УДК 513.88 : 519.4

А. В. Косяк, Ю. С. Самойленко

Область Гординга и целые векторы для индуктивных пределов коммутативных локально компактных групп

В теории представлений конечномерных алгебр Ли неограниченными операторами существует стандартный метод [1, 2] построения по унитарному представлению локально компактной группы Ли представления соответствующей алгебры Ли. При этом необходимые соотношения между операторами представления алгебры Ли выполняются на области Гординга: плотном множестве, состоящем из конечных линейных комбинаций векторов вида

$$\varphi_f = \int_G f(g)\,U(g)\,\varphi\,dg, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \ f \in C_0^\infty(G), \qquad (1)$$

где $G \ni g \to U(g) \in U(\mathcal{H})$ — сильно непрерывное унитарное представление группы Ли G в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, dg — мера Хаара на G, $C_0^\infty(G)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на G с компактным носителем.

Для унитарных представлений не локально компактных групп область Гординга существует не всегда [3]. Тем не менее в [4—6] построены области Гординга, состоящие соответственно из аналитических, целых и бесконечно дифференцируемых векторов для представлений некоторых не локально компактных групп Ли. Однако их конструкции пространств Гординга отличаются от (1).

Проведение конструкции, аналогичной конструкции Гординга, для представлений не локально компактных групп Ли наталкивается на трудности, связанные с отсутствием инвариантных мер на таких группах.

В настоящей работе приведена конструкция области Гординга, аналогичная конструкции (1) для унитарных представлений простейшей не локально компактной группы $\mathbb{R}_0^\infty$ — группы финитных последовательностей вещественных чисел. При этом вместо инвариантной меры на группе используется квазиинвариантная — гауссова (с корреляционным оператором, зависящим от представления), а вместо пространства финитных бесконечно дифференцируемых функций на группе — пространство целых функций на группе [7, 8]. Построенная область Гординга состоит из целых векторов для генераторов однопараметрических подгрупп.

Так как индуктивные пределы коммутативных локально компактных групп Ли $G = \varinjlim \mathbb{R}^n$ изоморфны группе $\mathbb{R}_0^\infty$, то приведенная конструкция позволяет строить область Гординга для групп $\varinjlim \mathbb{R}^n$.

1. Приведем сначала конструкцию области Гординга для унитарных представлений группы $\mathbb{R}^1$ с целью дальнейшего ее обобщения на бесконечномерный случай. При этом вместо меры Лебега (меры Хаара на $\mathbb{R}^1$) используем гауссову меру $dg(t) = \pi^{-1/2}\exp(-t^2)\,dt$, а вместо пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ — пространство целых функций $\mathbb{Z}_0^2(\mathbb{R}^1)$, определяемое следующим образом. Пусть $\mathbb{Z}_0^2(\mathbb{C}^1)$ — пространство целых функций $u(z)$, $\mathbb{C}^1 \ni z \mapsto u(z) \in \mathbb{C}^1$, допускающих для произвольного $\varepsilon > 0$ оценку $|u(z)| \leqslant C_{u,\varepsilon}\exp(\varepsilon|z|^2)$, $z \in \mathbb{C}^1$. Определим $\mathbb{Z}_0^2(\mathbb{R}^1) = \mathbb{Z}_0^2(\mathbb{C}^1)\restriction_{\mathbb{R}^1}$.

Будем использовать другое описание пространства $\mathbb{Z}_0^2(\mathbb{R}^1)$. Пусть $L_2(\mathbb{R}^1, dg)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом по гауссовой мере. Полиномы Эрмита $(h_k)_{k=0}^{\infty}$, $h_k(t) = (-1)^k (2^k k!)^{-1/2} \exp(t^2)\, d^k/dt^k \exp(-t^2)$ образуют в $L_2(\mathbb{R}^1, dg)$ ортонормированный базис. Для каждого $l = 1, 2, \dots$ введем гильбертово пространство $A_l(\mathbb{R}^1) = \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^1, dg) \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} |(u, h_k)|^2 l^k < \infty \right\}$. Очевидно $A_1(\mathbb{R}^1) = L_2(\mathbb{R}^1, dg)$, $A_{l+1}(\mathbb{R}^1) \subset A_l(\mathbb{R}^1)$.

Множество $\bigcap_{l=1}^{\infty} A_l(\mathbb{R}^1)$ содержит всевозможные конечные линейные комбинации полиномов Эрмита и, следовательно, плотно в каждом $A_l(\mathbb{R}^1)$. Пространство $\mathscr{A}(\mathbb{R}^1) = \varprojlim A_l(\mathbb{R}^1)$ ядерно [7, 8].

Введем еще пространство

$$B(\mathbb{R}^1) = \left\{ u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k (2^k k!)^{-1/2} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} \left| u_k \right|^2 m^k < \infty,\ m = 1, 2, \dots \right\}. \tag{2}$$

В [7] показано совпадение пространств:

$$\mathbb{Z}_0^2(\mathbb{R}^1) = \mathscr{A}(\mathbb{R}^1) = B(\mathbb{R}^1). \tag{3}$$

Пусть задано сильно непрерывное унитарное циклическое представление $\mathbb{R}^1$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$: $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto U(t) \in U(\mathscr{H})$, φ_0 — циклический вектор в $\mathscr{H}$, $\|\varphi_0\|_{\mathscr{H}} = 1$. Случай не циклического представления сводится к этому (см. ниже замечание 1).

Рассмотрим линейное множество $\mathscr{D} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^1} a(t)\, U(t)\, \varphi_0 dg(t) \,\middle|\, a \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^1) \right\}$.

Определим отображение $\mathscr{F}_0$: $\mathscr{A}(\mathbb{R}^1) \ni a(t) \mapsto \mathscr{F}_0 a = \int_{\mathbb{R}^1} a(t)\, U(t)\, \varphi_0 dg(t) \in \mathscr{H}$.

Из неравенства

$$\|\mathscr{F}_0 a\|_{\mathscr{H}} = \int_{\mathbb{R}^1} \|a(t)\, U(t)\, \varphi_0 dg(t)\| \leqslant \int_{\mathbb{R}^1} |a(t)|\, dg(t) \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_{L_2(\mathbb{R}^1, dg)} = \|a\|_{A_1(\mathbb{R}^1)}$$

следует включение $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ и непрерывность $\mathscr{F}_0$. Отображение $\mathscr{F}_0$ индуцирует на $\mathscr{D}$ топологию пространства $\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)$. Если $\mathscr{F}_0$ не инъективно, то топология на $\mathscr{D}$ совпадает с фактор-топологией пространства $\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)/\mathrm{Ker}\, \mathscr{F}_0$.

Теорема 1. а) *$\mathscr{D}$ — линейное топологическое ядерное пространство*; б) *$\mathscr{D}$ плотно топологически вложено в $\mathscr{H}$*; в) $U(t) \in L(\mathscr{D} \to \mathscr{D})$ $\forall t \in \mathbb{R}^1$; г) *$\mathscr{D}$ содержится в областях определения генераторов однопараметрических подгрупп группы $\mathbb{R}^1$, и эти генераторы отображают $\mathscr{D}$ в себя*; д) *$\mathscr{D}$ состоит из целых векторов для генераторов однопараметрических подгрупп группы R^1*; е) *функция $\mathbb{R}^1 \ni t \to U(t) f \in \mathscr{D}$ непрерывна $\forall f \in \mathscr{D}$.*

Доказательство. а) $\mathscr{D}$ — ядерное пространство как фактор-пространство ядерного пространства $\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)/\mathrm{Ker}\, \mathscr{F}_0$. [9].

б) Топологичность вложения $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ следует из непрерывности $\mathscr{F}_0$. Докажем, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}$.

Пусть $U(t)$ — однопараметрическая группа унитарных операторов в пространстве $\mathscr{H}$, A — ее генератор, $\mathscr{H}^{\omega}(A) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \left\{ f \in \mathscr{H} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n f\|\, t^n/n! < \infty,\ 0 < t < \varepsilon \right\}$ — пространство аналитических векторов оператора A, $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$, — разложение единицы самосопряженного оператора A, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ — σ-алгебра борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$. Тогда справедлива лемма.

Лемма 1. *Для произвольного $f \in \mathscr{H}^{\omega}(A)$ з. л. о. $\{A^n f \mid n = 0, 1, \dots\} =$ $=$ з. л. о. $\{E(\Delta) f \mid \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)\} =$ з. л. о. $\{U(t) f \mid t \in \mathbb{R}^1\}$ (з. л. о. — замкнутая линейная оболочка).*

Доказательство. Достаточно для любого вектора $h\in\mathscr{H}$ доказать эквивалентность условий

$$(U(t)f,h)=0,\quad t\in\mathbb{R}^1, \tag{4}$$

$$(E(\Delta)f,h)=0,\quad \Delta\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1), \tag{5}$$

$$(A^nf,h)=0,\quad n=0,1,\ldots: \tag{6}$$

$(4)\Rightarrow(5)$ вытекает из спектральной теоремы $(U(t)f,h)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}\exp(itx)\,d(E(x)f,h)$ и теоремы единственности для преобразования Фурье комплексных мер; $(5)\Rightarrow(6)$ вытекает из спектральной теоремы $(A^nf,h)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}x^n d(E(x)f,h)$; $(6)\Rightarrow(4)$ вытекает из соотношений $((iA)^nf,h)=d^n/dt^n(U(t)f,h)|_{t=0}$, того что функция $\psi(t)=(U(t)f,h)$ аналитически продолжается в некоторую полоску $\{z\in\mathbb{C}^1\mid|\operatorname{Im}z|<\varepsilon\}$ [10] и теоремы единственности для аналитических функций.

Следствие 1. *Для произвольного вектора $f\in\mathscr{H}$ з. л. о.* $\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^1}a(t)\times U(t)f\,dg(t)\mid a\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)\right\}=$ *з. л. о.* $\{E(\Delta)f\mid\Delta\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)\}=$ *з. л. о.* $\{U(t)f\mid t\in\mathbb{R}^1\}$.

Доказательство. Вследствие леммы 1, достаточно доказать для любого вектора $h\in H$ эквивалентность двух условий:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}a(t)U(t)f\,dg(t),h\right)=0,\quad a\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^1), \tag{7}$$

$$(E(\Delta)f,h)=0,\quad \Delta\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1). \tag{8}$$

Воспользовавшись теоремой Фубини для операторозначных мер, (7) перепишем иначе:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}a(t)U(t)f\,dg(t),h\right)=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}a(t)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}\exp(itx)\,dE(x)\right)dg(t),h\right)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}a(t)\exp(itx)\,dg(t)\right)d(E(x)f,h)=0,\quad a\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^1). \tag{9}$$

Поэтому из (8) следует (7).

Обратно, пусть справедливо (7). Подставляя соотношения

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1}h_k(t)\exp(itx)\,dg(t)=(ix)^k(2^kk!)^{-1/2}\exp(-x^2/4),\quad k=0,1,\ldots \tag{10}$$

(см. [11], гл. XI, § 5) в (9), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1}(ix)^k(2^kk!)^{-1/2}\exp(-x^2/4)\,d(E(x)f,h)=0,\quad k=0,1,\ldots. \tag{11}$$

Рассмотрим комплексную меру $\omega(\Delta)=\int\limits_{\Delta}\exp(-x^2/4)\,d(E(x)f,h)$, $\Delta\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$. Ее преобразование Фурье $\varphi(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}\exp(itx)\,d\omega(x)$ аналитически продолжается во всю комплексную плоскость. Условие (11) означает, что $d^k/dt^k\varphi(t)|_{t=0}=0$, $k=0,1,\ldots$, следовательно, $\varphi(t)=0$, $t\in\mathbb{R}^1$, поэтому $\omega(\Delta)=0$, $\Delta\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ и $(E(\Delta)f,h)=0$, $\Delta\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$.

Полагая $f=\varphi_0$, заключаем, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}$.

в) Учитывая действие операторов представления $U(s)$ на векторы из $\mathscr{D}$:

$$U(s)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}a(t)U(t)\varphi_0\,dg(t)\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}a(t-s)(dg(t-s)/dg(t)\,U(t)\varphi_0\,dg(t))=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^1}(T_sa)(t)U(t)\varphi_0\,dg(t), \tag{12}$$

свойство это эквивалентно непрерывности оператора T_s: $\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)\ni a(t)\mapsto$ $\mapsto (T_s a)(t)=a(t-s)\exp(2ts-s^2)\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)$.

Лемма 2. $T_s\in L(\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)\to\mathscr{A}(\mathbb{R}^1))$.

Доказательство. Обозначим $L(l_1,l_2)(\sigma_2(l_1,l_2))$ пространство непрерывных операторов (Гильберта—Шмидта), действующих из $A_{l_1}(\mathbb{R}^1)$ в $A_{l_2}(\mathbb{R}^1)$. Так как пространство $\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)$ наделено топологией проективного предела, для доказательства леммы достаточно показать, что $\forall s\in\mathbb{R}^1$, $l_1\in N=\{1,2,\dots\}\ \exists\, l_2\in N: T_s\in L(l_2,l_1)$. В силу включения $\sigma_2(l_2,l_1)\subset L(l_2,l_1)$ достаточно убедиться в том, что $T_s\in\sigma_2(l_2,l_1)$. Так как

$$T_{k,m}(s)=(T_s h_m,h_k)_{L_2(\mathbb{R}^1,dg)}\begin{cases}0, & m>k,\\ (2^{(m+k)}m!k!)^{-1/2}C_k^m(2s)^{k-m}2^m m!, & m\leqslant k,\end{cases}\tag{13}$$

то

$$|T_{k,m}(s)|^2=\begin{cases}0, & m>k,\\ C_k^m(2s^2)^{k-m}/(k-m)!, & m\leqslant k,\end{cases}$$

и

$$\|T_s\|^2_{\sigma_2(l_2,l_1)}=\sum_{0\leqslant m\leqslant k}|T_{k,m}(s)|^2/(l_1^m l_2^k)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|T_{n+m,m}(s)|^2/(l_1^m l_2^{n+m})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{n+m}^m(2s^2)^n/(n!\,l_1^m l_2^{n+m})=\sum_{n=0}^{\infty}(2s^2/l_2)^n/(n!)^2\sum_{m=0}^{\infty}(n+m)!/(m!\,(l_1l_2)^m)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}((2s^2/l_2)^n/(n!)^2)/(n!\,(1-(l_1l_2)^{-1})^{n+1})=(l_1l_2/(l_1l_2-1))\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(2s^2l_1/(l_1l_2-1))^n/(n!)^3\leqslant(l_1l_2/(l_1l_2-1))\sum_{n=0}^{\infty}(2s^2l_1/(l_1l_2-1))^n/n!=$$

$$=(l_1l_2/(l_1l_2-1))\exp(2s^2l_1/(l_1l_2-1))<\infty.$$

Мы воспользовались разложением в ряд: $(n!\,(1-z)^{n+1})^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)!\,z^m/m!$ при $|z|<1$.

Докажем д). Из этого, в частности, будет следовать г). Для этого нам понадобится другое описание пространства $\mathscr{D}$. Пусть $a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kh_k(t)\in$ $\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)$. Учитывая (10), имеем

$$\int_{\mathbb{R}^1}a(t)U(t)\varphi_0dg(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_{\mathbb{R}^1}h_k(t)U(t)\,dg(t)\,\varphi_0=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_{\mathbb{R}^1}\left(\int_{\mathbb{R}^1}h_k(t)\exp(itx)\,dg(t)\right)dE(x)\,\varphi_0=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(ix)^k(2^kk!)^{-1/2}\exp(-x^2/4)\,dE(x)\,\varphi_0.$$

Поэтому, в силу (2) и (3), получаем описание $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D}=\left\{\int_{\mathbb{R}^1}b(x)\exp(-x^2/4)\,dE(x)\,\varphi_0\,|\,b\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^1)\right\}.\tag{14}$$

Покажем, что $\mathscr{D}$ состоит из целых векторов для генератора A однопараметрической группы $U(t)$, т. е. $\mathscr{D}\subset\mathscr{H}^c(A)=\left\{f\in\mathscr{H}\,|\,\sum_{n=0}^{\infty}\|A^nf\|\,t^n/n!<\infty\right.$

$\forall t > 0\Big\}$. Это эквивалентно включению $\mathcal{D} \subset \bigcap_{\delta>0} \mathcal{D}(\exp(\delta|A|))$ [10]. Действительно, учитывая (14), имеем

$$\left\| \exp(\delta|A|) \int_{\mathbb{R}^1} b(x) \exp(-x^2/4)\, dE(x)\, \varphi_0 \right\|_{\mathcal{H}} =$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^1} \exp(\delta|x|)\, b(x) \exp(-x^2/4)\, dE(x)\, \varphi_0 \right\|_{\mathcal{H}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^1} \exp(2\delta|x|)\, C^2_{b,\varepsilon} \exp(2\varepsilon|x|^2) \exp(-x^2/2)\, d(E(x)\varphi_0, \varphi_0) < \infty \quad \forall \delta > 0,$$

так как функция под знаком интеграла ограничена.

е) Учитывая (12) и топологию пространства $\mathcal{D}$, достаточно показать, что функция $\mathbb{R}^1 \ni s \to T_s a \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^1)$ непрерывна $\forall a \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^1)$. Для этого достаточно доказать лемму.

Лемма 3. $\forall l_1 \in N\, \exists l_2 \in N$ *такое, что* $\lim\limits_{s\to 0} \| T_s - T_0 \|_{L(l_2, l_1)} = 0$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2, достаточно показать, что $\lim\limits_{s\to 0} \| T_s - T_0 \|_{\sigma_2(l_2, l_1)} = 0$. Учитывая (13), имеем

$$((T_s - T_0)\, h_m, h_k) = (T_s h_m, h_k) - (h_m, h_k) = T_{k,m}(s) - \delta_{k,m},$$

поэтому

$$((T_s - T_0)\, h_m, h_k) = \begin{cases} 0, & m \geqslant k, \\ T_{k,m}(s), & m < k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\| T_s - T_0 \|^2_{\sigma_2(l_2, l_1)} = \sum_{0 \leqslant m < k} | T_{k,m}(s) |^2 / (l_1^m l_2^k) \leqslant l_1 l_2 / (l_1 l_2 - 1) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} (2s^2 l_1 / (l_1 l_2 - 1))^n / n! = l_1 l_2 / (l_1 l_2 - 1) \exp(2s^2 l_1 / (l_1 l_2 - 1)) - 1) \to 0$$

$$\text{при } s \to 0.$$

Замечание 1. Если исходное представление не циклично, т. е. $\overline{\mathcal{D}}_0 \neq \mathcal{H}$ $\left(\mathcal{D}_0 = \left\{ \int_{\mathbb{R}^1} a(t)\, U(t)\, \varphi_0 dg(t) \,\middle|\, a \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^1) \right\},\ \varphi_0 \in \mathcal{H}\right.$ — некоторый ненулевой вектор$\Big)$, то выберем $\varphi_1 \in \mathcal{D}_0^\perp$, построим $\mathcal{D}_1 = \left\{ \int_{\mathbb{R}^1} a(t)\, U(t)\, \varphi_1\, dg(t) \,\middle|\, a \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^1) \right\}$, при этом очевидно, что $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_0$ и т. д. Получим не более чем счетное множество пространств $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{H}$ таких, что $\mathcal{D}_n \perp \mathcal{D}_k$, $n \neq k$, з. л. о. $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n = \mathcal{H}$, и определим $\mathcal{D} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$.

2. Рассмотрим сильно непрерывное унитарное циклическое представление $\mathbb{R}_0^\infty$ в пространстве $\mathcal{H}: \mathbb{R}_0^\infty \ni t \mapsto U(t) \in U(\mathcal{H})$, φ_0 — циклический вектор в $\mathcal{H}$, $\| \varphi_0 \|_{\mathcal{H}} = 1$. Случай не циклического представления сводится к этому (см. ниже замечание 2).

Пусть E — разложение единицы, определенное на $(\mathbb{R}^\infty, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty))$ ($\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \ldots$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ — σ-алгебра подмножеств $\mathbb{R}^\infty$, порожденная цилиндрическими множествами с борелевскими основаниями) такое, что $U(t) = \int_{\mathbb{R}^\infty} \exp(i(t, x))\, dE(x)$, $t \in \mathbb{R}_0^\infty$. Для разложения единицы E выберем гильбертово пространство $l_2(a_n)$ ($a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$) такое, что $E(l_2(a_n)) = E(\mathbb{R}^\infty)$. На сопряженном пространстве $l_2(a_n^{-1})$ зададим гауссову меру

$dg_{\alpha}(t)=\bigotimes_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\pi^{-1})^{1/2}\exp(-\alpha_k t_k)\,dt_k$ такую, чтобы $g_{\alpha}(l_2(a_n^{-1}))=1$. Для этого достаточно, в силу признака Колмогорова—Хинчина, подобрать последовательность $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k a_k)^{-1}<\infty$. По гауссовой мере $dg_{\alpha}(t)$ на $(\mathbb{R}^{\infty},\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\infty}))$ построим пространство $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})$ следующим образом [7, 8]: обозначим N_0^{∞} множество последовательностей натуральных чисел, каждая из которых, начиная с некоторого места (своего для каждой последовательности), принимает значения, равные единице. Пусть $r>0$, $h_n^r(t)=h_n(\sqrt{r}t)$ и $A_l^r(\mathbb{R}^1)=\left\{u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n h_n^r(t)\mid\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|^2 l^n<\infty\right\}$, $l=1,2,\ldots$

Для $\tau\in N_0^{\infty}$, $(\tau=(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$ обозначим $A_{\tau}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})=\bigotimes_{k=1}^{\infty}A_{\tau_k}^{\alpha_k}(\mathbb{R}^1)$ и $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})=$ $=\varprojlim_{\tau\in N_0^{\infty}}A_{\tau}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})$. Известно [7, 8], что $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})$ — ядерное пространство, состоящее из цилиндрических функций.

Рассмотрим линейное множество $\mathscr{D}=\left\{\int_{\mathbb{R}^{\infty}}a(t)U(t)\varphi_0 dg_{\alpha}(t)\mid a\in\mathscr{A}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})\right\}$.

Определим отображение $\mathscr{F}_0:\mathscr{A}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})\ni a\to\mathscr{F}_0a=\int_{\mathbb{R}^{\infty}}a(t)U(t)\varphi_0 dg_{\alpha}(t)\in\mathscr{H}$.

Из неравенства $\|\mathscr{F}_0a\|_{\mathscr{H}}=\|\int_{\mathbb{R}^{\infty}}a(t)U(t)\varphi_0 dg_{\alpha}(t)\|_{\mathscr{H}}\leqslant\int_{\mathbb{R}^{\infty}}|a(t)|\,dg_{\alpha}(t)\leqslant$ $\leqslant\|a\|_{L_2(\mathbb{R}^{\infty},dg_{\alpha})}=\|a\|_{A_1^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})}$ $(1=(\tau_k)_{k=1}^{\infty},\ \tau_k=1\ \ \forall k)$ следует включение $\mathscr{D}\subset\mathscr{H}$ и непрерывность $\mathscr{F}_0$. Отображение $\mathscr{F}_0$ индуцирует на $\mathscr{D}$ топологию пространства $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})$. Если $\mathscr{F}_0$ не инъективно, то топология на $\mathscr{D}$ совпадает с фактор-топологией пространства $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})/\mathrm{Ker}\,\mathscr{F}_0$.

Теорема 2. а) *$\mathscr{D}$ — линейное топологическое ядерное пространство;* б) *$\mathscr{D}$ плотно топологически вложено в $\mathscr{H}$;* в) $U(t)\in L(\mathscr{D}\to\mathscr{D})$ $\forall t\in$ $\in\mathbb{R}_0^{\infty}$; г) *$\mathscr{D}$ содержится в областях определения генераторов однопараметрических подгрупп группы $\mathbb{R}_0^{\infty}$, и эти генераторы переводят $\mathscr{D}$ в себя;* д) *$\mathscr{D}$ состоит из целых векторов для генераторов однопараметрических подгрупп группы $\mathbb{R}_0^{\infty}$;* е) *функция $\mathbb{R}_0^{\infty}\ni t\to U(t)f\in\mathscr{D}$ непрерывна $\forall f\in\mathscr{D}$.*

Доказательство. а) $\mathscr{D}$ — ядерное пространство как фактор-пространство ядерного пространства $\mathscr{A}^{\alpha}(\mathbb{R}^{\infty})/\mathrm{Ker}\,\mathscr{F}_0$ [9].

б) Топологичность вложения $\mathscr{D}\subset\mathscr{H}$ следует из непрерывности отображения $\mathscr{F}_0$. Докажем, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}$.

Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — семейство самосопряженных операторов, возможно некоммутирующих и неограниченных, действующих в пространстве $\mathscr{H}$, $A_0=\mathrm{id}$ — единичный оператор. Обозначим $\rho_{n,m}(f)=\max_{1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant m}\|A_{i_1}\ldots A_{i_n}f\|$,

$n=0,1,\ldots,\quad m=1,2,\ldots\quad(\rho_{0,m}(f)=\|f\|),\quad\mathscr{H}^{\omega}(\{A_k\}_{k=1}^{m})=\bigcup_{\varepsilon>0}\left\{f\in\mathscr{H}\ \middle|\ \sum_{n=0}^{\infty}\rho_{n,m}(f)\,t^n n!<\infty,\ 0<t<\varepsilon\right\}$, $\quad\mathscr{H}^{\omega}(\{A_k\}_{k=1}^{\infty})=\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathscr{H}^{\omega}(\{A_k\}_{k=1}^{m})$ — множество совместных аналитических векторов для семейства операторов $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$. $E_k(\Delta_k)$, $\Delta_k\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ — разложение единицы оператора A_k, $U_k(t_k)=$ $=\exp(it_kA_k)$. Тогда справедлива лемма, аналогичная лемме 1.

Лемма 4. *Для произвольного вектора $f\in\mathscr{H}^{\omega}(\{A_k\}_{k=1}^{\infty})$ з. л. о.* $\{A_{i_1}\ldots A_{i_n}f\mid 0\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant m,\ n=1,2,\ldots,\ m=0,1,\ldots\}=$ *з. л. о.* $\{E_{i_1}(\Delta_1)\ldots$ $\ldots E_{i_n}(\Delta_n)f\mid\Delta_1,\ldots,\Delta_n\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1),\ 1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant m,\ n=1,2,\ldots,m=1,2,\ldots\}=$

$= з. л. о. \ \{U_{i_1}(t_1) \ldots U_{i_n}(t_n) f \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^1, \ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant m, \ n = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m = 1, 2, \ldots\}$.

Следствие 2. *Для произвольного вектора* $f \in \mathcal{H}$ *з. л. о.* $\left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} a(t) \times \right.$ $\left. \times U(t) f dg_\alpha(t) \mid a \in \mathcal{A}^\alpha(\mathbb{R}^\infty) \right\} =$ *з. л. о.* $\{E(\Delta) f \mid \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)\} =$ *з. л. о.* $\{U(t) f \mid t \in \mathbb{R}_0^\infty\}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 и следствия 1.

в) Достаточно убедиться в непрерывности оператора $T^{s\alpha}$, $s \in \mathbb{R}_0^\infty$, $\mathcal{A}^\alpha(\mathbb{R}^\infty) \ni a(t) \mapsto (T_s^\alpha a)(t) = a(t - s) \exp\left(\sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k (2t_k s_k - s_k^2)\right) \in \mathcal{A}^\alpha(\mathbb{R}^\infty)$.

Обозначим I множество неотрицательных целых чисел, I_0^∞ — совокупность последовательностей неотрицательных целых чисел, каждая из которых, начиная с некоторого места (своего для каждой последовательности), принимает значения, равные нулю. Для $\beta \in I_0^\infty$ обозначим через $\nu(\beta)$ минимальное $m = 1, 2, \ldots$ такое, что $\beta_{m+1} = \beta_{m+2} = \ldots = 0$; для $\tau \in N_0^\infty$, $\tau = (\tau_k)_{k=1}^\infty$ обозначим через $\tau^\beta = \tau_1^{\beta_1} \ldots \tau_{\nu(\beta)}^{\beta_{\nu(\beta)}}$. Непрерывность оператора T_s^α следует из описания пространства $\mathcal{A}^\alpha(\mathbb{R}^\infty)$: $\mathcal{A}^\alpha(\mathbb{R}^\infty) = \left\{ \sum\limits_{\beta \in I_0^\infty} U_\beta h_\beta^\alpha(t) \times \right.$ $\left. \times \left| \sum\limits_{\beta \in I_0^\infty} |U_\beta|^2 \tau^\beta < \infty, \ \tau \in N_0^\infty \right. \right\}$, где $h_\beta^\alpha(t) = h_{\beta_1}^{\alpha_1}(t_1) \ldots h_{\beta_{\nu(\beta)}}^{\alpha_{\nu(\beta)}}(t_{\nu(\beta)})$, $\beta \in I_0^\infty$, соотношений

$$(T_s^\alpha h_\beta^\alpha, h_\gamma^\alpha)_{L_2(\mathbb{R}^\infty, dg_\alpha)} = \prod_{k=1}^{\max\{\nu(s), \nu(\beta), \nu(\gamma)\}} (T_{s_k}^{\alpha_k} h_{\beta_k}^{\alpha_k}, h_{\gamma_k}^{\alpha_k})_{L_2(\mathbb{R}^1, dg_{\alpha_k})}, \tag{15}$$

$$(T_{s_k}^{\alpha_k} h_{\beta_k}^{\alpha_k}, h_{\gamma_k}^{\alpha_k})_{L_2(\mathbb{R}^1, dg_{\alpha_k})} = (T_{s_k/\sqrt{\alpha_k}} h_{\beta_k}, h_{\gamma_k})_{L_2(\mathbb{R}^1, dg)} \tag{16}$$

и непрерывности оператора $T_s : \mathcal{A}(\mathbb{R}^1) \to \mathcal{A}(\mathbb{R}^1)$ в одномерном случае (лемма 2).

Докажем д). Из этого, в частности, будет следовать г). Для этого воспользуемся описанием пространства $\mathcal{D}$, аналогичным (14): $\mathcal{D} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} b(x) \times \right.$ $\left. \times \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^\infty x_k^2/(4\alpha_k)\right) dE(x) \varphi_0 \mid b \in \mathcal{A}^\alpha(\mathbb{R}^\infty) \right\}$.

е) Доказательство проводится аналогично одномерному случаю, учитывая соотношения типа (15), (16).

Замечание 2. Если исходное представление не циклично, т. е. $\mathcal{D}_0 \neq \mathcal{H}$ $\left(\mathcal{D}_0 = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} a(t) U(t) \varphi_0 dg_\alpha(t) \mid a \in A^\alpha(\mathbb{R}^\infty) \right\}, \ \varphi_0 \in \mathcal{H} \text{ — некоторый ненулевой вектор}\right)$, то выберем $\varphi_1 \in \mathcal{D}_0^\perp$, построим $\mathcal{D}_1 = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} a(t) U(t) \varphi_1 dg_\alpha(t) \right.$ $\left. \mid a \in \mathcal{A}^\alpha(\mathbb{R}^\infty) \right\}$, при этом очевидно, что $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_0$, и т. д. Получим не более чем счетное множество пространств $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{H}$ таких, что $\mathcal{D}_n \perp \mathcal{D}_k$, $n \neq k$, з. л. о. $\bigoplus\limits_{n=0}^\infty \mathcal{D}_n = \mathcal{H}$, и определим $\mathcal{D} = \bigoplus\limits_{n=0}^\infty \mathcal{D}_n$.

1. *Garding L.* Notes on continuous representations of Lie groups.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1947, 33, N 6, p. 331—332.
2. *Гельфанд И. М.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве.— Докл. АН СССР, 25, N 9, с. 711—716.

3. *Косяк А. В.* Аналитические и целые векторы для семейств операторов.— В кн.: Спектральный анализ дифференциальных операторов.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 3—18.
4. *Reed M. C.* A Garding domain for quantum fields.— Comm. Math. Phys., 1969, **14**, N 4, p. 336—346.
5. *Hegerfeldt G. C.* Garding domains and analytic vectors for quantum fields.— Journ. Math. Phys., 1972, **13**, N 6, p. 821—827.
6. *Simon J.* A Garding domain for representations of some Hilbert Lie groups.— Letters in Math. Phys., 1975, **1**, N 1, p. 23—29.
7. *Kondrat'ev Yu. G., Samoylenko Yu. S.* The spaces of trial and generalized functions of infinite number of variables.— Rep. Math. Phys., 1978, **14**, N 3, p. 325—350.
8. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наукова думка, 1978.— 360 с.
9. *Шефер X.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.
10. *Goodman R.* Analytic and entire vectors for representations of Lie groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **143**, N 9, p. 55—76.
11. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп.— М. : Наука, 1965.— 588 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 22.02.82
после переработки 28.12.82