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$, $T_N^p(f) = \{f^{((s+1)/2)}(x_k)\}$.

Обозначим через $S[T_N^p(f)]$ приближенный способ вычисления значения $f^{(\nu)}$ в фиксированной точке $x \in [0, 2\pi]$, в котором использована информация $T_N^p(f)$.

Величина $R^{\nu,p}(M^r, S; x) = \sup\limits_{f \in M^r} |f^{(\nu)}(x) - S[T_N^p(f)]|$, $\nu \leqslant r-1$, $r > 1$, — погрешность метода S на множестве M^r. Пусть

$$R^{\nu,p}(M^r, \Delta_N; x) = \inf_S R^{\nu,p}(M^r, S; x) \tag{1}$$

— оптимальная погрешность восстановления $f^{(\nu)}$ в точке x по информации $T_N^p(f)$. Нижняя грань в (1) берется по всевозможным методам $S[T_N^p(f)]$.

Задача нахождения величины (1) в общем виде рассмотрена в [1, 2].

Положим $M_p^r = \{f \in M^r : T_N^p(f) = \{0\}\}$. Согласно утверждению из [1] (см. также [2]), для выпуклого центрально симметрического множества M^r с центром симметрии $f_0(x) \equiv 0$ имеем

$$R^{\nu,p}(M^r, \Delta_N; x) = \sup_{f \in M_p^r} f^{(\nu)}(x). \tag{2}$$

Будем рассматривать величины

$$R^{\nu,p}(M^r, \Delta_N)_q = \| R^{\nu,p}(M^r, \Delta_N; x) \|_q \tag{3}$$

и

$$R_N^{\nu,p}(M^r)_q = \inf_{\Delta_N} R^{\nu,p}(M^r, \Delta_N)_q, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_q$ — норма в пространстве $L_q(0, 2\pi)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, и величины

$$Q^{\nu,p}(M^r, \Delta_N)_q = \sup_{f \in M_p^r} \| f^{(\nu)} \|_q \tag{5}$$

и

$$Q_N^{\nu,p}(M^r)_q = \inf_{\Delta_N} Q^{\nu,p}(M^r, \Delta_N)_q. \tag{6}$$

Ясно, что для всех возможных значений ν, p, r и Δ_N имеем $Q^{\nu,p}(M^r, \Delta_N)_q \leqslant R^{\nu,p}(M^r, \Delta_N)_q$, $1 \leqslant q < \infty$, и

$$Q^{\nu,p}(M^r, \Delta_N)_\infty = R^{\nu,p}(M^r, \Delta_N)_\infty. \tag{7}$$

Пусть $\varphi_{n,r}$ — r-й периодический интеграл со средним значением, равным нулю, от функции $\operatorname{sign}\sin nx$. Пусть еще $W^r_q = \{f \in C^{r-1}_{2\pi} : f^{(r-1)}$ — абсолютно непрерывная на $[0, 2\pi]$ и $\| f^{(r)} \|_q \leqslant 1\}$. При $q = \infty$, $p = 0$ и $N = 2n$ в [3], а при $q = 1$, ∞ и $p = 0$, $N = 2n$ или $p = 1/2$, $N = n$ в [4] получены соотношения $R^{0,p}(W^r_\infty, \Delta_N)_q > R^{0,p}(W^r_\infty, \overline{\Delta}_N)_q = R^{0,p}_N(W^r_\infty)_q$. Для таких же p случай $1 < q < \infty$ исследован в [5]. Кроме того в [4] показано, что

$$R^{0,0}_{2n}(W^r_\infty)_\infty = \frac{1}{2} R^{0,1/2}_n (W^r_\infty)_\infty, \tag{8}$$

$$R^{0,0}_{2n}(W^r_\infty)_1 = (2K_{r+1}/\pi K_r)\, R^{0,1/2}_n (W^r_\infty)_1, \tag{9}$$

где

$$K_r = \| \varphi_{n,r} \|_\infty \cdot n^r = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i(r+1)} (2i+1)^{-r-1}.$$

Из равенств (8), (9) следует, что информация

$$T^0_{2n}(f) = \{f(k\pi/n)\}_{k=1}^{2n} \tag{10}$$

дает погрешность оптимального восстановления функций из W^r_∞ по норме пространства L_∞ в два раза, а по норме пространства L_1 — в $\pi K_r/2K_{r+1}$ раз меньшую $(K_r/K_{r+1} > 2/\pi,\ r = 1, 2, \ldots)$, чем информация $T^{1/2}_n(f) = \{f(2k\pi/n), f^{(1)}(2k\pi/n)\}_{k=1}^n$.

С другой стороны, в [3] показано, что вообще любая информация, состоящая из $2n$ чисел — значений функции f и каких-либо ее производных — дает не меньшую погрешность оптимального восстановления функций f из множества W^r_∞, чем информация вида (10).

В этой статье доказано, что информация вида

$$T^p_{2n}(f) = \{f^{(p)}(k\pi/n)\}_{k=1}^{2n}, \quad p = -1, -2, \ldots,$$

и

$$T^p_{2n}(f) = \{f^{([p])}(2k\pi/n), f^{([p+1/2])}(2k\pi/n)\}_{k=1}^{n}, \quad p = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots,$$

дает погрешность оптимального восстановления функций из W^r_∞ по норме пространства L_∞ ту же, что и информация вида (10). Кроме этого, мы находим при всех допустимых p и ν значение величины (6) для $1 \leqslant q \leqslant \infty$ и множества W^r_∞ и, как следствие, точное значение наилучшего приближения в пространстве L_1 сплайнами дефекта 2 на множестве W^r_q.

Для этого нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1. *При всех $r > 1$ и $1 \leqslant q \leqslant \infty$ справедливы равенства*

$$Q^{\nu,p}_{2n}(W^r_\infty)_q = Q^{\nu,p}(W^r_\infty, \overline{\Delta}_{2n})_q = \| \varphi_{n,r-\nu} \|_q, \quad p \leqslant \nu \leqslant r-1, \ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{11}$$

и

$$Q^{\nu,p}_n(W^r_\infty)_q = Q^{\nu,p}(W^r_\infty, \overline{\Delta}_n)_q = \begin{cases} \| \varphi_{n,r-\nu} + \| \varphi_{n,r-\nu} \|_\infty \|_q, & \nu = p - 1/2, \\ \| \varphi_{n,r-\nu} \|_q, & p - 1/2 < \nu \leqslant r-1, \ p = \pm s/2, \ s = 1, 3, 5, \ldots . \end{cases} \tag{11'}$$

Доказательство. Заметим, что при $\nu < p - 1/2$ величина (6) неограничена, а для $\nu = p$ и $\nu = p - 1/2$ равенства (11) и соответственно

(11′) вытекают из рассуждений, приведенных в [4] при $q=1, \infty$ и в [5] при $1<q<\infty$.

Пусть сначала $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, $p=0$ и $\Delta_{2n}\neq\overline{\Delta}_{2n}$. Рассмотрим функцию $f_r(\Delta_{2n};x)\in W^r_\infty$ такую, что а) $f_r(\Delta_{2n};x)=0$, $x\in\Delta_{2n}$, и только для таких x; б) $|f_r^{(r)}(\Delta_{2n};x)|\equiv 1$, $x\in[0,2\pi]$, и функция $f_r^{(r)}(\Delta_{2n};x)$ на периоде имеет в точности $2n$ перемен знака. Существование такой функции доказано в [4] (лемма 1).

Заметим, что

$$f_r(\overline{\Delta}_{2n};x)=\begin{cases}\varphi_{n,r}(x), & \text{если } r \text{ четное,}\\ \varphi_{n,r}(x-\pi/(2n)), & \text{если } r \text{ нечетное.}\end{cases}$$

На основании (5) имеем $Q^{\nu,0}(W^r_\infty,\Delta_{2n})_q\geqslant\|f_r^{(\nu)}(\Delta_{2n};\cdot)\|_q$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Ясно, что функция $f_r^{(\nu)}(\Delta_{2n};x)$, $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, имеет на периоде в точности $2n$ перемен знака и ее $r-\nu$-я производная удовлетворяет условию б). Поэтому справедливо неравенство

$$\|f_r^{(\nu)}(\Delta_{2n};\cdot)\|_q>\|\varphi_{n,r-\nu}\|_q, \tag{12}$$

которое при $q=1,\infty$ вытекает из доказательства лемм 4.2 и 4.3 из [6]. Для $1<q<\infty$ неравенство (12) получено в [5].

Таким образом, для $1\leqslant q\leqslant\infty$ имеем

$$Q^{\nu,0}(W^r_\infty,\Delta_{2n})_q>\|\varphi_{n,r-\nu}\|_q. \tag{13}$$

С другой стороны, для любой функции $f\in W^r_\infty$ такой, что $f(k\pi/n)=0$, $k=0,1,\ldots,2n-1$, как показано в [7], выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant$ $\leqslant|f_r(\overline{\Delta}_{2n};x)|$, $x\in[0,2\pi]$. Поэтому на основании утверждения из [8] (с. 117)

$$\|f^{(\nu)}\|_\infty\leqslant\|\varphi_{n,r-\nu}\|_\infty. \tag{14}$$

Применяя затем теорему 5.7.1 из [8] для функции $f^{(\nu)}$ при условии, что $f\in W^r_\infty$ и $f(k\pi/n)=0$, получаем $\|f^{(\nu)}\|_q\leqslant\|\varphi_{n,r-\nu}\|_q$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Таким образом, приходим к выводу, что $Q^{\nu,0}(W^r_\infty,\overline{\Delta}_{2n})_q=\|\varphi_{n,r-\nu}\|_q$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, а это вместе с неравенством (13) означает, что равенство (11) доказано для $p=0$ и $0\leqslant\nu\leqslant r-1$.

Если же p — любое целое число и $p\leqslant\nu\leqslant r-1$, то для $f\in W^r_\infty$ функция $g=f^{(p)}\in W^{r-p}_\infty$ и, значит, $g^{(\nu-p)}=f^{(\nu)}$. Следовательно, с учетом (5), (6) и (11) при $p=0$ имеем

$$Q^{\nu,p}_{2n}(W^r_\infty)_q=\inf_{\Delta_{2n}}\sup_{\substack{f\in W^r_\infty\\ T^p_{2n}(f)=\{0\}}}\|f^{(\nu)}\|_q=\inf_{\Delta_{2n}}\sup_{\substack{g\in W^{r-p}_\infty\\ T^0_{2n}(g)=\{0\}}}\|g^{(\nu-p)}\|_q=$$

$$=Q^{\nu-p,0}_{2n}(W^{r-p}_\infty)_q=Q^{\nu-p,0}(W^{r-p}_\infty,\overline{\Delta}_{2n})_q=\|\varphi_{n,r-\nu}\|_q.$$

Тем самым соотношение (11) доказано для $r>1$, $-\infty<p\leqslant\nu\leqslant r-1$, $p=0,\pm1,\ldots$. Пусть $p=1/2$, $1\leqslant\nu\leqslant r-1$ и $\Delta_n\neq\overline{\Delta}_n$. Рассмотрим функцию $f_{1,r}(\Delta_n;x)\in W^r_\infty$ такую, что в) $f_{1,r}(\Delta_n;x)=f^{(1)}_{1,r}(\Delta_n;x)=0$ для $x\in\Delta_n$ и только для таких x; г) $|f^{(r)}_{1,r}(\Delta_n;x)|\equiv1$, $x\in[0,2\pi]$, и $f^{(r)}_{1,r}(\Delta_n;x)$ имеет на периоде в точности $2n$ перемен знака.

Существование такой функции доказано в [6] (теорема 3.1).

Заметим, что

$$f_{1,r}(\overline{\Delta}_n;x)=\begin{cases}(-1)^{r/2}\varphi_{n,r}(x-\pi/(2n))=\|\varphi_{n,r}\|_\infty, & \text{если } r \text{ четное,}\\ (-1)^{(r-1)/2}\varphi_{n,r}(x)+\|\varphi_{n,r}\|_\infty, & \text{если } r \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Ясно, что функция $f_{1,r}^{(\nu)}(\Delta_n; x)$, $1 \leqslant \nu \leqslant r-1$, имеет на периоде в точности $2n$ перемен знака и ее $r-\nu$-я производная удовлетворяет условию г). Следовательно, функция $f_{1,r}^{(\nu)}(\Delta_n; x)$ — вида $f_{r-\nu}(\Delta_{2n}'; x)$ (см. условия а), б)), соответствующая некоторому разбиению $\Delta_{2n}' \neq \Delta_{2n}$. Поэтому на основании (5) и (12) находим

$$Q^{\nu,1/2}(W_\infty^r, \Delta_n)_q \geqslant \| f_{1,r}^{(\nu)}(\Delta_n; x) \|_q = \| f_{r-\nu}(\Delta_{2n}'; x) \|_q > \| \varphi_{n,r-\nu} \|_q, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{15}$$

С другой стороны, покажем, что для любой функции $f \in W_\infty^r$ и удовлетворяющей условиям

$$f(2k\pi/n) = f^{(\prime)}(2k\pi/n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{16}$$

имеет место соотношение

$$\| f^{(\prime)} \|_q \leqslant \| \varphi_{n,r-1} \|_q. \tag{17}$$

Для любой такой функции, как показано в [4] (лемма 2), выполняется соотношение

$$| f(x) | \leqslant f_{1,r}(\overline{\Delta}_n; x). \tag{18}$$

Следовательно, для функции $g = \lambda f$, $|\lambda| < 1$, найдутся интервалы $(\alpha_k', \beta_k') \subset$ $\subset (2k\pi/n - \delta, 2k\pi/n]$ и $(\alpha_k'', \beta_k'') \subset [2k\pi/n, \ 2k\pi/n + \delta)$, $0 < \delta < \pi/(2n)$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$, в которых будет выполняться неравенство

$$| g^{(\prime)}(x) | < | f_{1,r}^{(\prime)}(\overline{\Delta}_n; x) |, \quad x \in (\alpha_k', \beta_k') \cup (\alpha_k'', \beta_k''). \tag{19}$$

Поэтому разность $f_{1,r}^{(\prime)}(\overline{\Delta}_n; x) - g^{(\prime)}(x)$ помимо точек $2k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, меняет знак еще и внутри промежутков $[2(k-1)\pi/n, 2k\pi/n]$, т. е. имеет на периоде всего не менее $2n$ перемен знака. А так как ее $r-1$-я производная $\varphi_{n,0}(x) - g^{(r)}(x)$ не может иметь более $2n$ перемен знака, то функция $f_{1,r}^{(\prime)}(\overline{\Delta}_n; x) - g^{(\prime)}(x)$ имеет на периоде в точности $2n$ простых нулей: в точках $2k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и по одному в каждом интервале $(2(k-1)\pi/n, 2k\pi/n)$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для любой функции $f \in W_\infty^r$ и удовлетворяющей условиям (16) имеет место соотношение* $\| f^{(\prime)} \|_\infty \leqslant \| \varphi_{n,r-1} \|_\infty$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой функции f, удовлетворяющей условиям леммы, выполняется неравенство

$$\| f^{(\prime)} \|_\infty > \| \varphi_{n,r-1} \|_\infty. \tag{20}$$

Пусть точка x_0 такова, что $| f^{(\prime)}(x_0) | = \| f^{(\prime)} \|_\infty$, и для определенности $2(k_0-1)\pi/n < x_0 < (2k_0-1)\pi/n$. Если $| f^{(\prime)}(x) | \equiv \| f^{(\prime)} \|_\infty$ для $x \in [\delta_1, \delta_2] \subset$ $\subset (2(k_0-1)\pi/n, 2k_0\pi/n)$, то в качестве точки x_0 возьмем точку $(\delta_1 + \delta_2)/2$.

Положим $g = \lambda f$, $\lambda = \| \varphi_{n,r-1} \|_\infty / | f^{(\prime)}(x_0) |$, и рассмотрим функции g и $\varphi_{n,r-1}$. Согласно сделанным предположениям относительно точки x_0 и неравенств (19) и (20) заключаем, что разность $\varphi_{n,r-1} - g^{(\prime)} = \delta$ меняет знак в некоторой точке x_1, лежащей в левой половине промежутка $\Delta_0 = [2(k_0-1)\pi/n, 2k_0\pi/n]$. Проведенный выше подсчет перемен знака разности $\varphi_{n,0} - g^{(r)}$ показывает, что ни в какой внутренней точке $x \neq x_1$ промежутка Δ_0 разность δ в нуль не обращается. Более того, если α — ближайший слева от точки x_0, а β — ближайший справа от точки x_0 нуль функции g, то выполняется неравенство

$$| g^{(\prime)}(x) | \leqslant | \varphi_{n,r-1}(x) |, \quad x \in (2(k_0-1)\pi/n, \ \alpha) \cup [\beta, \ 2k_0\pi/n), \tag{21}$$

так как в противном случае, с учетом (19), по крайней мере одна из разностей $\varphi_{n,r-1} - g^{(r)}$ или $\varphi_{n,r-1} - (-g^{(r)})$ помимо перемены знака на интервале (α, β) будет иметь перемену знака на одном из полуинтервалов $((2k_0-1)\pi/n, \alpha]$ или $[\beta, 2k_0\pi/n)$. Следовательно, одна из указанных разностей будет иметь на периоде по крайней мере $2n+1$ перемену знака, чего, как показал подсчет перемен знака разности $\varphi_{n,r-1} - \lambda f^{(r)}$ для $f \in W_\infty^r$, $|\lambda| < 1$, не может быть.

Пусть, для определенности, $\operatorname{sign} \varphi_{n,r-1}(x) = \operatorname{sign} f^{(r)}(x_0) = 1$, $2(k_0-1)\pi/n < x < (2k_0-1)\pi/n$. Тогда $\varphi_{n,r-1}(x) - g^{(r)}(x) \geqslant 0$ для $x \in [2(k_0-1)\pi/n, x_1]$ и $\varphi_{n,r-1}(x) - g^{(r)}(x) \leqslant 0$ для $x \in [x_1, 2k_0\pi/n]$. Более того, так как α и β — нули функции g, то для некоторых $\alpha' \in (2(k_0-1)\pi/n, \alpha)$ и $\beta' \in (\beta, 2k_0\pi/n)$ выполняется неравенство

$$|g^{(r)}(x)| < |\varphi_{n,r-1}(x)|, \quad x \in (\alpha', \alpha) \cup (\beta, \beta'). \tag{22}$$

Покажем, что существует такое значение y_0 из промежутка $[0, \|\varphi_{n,r-1}\|_\infty]$, для которого

$$\operatorname{mes} E(x \in (\alpha, \beta) : g^{(r)}(x) > y_0) < \operatorname{mes} E(x \in \Delta_0 : \varphi_{n,r-1} > y_0). \tag{23}$$

Действительно, если бы это было не так, то имело бы место неравенство $\int\limits_{\alpha}^{\beta} g^{(r)}(x)\,dx \geqslant \int\limits_{2(k_0-1)\pi'n}^{2k_0\pi/n} \varphi_{n,r-1}(x)\,dx$. В силу же условия (16) $\int\limits_{\Delta_0^+} g^{(r)}(x)\,dx = -\int\limits_{\Delta_0^-} g^{(r)}(x)\,dx$, где $\Delta_0^+ = \{x \in \Delta_0 : g^{(r)}(x) > 0\}$, $\Delta_0^- = \{x \in \Delta_0 : g^{(r)}(x) < 0\}$, и, следовательно,

$$\Big|\int\limits_{\Delta_0^-} g^{(r)}(x)\,dx\Big| \geqslant \Big|\int\limits_{(2k_0-1)\pi/n}^{2k_0\pi/n} \varphi_{n,r-1}(x)\,dx\Big|. \tag{24}$$

С другой стороны, если соотношение (23) неверно при всех $y \in [0, \|\varphi_{n,r-1}\|_\infty]$, то $\beta - \alpha \geqslant \pi/n$, и, следовательно, с учетом неравенств (21) и (22) имеем

$$\Big|\int\limits_{\Delta_0^-} g^{(r)}(x)\,dx\Big| < \int\limits_{2(k_0-1)\pi/n}^{\alpha} \varphi_{n,r-1}(x)\,dx + \Big|\int\limits_{\beta}^{2k_0\pi/n} \varphi_{n,r-1}(x)\,dx\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{(2k_0-1)\pi/n}^{\alpha+\pi/n} \varphi_{n,r-1}(x)\,dx\Big| + \Big|\int\limits_{\beta}^{2k_0\pi/n} \varphi_{n,r-1}(x)\,dx\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{(2k_0-1)\pi/n}^{2k_0\pi/n} \varphi_{n,r-1}(x)\,dx\Big|.$$

Это противоречит неравенству (24).

Пусть t_i, τ_i $(i = 1, 2)$ таковы, что $\varphi_{n,r-1}(t_1) = \varphi_{n,r-1}(t_2) = g^{(r)}(\tau_1) = g^{(r)}(\tau_2) = y_0$ и $0 < \tau_2 - \tau_1 < t_2 - t_1$. Положим $h = (t_2 - t_1 - (\tau_2 - \tau_1))/2$, $t_0 = \tau_1 - t_1 - h$. Ясно, что $t_0 < \dfrac{\pi}{n}$. Рассмотрим функцию $\tilde{g}(x) = g(x + t_0)$.

При таком сдвиге функции g значения $\tilde{g}^{(r)}$ в точках $t_1 + h$ и $t_2 - h$ будут меньше, чем у функции $\varphi_{n,r-1}$, а в точке $x_0 - t_0 \in (t_1 + h, t_2 - h)$ значение функции $\tilde{g}^{(r)}$ равно $\|\varphi_{n,r-1}\|_\infty$. При этом считаем, что $x_0 - t_0 \neq 2(k_0-1)\pi/n + \pi/(2n)$, т. е. в точке $x_0 - t_0$ значение функции $\varphi_{n,r-1}$ меньше, чем $\|\varphi_{n,r-1}\|_\infty$, так как в противном случае мы бы рассмотрели сдвиг функции g на $t_0 \pm \varepsilon$ при достаточно малом ε. Следовательно, на интервале $(t_1 + h, t_2 - h)$ разность $\varphi_{n,r-1} - \tilde{g}^{(r)}$ имеет не менее двух перемен знака. Домножая в случае необходимости функцию $\tilde{g}$ на $1 - \varepsilon_1$ и выбирая $\varepsilon_1 \geqslant 0$

настолько малым, чтобы у разности $\varphi_{n,r-1}-(1-\varepsilon_1)\tilde{g}^{(r)}=\tilde{\delta}$, как и у разности $\varphi_{n,r-1}-\tilde{g}^{(r)}$, было не менее двух перемен знака на интервале (t_1+h, t_2-h), получаем неравенства

$$(1-\varepsilon_1)\,|\,\tilde{g}^{(r)}(2k\pi/n\pm\pi/(2n)+t_0)\,|<\|\varphi_{n,r-1}\|_\infty,\quad k=0,1,\ldots,n. \tag{25}$$

Поэтому разность $\tilde{\delta}$ в точке $2k_0\pi/n-\pi/(2n)$ отрицательна, а так как в точке t_2-h она положительна, то на интервале $(t_2-h,\ 2k_0\pi/n-\pi/2n)$ эта разность имеет перемену знака. По той же причине она имеет перемену знака и на интервале $(2(k_0-1)\pi/n-\pi/(2n),\ t_1+h)$. Следовательно, на интервале $(2(k_0-1)\pi/n-\pi/(2n),\ 2k_0\pi/n-\pi/(2n))$ разность $\tilde{\delta}$ имеет не менее 4-х перемен знака. В силу же неравенств (25) на каждом из оставшихся $2n-2$ интервалах монотонности функции $\varphi_{n,r-1}$ разность δ имеет перемену знака, и поэтому всего на периоде у нее будет не менее $2n+2$ перемены знака, чего, как отмечалось выше, не может быть. Полученным противоречием заканчивается доказательство леммы.

В силу этой леммы, утверждения из [8] (с. 117) и того, что $f^{(r)}\in W_\infty^{r-1}$, получаем неравенства

$$\|f^{(\nu)}\|_\infty\leqslant\|\varphi_{n,r-\nu}\|_\infty,\qquad \nu=1,2,\ldots,r. \tag{26}$$

Кроме того,

$$\max_{a,b}\left|\int_a^b f^{(\nu)}(t)\,dt\right|=\max_{a,b}|\,f^{(\nu-1)}(b)-f^{(\nu-1)}(a)\,|\leqslant 2\,\|f^{(\nu-1)}\|_\infty\leqslant 2\,\|\varphi_{n,r+1-\nu}\|_\infty. \tag{27}$$

Итак, если $f\in W_\infty^r$ и удовлетворяет условиям (16), то выполняются соотношения (26) и (27), а это означает, в силу теоремы 5. 7. 1 из [8], что $\|f^{(\nu)}\|_q\leqslant\|\varphi_{n,r-\nu}\|_q$, $\nu=1,2,\ldots,r$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. На основании этого делаем вывод, что $Q^{\nu,1/2}(W_\infty^r,\bar{\Delta}_n)_q=\|\varphi_{n,r-\nu}\|_q$, $\nu=1,2,\ldots,r-1$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Сравнивая эти равенства с соотношениями (15), получаем доказываемые равенства (11′) для случая $p=1/2$, $\nu=1,2,\ldots,r-1$ и $1\leqslant q\leqslant\infty$.

Если же $p=\pm s/2$, $s=1,3,5,\ldots$, и при этом $p<\nu\leqslant r-1$, то для $f\in W_\infty^r$ функция $\psi=f^{((s-1)/2)}\in W_\infty^{r-(s-1)/2}$ и, значит, $\psi^{(\nu-(s-1)/2)}=f^{(\nu)}$. Следовательно, учитывая (5), (6) и (11) при $p=1/2$, имеем

$$Q_n^{\nu,p}(W_\infty^r)_q=\inf_{\Delta_n}\sup_{\substack{f\in W_\infty^r,\\ T_n^p(f)=\{0\}}}\|f^{(\nu)}\|_q=\inf_{\Delta_n}\sup_{\substack{\psi\in W_\infty^{r-(s-1)/2},\\ T_n^{1/2}(\psi)=\{0\}}}\|\psi^{(\nu-(s-1)/2)}\|_q=$$

$$=Q_n^{\nu-(s-1)/2,1/2}(W_\infty^{r-(s-1)/2})_q=Q^{\nu-(s-1)/2,1/2}(W_\infty^{r-(s-1)/2},\Delta_n)_q=\|\varphi_{n,r-\nu}\|_q.$$

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Следствие 1.

$$\sup_{\begin{cases} f\in W_\infty^r \\ f(0)=f^{(r)}(0)=0\end{cases}}\|f^{(\nu)}\|_q=\begin{cases}\|\varphi_{1,r}+\|\varphi_{1,r}\|_\infty\|_q, & \nu=0,\\ \|\varphi_{1,r-\nu}\|_q, & \nu>0,\ r>1,\ 0\leqslant\nu\leqslant r,\ 1\leqslant q\leqslant\infty.\end{cases}$$

Из теоремы 1 с учетом равенства (7) получаем утверждение.

Теорема 2. *При всех $r\geqslant 1$ справедливы равенства*

$$R_{2n}^{\nu,p}(W_\infty^r)_\infty=R^{\nu,p}(W_\infty^r,\bar{\Delta}_{2n})_\infty=K_{r-\nu}/n^{r-\nu},\ p\leqslant\nu\leqslant r-1,$$

$$p=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

и при $r>1$ — $$R_n^{\nu,p}(W_\infty^r)_\infty=R^{\nu,p}(W_\infty^r;\bar{\Delta}_n)_\infty=\begin{cases}2K_{r-\nu}/n^{r-\nu}, & \nu=p+1/2,\\ K_{r-\nu}/n^{r-\nu}, & p-1/2<\nu\leqslant r-1,\\ p=\pm s/2, & s=1,3,5,\ldots.\end{cases}$$

Рассмотрим подпространство S_n^m сплайнов порядка m и дефекта 2 с узлами $\{2k\pi/n\}_{k=0}^{n-1}$, т. е. функций $s \in C_{2\pi}^{m-2}$, на каждом промежутке $[2(k-1)\pi/n,\ 2k\pi/n)$ являющихся алгебраическими многочленами степени m. Размерность подпространства S_n^m равна $2n$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *При всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \geqslant 1$ *и* $m \geqslant r$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f \in W_p^r} \inf_{s \in S_n^m} \| f - s \|_1 = \| \varphi_{n,r} \|_q.$$

Доказательство. Заметим, что условие $g \perp S_n^m$ (функция g суммируема на $[0, 2\pi]$) равносильно условию $g^{(-m)}(2k\pi/n) = g^{(-m-1)}(2k\pi/n) = 0$, в чем легко убедиться, интегрируя по частям равенство $\int_0^{2\pi} g(t)\, s(t)\, dt = 0$; $s \in S_n^m$. Поэтому согласно соотношениям двойственности (см. например, [8], с. 24) находим

$$\sup_{f \in W_p^r} \inf_{s \in S_n^m} \| f - s \|_1 = \sup_{f \in W_p^r} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leqslant 1, \\ g \perp S_n^m}} \int_0^{2\pi} g(t)\, f(t)\, dt =$$

$$= \sup_{f \in W_p^r} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leqslant 1, \\ g \perp S_n^m}} \int_0^{2\pi} g^{(-r)}(t)\, f^{(r)}(t)\, dt = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leqslant 1, \\ g \perp S_n^m}} \inf_\lambda \| g^{(-r)} - \lambda \|_q \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{g \in W_\infty^{m+1}, \\ g(2k\pi/n) = g^{(')}(2k\pi/n) = 0}} \| g^{(m+1-r)} \|_q.$$

На основании равенств (11′) заключаем, что полученная в правой части величина равна $\| \varphi_{n,r} \|_q$ и что для $g_0 = \varphi_{n,0}$

$$g_0 \|_\infty = 1,\ g_0 \perp S_n^m,\ \inf_\lambda \| g_0^{(-r)} - \lambda \|_q = \inf_\lambda \| \varphi_{n,r} - \lambda \|_q = \| \varphi_{n,r} \|_q.$$

Теорема 3 доказана.

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Автореф. дис. . . канд. физ.-мат. наук.— М., 1965.— 16 с.
2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций.— Журн. вычислит. матем. и мат. физ., 1971, 11, № 4, с. 1014—1018.
3. *Boyanov B. D.* A note on the optimal approximation of smooth periodic functions.— Compt. rendus de l'Acad. bulgare des Sci., 1977, 30, N 6, c. 809—812.
4. *Великин В. Л.* Оптимальная интерполяция периодических дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной. — Мат. заметки, 1977, 22, № 5, с. 633—670.
5. *Ligun A. A.* Optimal methods for the approximate calculation of functionals on classes $W^r L_\infty$.— Anal. Math., 1979, 5, N 4, c. 269—286.
6. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, 38, № 3, с. 583—614.
7. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C_{2\pi}$.— Мат. сб., 1969, 80, № 2, с. 290—304.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 320 с.

Днепропетровский
государственный университет

Поступила в редакцию 03.03.82
после переработки — 26.04.82