1983 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 35, № 4

УДК 517.926

А. Г. Баскаков

Теорема о приводимости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами

1. Введение. Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения вида

$$dx/dt = Ax + B(t)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}$ — комплексная плоскость), A принадлежит пространству $L(\mathbb{C}^n)$ линейных операторов, действующих в $\mathbb{C}^n$, $B: \mathbb{R} \to L(\mathbb{C}^n)$ — квазипериодическая функция с частотным базисом $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$.

Известные методы доказательства приводимости уравнения (1) к уравнению с постоянными коэффициентами [1, 2] основаны на последовательных заменах переменной, имеющих целью уменьшить коэффициенты, зависящие от $t \in \mathbb{R}$. К сожалению, такой подход приводит к трудностям, связанным с появлением малых знаменателей и, следовательно, к существенным ограничениям на функцию B.

В настоящей статье вопрос приводимости уравнения (1) решается следующим образом. За основу берется известный результат о приводимости для скалярного уравнения. А именно, уравнение (1) со скалярной функцией B, имеющей нулевое среднее значение, приводимо к уравнению с постоянным коэффициентом только тогда, когда интеграл от функции B ограничен. При обычных ограничениях на собственные числа оператора A (см. предположение 2) уравнение (1) преобразованием Ляпунова расщепляется на скалярные дифференциальные уравнения с квазипериодическими коэффициентами (при этом проблемы малых знаменателей не существует [3]). Следовательно, основной вопрос состоит в том, чтобы наложить такие ограничения на функцию B, чтобы получившееся дифференциальное уравнение имело интегрируемые коэффициенты. Основной результат статьи (теорема) получен при значительно меньше обычных предположениях относительно малости функции B, ее гладкости, содержит удобные в использовании конструктивные оценки. Из теоремы легко выводятся многие известные результаты, как правило, получаемые из теорем о приводимости. В частности, таким образом получена теорема из [1, 4] о мере приводимых систем уравнений, результат из [2, 5] о представлении оператора Коши для уравнений с почти периодическими коэффициентами, голоморфно зависящими от параметра и другие результаты.

2. Класс допустимых возмущений. Сделаем два обычно используемых предположения относительно коэффициентов уравнения (1). При этом считаем, что $\mathbb{C}^n$ — нормированное пространство и в $L(\mathbb{C}^n)$ введена операторная норма, индуцированная из $\mathbb{C}^n$ (в этой статье используется норма $\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$).

Предположение 1. *Оператор $A \in L(\mathbb{C}^n)$ имеет диагональный вид в обычном базисе $(e_i) \subset \mathbb{C}^n$: $Ae_i = \lambda_i e_i$, причем $d_0 = 1/2 \min_{i \neq j} |\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_j)| > 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.*

Предположение 2. *Функция B принадлежит банахову пространству $AP_\omega(\mathbb{R}, L(\mathbb{C}^n))$ (короче AP_ω) непрерывных квазипериодических операторозначных функций с частотным базисом $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющему условию*

$$|(\omega, k)| = |\omega_1 k_1 + \ldots + \omega_m k_m| \geqslant \gamma \|k\|^{-\tau} \tag{2}$$

для любого ненулевого вектора $k=(k_1, \dots, k_m)$ из аддитивной группы $\mathbb{Z}^m$ векторов из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами, где $\tau > m$ и $\gamma > 0$ — некоторые постоянные. Как хорошо известно, мера Лебега множества векторов ω из $\mathbb{R}^m$, не удовлетворяющих неравенству (2), где $\tau = m+1$, равна нулю.

Вопрос о расщеплении уравнения (1) на скалярные уравнения с интегрируемыми коэффициентами положительно будет решен для функции B из класса функций из следующего определения.

Определение. *Линейное многообразие $\mathfrak{A}_\omega$ функций из банаховой алгебры $AP\omega(\mathbb{R}, L(\mathbb{C}^n))$ операторозначных квазипериодических функций назовем допустимым пространством, если выполнены следующие условия:*

1) $XY \in \mathfrak{A}_\omega \quad \forall X, Y \in \mathfrak{A}_\omega$ (т. е. $\mathfrak{A}_\omega$ — *алгебра*);

2) $\mathfrak{A}_\omega$ — *нормированное пространство со своей нормой* $\| X \|_\omega$, $X \in \mathfrak{A}_\omega$, *удовлетворяющей неравенству* $\| X \|_\omega \geqslant \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \| X(t) \|$, *причем* $\mathfrak{A}_\omega$ *полно относительно этой нормы и является банаховой алгеброй* (*т. е.* $\| XY \|_\omega \leqslant \| X \|_\omega \| Y \|_\omega \ \forall X, Y \in \mathfrak{A}_\omega$);

3) *для любой функции* $X \in \mathfrak{A}_\omega$ *и любого* $s \in \mathbb{R}$ *функция* $X_s(t) = X(t+s)$ *принадлежит* $\mathfrak{A}_\omega$, *а* $s \mapsto X_s : \mathbb{R} \to \mathfrak{A}_\omega$ — *непрерывная почти периодическая функция, причем* $\| X_s \| = \| X \| \ \forall s \in \mathbb{R}$;

4) *каждая функция* X_0 *из* $\mathfrak{A}_\omega$ *с нулевым средним значением* $I(X_0)$ *имеет ограниченный интеграл и оператор* $X \mapsto Y : \mathfrak{A}_\omega \to AP_\omega$, *где* Y — *интеграл от* $X - IX$, *непрерывен;*

5) *если* $T : L(\mathbb{C}^n) \to L(\mathbb{C}^n)$ — *трансформатор, т. е.* $T \in L(L(\mathbb{C}^n))$, *то функция* $(TX)(t) = T(X(t))$ *принадлежит* $\mathfrak{A}_\omega$ *для любой функции* $X \in \mathfrak{A}_\omega$ *и* $\| TX \|_\omega \leqslant \| T \| \| X \|_\omega$.

Рассмотрим несколько примеров допустимых пространств. Имея в виду естественный изометрический изоморфизм (который является также алгебраическим) банаховых алгебр AP_ω и $C_{2\pi} = C_{2\pi}(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{C}^n))$, где $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных периодических периода 2π по каждой переменной функций со значениями в $L(\mathbb{C}^n)$, мы часто допустимое пространство строим в пространстве $C_{2\pi}$.

Пример 1. Пусть $m=1$. Тогда в качестве допустимого пространства можно взять все пространство AP_ω, являющееся в этом случае пространством периодических периода $2\pi/\omega_1$ функций.

Пример 2. Рассмотрим функцию $\alpha(k) = (\| k \| + 1)^\tau : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}$, которая, очевидно, обладает свойствами: а) $\alpha(0) = 1$ и б) $\alpha(k_1 + k_2) \leqslant \alpha(k_1)\alpha(k_2) \ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^m$. Определим пространство $\mathfrak{A}_\omega$ как множество всех функций X из AP_ω, для которых сходится ряд $\Sigma \| X_k \| \alpha(k)$, $k \in \mathbb{Z}^m$, если ряд Фурье функции X имеет вид $X(t) \sim \Sigma X_k \exp i(k, \omega) t$, $k \in \mathbb{Z}^m$, и положим $\| X \|_\omega = \Sigma \| X_k \| \alpha(k)$, $k \in \mathbb{Z}^m$. Отмеченные свойства весовой функции α гарантируют выполнение аксиом 1) и 2). Выполнение остальных аксиом следует непосредственно из определения пространства.

Пример 3. Пусть $\mathfrak{A}_\omega$ — банахова алгебра функций из $C_{2\pi}$, которые $[\tau]$ раз ($[\tau]$ — целая часть числа τ) непрерывно дифференцируемы по каждой переменной и удовлетворяют неравенству Гельдера с показателем $\beta > \tau - [\tau]$. Положим

$$\| \varphi \|_\omega = \sum_{s=0}^{[\tau]} \frac{1}{s!} \max_{x\in\mathbb{R}^m} \left\| \frac{\partial^s \varphi(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} \right\| + \sum_{s=0}^{[\tau]} \frac{1}{s!} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \times$$

$$\times \left(\max_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^m \\ x_j=y_j, i\neq j}} \left\| \frac{\dfrac{\partial^s \varphi(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} - \dfrac{\partial^s \varphi(y)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}}}{x_i - y_i} \right\| \right)$$

где $s! = s_1! \dots s_m!$, $s = s_1 + \dots + s_m$.

Из [6, 7] (где вопрос приводимости решался для систем уравнений с менее гладкими чем в [1] коэффициентами) следует выполнение аксиомы 4). Выполнение остальных аксиом очевидно.

Пример 4. Все аксиомы допустимого пространства выполняются для банаховой алгебры $\mathfrak{A}_\omega$ голсморфных в полосе $\|\operatorname{Im}\varphi\| \leqslant \rho > 0$ функций из $C_{2\pi}$ ($\|X\|_\omega = \sup\limits_{\|\operatorname{Im}\varphi_i\| \leqslant \rho} \|X(\varphi)\|$).

3. Основной результат. Пусть $\mathfrak{A}_\omega$ — допустимое пространство. Рассмотрим линейные непрерывные операторы $J \in L(\mathfrak{A}_\omega)$ и $\Gamma \in L(\mathfrak{A}_\omega)$ определяемые следующим образсм. J — оператор диагонализации (относительно базиса (e_i)) операторных функций из $\mathfrak{A}_\omega$

$$(JX)(t) = P_1 X(t) P_1 + \ldots + P_n X(t) P_n = \operatorname{diag} X(t) : \mathfrak{A}_\omega \to \mathfrak{A}_\omega,$$

где P_i, $1 \leqslant i \leqslant n$,— оператор проектирования на собственное подпространство оператора A, отвечающее собственному числу λ_i (параллельно другим собственным подпространствам).

Функцию ΓY для $Y \in \mathfrak{A}_\omega$ определим как решение из $\mathfrak{A}_\omega$ дифференциального уравнения $dX/dt = AX - XA + Y - JY$, удовлетворяющего условию $JX = 0$. Ясно (более подробно см. [3]), что решение $X = \Gamma Y$ можно представить в виде

$$(\Gamma Y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s)[Y(t-s) - JY(t-s)]\, ds,$$

где функция $G: \mathbb{R} \to L(L(\mathbb{C}^n))$ определяется так

$$G(s) = \begin{cases} \exp(\tilde{A}s) P_-, & s \geqslant 0, \\ -\exp(\tilde{A}s) P_+, & s < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{A}T = AT - TA : L(\mathbb{C}^n) \to L(\mathbb{C}^n),\ P_+T = \sum_{\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_j) > 0} P_i T P_j,$$

$$P_-T = \sum_{\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_j) < 0} P_i T P_j, \quad T \in L(\mathbb{C}^n).$$

Из определения операторов J и Γ и из аксиом 3) и 5) следует корректность определения линейных операторов J и Γ, а также получаем оценки

$$\|J\| = \|I - J\| = 1, \quad \|\Gamma Y\|_\omega \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G(s)\|\, ds \|Y\|_\omega \leqslant d_0^{-1} \|Y\|_\omega. \tag{3}$$

Пусть X — произвольная функция из $\mathfrak{A}_\omega$, удовлетворяющая неравенству

$$d_0^{-1} \|X\| < 1. \tag{4}$$

Преобразование Ляпунова, приводящее уравнение (1) к уравнению с диагональными коэффициентами, будем искать в виде $x(t) = y(t) + (\Gamma X) \times (t)\, y(t)$. Непосредственно из определения оператора Γ получаем следующее равенство

$$\left(\frac{d}{dt} - A - B(t)\right)(y(t) + (\Gamma X)(t)\, y(t)) - (I + (\Gamma X)(t)) \times$$

$$\times \left(\frac{d}{dt} - A - (JX)(t)\right) y(t) = (X(t) - B(t)(\Gamma X)(t) + (\Gamma X)(t)(JX)(t) -$$

$$- B(t))\, y(t).$$

Отсюда следует, что, если X_0 — решение нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X) JX + B, \tag{5}$$

рассматриваемого в банаховой алгебре $\mathfrak{A}_\omega$, то уравнение (1) приводимо к дифференциальному уравнению вида

$$dy/dt = Ay + (JX_0)(t)\,y, \tag{6}$$

если только X_0 удовлетворяет неравенству (4), гарантирующему обратимость операторной функции $I + \Gamma X_0$. Применяя к обеим частям уравнения (5) оператор J (и учитывая равенство $J(\Gamma XJY) = 0\ \forall X, Y \in \mathfrak{A}_\omega$), получим, что $JX = J(B\Gamma X) + JB$, и, следовательно, уравнение (5) эквивалентно уравнению (также рассматриваемого в $\mathfrak{A}_\omega$)

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)\,JB - (\Gamma X)\,J(B\Gamma X) + B. \tag{7}$$

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}_\omega$ — допустимое пространство. Если функция B принадлежит $\mathfrak{A}_\omega$ и удовлетворяет неравенству*

$$\varepsilon = \| B \|_\omega d_0^{-1} < 1/4, \tag{8}$$

то уравнение (1) *приводимо с помощью преобразования Ляпунова, определяемого функцией Q вида $Q(t) = (\mathcal{I} + (\Gamma X_0)(t)) \exp \int\limits_0^t (X_0(s) - JX_0)\,ds$, к уравнению с постоянными коэффициентами*

$$ds/dt = Az + \mathcal{I}(J(X_0))\,z, \tag{9}$$

где $\mathcal{I}Y$ обозначает среднее значение функции $Y \in AP_\omega$ и $X_0 \in \mathfrak{A}_\omega$ — решение уравнения (7), *которое можно найти методом последовательных приближений. Кроме того, имеют место следующие оценки*

$$\| X_0 - B \|_\omega \leqslant \varepsilon\varphi(\varepsilon)\, \| B \|_\omega, \tag{10}$$

$$\| \Gamma X_0 - \Gamma B \|_\omega \leqslant \varepsilon^2\varphi(\varepsilon), \tag{11}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} | \tilde{\lambda}_i - \lambda_i | \leqslant \| \mathcal{I}(JX_0) - \mathcal{I}(JB) \|_\omega \leqslant \varepsilon(\varepsilon\varphi(\varepsilon) + 1)\, \| B - JB \|_\omega, \tag{12}$$

$$\mathcal{I}(JX_0) - \mathcal{I}(JB) - \mathcal{I}(J(B\Gamma B)) \|_\omega \leqslant \varepsilon\varphi(\varepsilon)\, d_0^{-1} \| B - JB \|_\omega^2 \leqslant \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)\, \| B - JB \|_\omega, \tag{13}$$

где $2 \leqslant \varphi(\varepsilon) = (4 + 2\varepsilon)(1 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + (1 - 4\varepsilon)^{1/2})^{-1} < 12$ и $\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, n$ — *собственные числа оператора* $A - \mathcal{I}(JX_0)$.

Доказательство. Из рассуждений, приведенных перед формулировкой теоремы, следует, что уравнение (1) приводимо к уравнению (6), если уравнение (7) разрешимо и для решения X_0 этого уравнения выполнено неравенство (6).

В целях выяснения условий разрешимости уравнения (9) рассмотрим скалярное уравнение

$$t = \psi(t)\, \| B \|_\omega d_0^{-2} t^2 + 2\, \| B \|_\omega d_0^{-1} t + \| B \|_\omega, \tag{14}$$

являющееся мажорантным для уравнения (7) (более подробно см. в [8], гл. XVIII и особенно теорему 1 из § 1, которую мы в дальнейшем используем). Именно тот факт, что $\mathfrak{A}_\omega$ — банахова алгебра, позволяет сделать вывод о том, что уравнение (14) мажорантное для (7). Условием существования положительного корня уравнения (14) и, следовательно, условием разрешимости уравнения (7) служит условие (8). Оценка (10) следует из неравенства $\| X_0 - B \|_\omega \leqslant t_* - \| B \|_\omega$, где t_* — наименьший положительный корень уравнения (14). Остальные оценки — простые следствия оценки (10): например, (13) следует из оценки (10) и представления $JX_0 = J(B\Gamma X_0) + JB = JB + J(B\Gamma B) + J(B\Gamma(X_0 - B)) = JB + J(B\Gamma B) + J(B\Gamma B) + J((B - JB)\,\Gamma(X_0 - B))$, если учесть, что из аксиомы 3) и определения среднего J следует, что $\| \mathcal{I}X \| \leqslant \| X \|_\omega$.

Наконец отметим, что из оценки (11), условия (8) и аксиомы 2) получаем, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \| (\Gamma X_0)(t) \| \leqslant \| \Gamma X_0 \|_\omega \leqslant \| \Gamma B + \Gamma(X_0 - B) \|_\omega \leqslant d_0^{-1}(\| B \|_\omega + \| X_0 - B \|_\omega) \leqslant \varepsilon(1 + \varepsilon\varphi(\varepsilon)) < 1/4\,(1 + 1/4 \cdot 12) = 1$, т. е. $I + \Gamma X_0$ — обратимая операторная функция.

Итак, если выполнено условие (8), то уравнение (1) приводимо преобразованием Ляпунова $x(t) = y(t) + (\Gamma X_0)(t)\, y(t)$ к уравнению (6), являющемуся системой скалярных дифференциальных уравнений, причем функция JX_0 принадлежит $\mathfrak{A}_\omega$, и поэтому в силу аксиомы 4) функция $JX_0 - \mathcal{I}(JX_0)$ интегрируема. Следовательно, уравнение (6) преобразованием Ляпунова вида $y(t) = \exp \int\limits_0^t (JX_0)(s) - \mathcal{I}(JX_0))\, ds\, z(t)$ приводимо к уравнению (9). Теорема доказана.

4. Следствия из теоремы.

Следствие 1 [1, 4]. *Если B принадлежит некоторому допустимому пространству $\mathfrak{A}_\omega$, то внутренняя мера Лебега* $\operatorname{mes} M\ (B)$ *множества $M(B)$ операторов A из единичного шара S_1 пространства* $L(\mathbb{C}^n)$, *для которых уравнение* (1) *приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами, удовлетворяет неравенству* $\operatorname{mes} S_1 - \operatorname{mes} M(B) \leqslant \mathrm{Const}\, \| B \|_\omega$, *где* Const *может быть эффективно вычислена.*

Следствие 2. *Дифференциальное уравнение вида*

$$dx/dt = Ax + \lambda B(t, \lambda)\, x \tag{15}$$

с голоморфной в некоторой области D из $\mathbb{C}$ функцией $\lambda \mapsto B(\cdot, \lambda): D \subset \subset \mathbb{C} \to \mathfrak{A}_\omega$ допускает представление Флоке вида

$$U(t, \lambda) = Q(t, \lambda) \exp tA_1(\lambda),$$

где $Q(\cdot, \lambda) \in AP_\omega$ и $A_1(\lambda) \in L(\mathbb{C}^n)$ голоморфно зависит от λ из области $D_0 = \{\lambda \in D : 4 |\lambda| \| B(\cdot, \lambda) \|_\omega < d_0\}$.

Доказательство этого утверждения немедленно следует из теоремы, если учесть, что решение X_0 уравнения (7), в данном случае с голоморфно зависящими от λ коэффициентами, получается методом простых итераций. Кстати, именно в этом следствии требуется непрерывность оператора интегрирования из аксиомы 4).

Следствие 3. [2, 5]. *Фундаментальная система решений уравнения вида* (15), *где $\lambda \mapsto B(\cdot, \lambda): D \subset \mathbb{C} \mapsto AP_\omega$ — голоморфная в области D функция, допускает представление вида $X(t, \lambda) = Q(t, \lambda) \exp \int\limits_0^t A(\tau, \lambda)\, d\tau$, где $Q(\cdot, \lambda)$ и $A(\cdot, \lambda)$ — голоморфные по $\lambda \in D_0 = \{\lambda \in D : 4 |\lambda| \| B(\cdot, \lambda) \| < d_0\}$ квазипериодические функции, причем A — диагональная матрица.*

Для доказательства отметим, что приведение уравнения (15) к диагональному виду, осуществляемое в первой части теоремы, не требует выполнения предположения 2) и аксиомы 4) и, следовательно, в качестве $\mathfrak{A}_\omega$ можно взять пространство AP_ω (как, впрочем, и пространство непрерывных или почти периодических функций). Совершенно ясно, что рост решений уравнения (15) определяется ростом функции $\exp \int\limits_0^t A(\tau, \lambda)\, d\tau$, поведение которой, в свою очередь, зависит от степени гладкости периодической функции B_0, для которой $B_0(\omega t) = B(t, \lambda)$. Эта взаимосвязь легко прослеживается введением соответствующих (под эту задачу) допустимых пространств.

Поскольку уравнение с диагональной функцией всегда почти приводимо [2], то при тех же ограничениях, что и в следствии 3, получаем почти приводимость уравнения (15) к уравнению с постоянной функцией $A(\lambda)$, голоморфно зависящей от $\lambda \in D_0$ (причем $A(0) = A$).

Важным результатом теоремы является тот факт, что в ее оценках (и особенно в условии (8)) не участвует трудно определяемая постоянная γ из условия (2) предположения 2. Отметим также, что при доказательстве теоремы важен факт существования среднего в $\mathfrak{A}_\omega$ функции $s \mapsto X_s : \mathbb{R} \to \to \mathfrak{A}_\omega$ из аксиомы 3), а не ее почти периодичность.

Сделаем еще одно интересное замечание. Если в качестве допустимого пространства $\mathfrak{A}_\omega$ взять пространство из примера 4, то из теоремы будет следовать, что для голоморфной в полосе $\| \operatorname{Im} \varphi \| \leqslant \rho$ функции B, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{\|\operatorname{Im}\varphi\|\leqslant\rho} \|B(\varphi)\| < 1/4d_0$, имеет место приводимость уравнения (1) к уравнению с постоянными коэффициентами. Поскольку в этом условии ρ можно взять сколько угодно малым, то утверждение будет иметь место лишь при выполнении условия $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|B(\omega t)\| < 1/4d_0$.

Следствие 5. *Если B — периодическая голоморфная в области $\|\operatorname{Im}\varphi\| \leqslant \rho > 0$ функция и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|B(\omega t)\| < 1/4d_0$, то имеет место утверждение теоремы, где во всех неравенствах (10) — (13) функции оцениваются по норме пространства AP_ω.*

В заключение отметим, что теорема и ее следствия без особых затруднений обобщаются на уравнения в банаховых пространствах с неограниченным оператором A (если, например, A — спектральный в смысле Данфорда оператор с дискретным спектром) и квазипериодической функцией B.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 247 с.
2. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Математический анализ. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ, 1974, **12**, с. 71—146.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука. 1970.— 584 с.
4. *Самойленко А. М.* О приводимости систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 2, с. 279—281.
5. *Блинов И. Н.* Аналитическое представление решения системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, зависящими от параметра Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 8, с. 1042—1053.
6. *Rüssman H.* Kleine Nenner I: Über invariante Kurven differenzierbaren Abbildungen eines Kreisringen.— Bach. Acad. Gottingen. Math.— Phys. 1970, Klasse 2, S. 67—105.
7. *O'Brien G. C.* A Reducibility Theorem for Smooth Quasiperiodic Linear Systems.—J. Different. Equations, 1976, **22**, p. 314—330.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 741 с.

Воронежский
государственный университет

Поступила в редакцию
16.01.81