УДК 517.948

С. В. Переверзев

Об одной задаче оптимизации методов приближенного решения уравнений Фредгольма

Пусть X — линейное нормированное пространство, $\mathcal{H}$ — некоторое множество линейных непрерывных операторов, действующих из X в X и таких, что уравнение

$$z = Hz + f \tag{1}$$

однозначно разрешимо для любых $H \in \mathcal{H}$, $f \in \Phi \subset X$. Класс уравнений (1) будем обозначать $[\mathcal{H}, \Phi]$. Пусть $\mathcal{H}_N$— множество всех непрерывных линейных операторов, действующих из X во всевозможные подпространства $X_N \subset \subset X$ размерности не выше N, и A — некоторый оператор, ставящий в соответствие каждому $H \in \mathcal{H}$ оператор $AH \in \mathcal{H}_N$ такой, что уравнение

$$z_A = AHz_A + f \tag{2}$$

однозначно разрешимо. На решение уравнения (2) будем смотреть как на приближенное решение уравнения (1). Тогда оператор A будет определять метод приближенного решения уравнений из класса $[\mathcal{H}, \Phi]$. Совокупность таких методов (или операторов) A будем обозначать $\mathcal{A}_N$. Величина $\nu_X([\mathcal{H}, \Phi], A) = \sup\limits_{[\mathcal{H},\Phi]} \| z - z_A \|_X$, где точная верхняя грань берется по всевозможным уравнениям класса $[\mathcal{H}, \Phi]$, является погрешностью метода A на классе $[\mathcal{H}, \Phi]$, а величина

$$\theta_N([\mathcal{H}, \Phi], X) = \inf_{A \in \mathcal{A}_N} \nu_X([\mathcal{H}, \Phi], A) \tag{3}$$

характеризует наименьшую возможную погрешность, которую могут давать методы $A \in \mathcal{A}_N$ на классе $[\mathcal{H}, \Phi]$. Отметим, что постановка задачи об изучении величины (3) применительно к методам приближенного решения операторных уравнений нам в публикациях не встречалась.

Следуя Н. С. Бахвалову [1, с. 60], метод $A^* \in \mathcal{A}_N$ такой, что $\nu_X([\mathcal{H}, \Phi], A^*) \asymp \theta_N([\mathcal{H}, \Phi], X)$ будем называть оптимальным по порядку методом на классе $[\mathcal{H}, \Phi]$ в пространстве X (символ $\asymp$ означает слабую эквивалентность).

Некоторые авторы (см., например, [2]) рассматривают следующую, отличную от (3), задачу. Пусть F_N — фиксированное N-мерное подпространство X, а $\mathcal{P}_N$ — некоторый оператор, ставящий в соответствие каждому уравнению (1) из $[\mathcal{H}, \Phi]$ однозначно разрешимое уравнение вида $z_N = \mathcal{P}_N H z_N + f$, где $\mathcal{P}_N H$ — некоторый непрерывный линейный оператор, действующий из X в F_N. Обозначим через $\mathcal{A}_{F_N}$ множество всевозможных операторов $\mathcal{P}_N$. Выбор F_N и $\mathcal{P}_N \in \mathcal{A}_{F_N}$ определяет некоторый метод $[F_N, \mathcal{P}_N]$ приближенного решения уравнений из $[\mathcal{H}, \Phi]$. Задача состоит в изучении величины

$$V_N([\mathcal{H}, \Phi], X) = \inf_{F_N \subset X} \inf_{\mathcal{P}_N \in \mathcal{A}_{F_N}} \sup_{[\mathcal{H},\Phi]} \| z - z_N \|_X. \tag{4}$$

Установим соотношение между величинами (3) и (4). Для этого заметим, что $\bigcup \mathcal{A}_{F_N} \subset \mathcal{A}_N$ и

$$V_N([\mathcal{H}, \Phi], X) = \inf_{F_N \subset X} \inf_{\mathcal{P}_N \in \mathcal{A}_{F_N}} \nu_X[(\mathcal{H}, \Phi], \mathcal{P}_N) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\mathcal{P}_N \in \bigcup \mathcal{A}_{F_N}} \nu_X([\mathcal{H}, \Phi], \mathcal{P}_N) \geqslant \theta_N([\mathcal{H}, \Phi], X).$$

В настоящем сообщении для определенных классов уравнений укажем оптимальные по порядку методы и найдем точный порядок величины (3). Для простоты изложения ограничимся рассмотрением периодического случая.

Обозначим через C, L_∞, L_q $(1 \leqslant q < \infty)$ пространства соответственно непрерывных, существенно ограниченных и суммируемых в q-й степени на $[0, 2\pi]$ 2π-периодических функций $f(x)$ с нормами

$$\| f \|_C = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} | f(x) |, \quad \| f \|_\infty = \sup_{0 < x < 2\pi} \operatorname{vrai} | f(x) |, \quad \| f \|_q = \left(\int_0^{2\pi} | f(x) |^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Через $\mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$ будем обозначать класс операторов Фредгольма вида $Hz(x) = \int_0^{2\pi} h(x, y) z(y)\, dy$, где ядро $h(x, y)$ — 2π-периодическая функция своих аргументов и такая, что для любой функции $z \in L_\infty$

$$\left\| d^k/dx^k \int_0^{2\pi} \partial^l/\partial y^l [h(x, y)] z(y)\, dy \right\|_\infty \leqslant \alpha_{kl} \| z \|_\infty$$

($k = 0, 1, \ldots r$; $l = 0, 1, \ldots, s$; $\alpha = \{\alpha_{kl}\}$). Кроме того, для каждого $H \in \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$ $\|(I - H)^{-1}\|_C^C \leqslant \beta$. Мы будем рассматривать класс уравнений $\Psi^{r,s} = \Psi^{r,s}(\alpha, \beta, \gamma) = [\mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta), C_\gamma]$, где C_γ — шар радиуса γ в пространстве C.

Будем рассматривать операторы $\sigma^x_{n,r}$ и $\sigma^y_{n,s}$, определенные соотношениями $\sigma^x_{n,r} h(x, y) = \sum_{i=1}^{2n} h(t_{i,r}, y) L_{ir}(x)$, $\sigma^y_{n,s} h(x, y) = \sum_{j=1}^{2n} h(x, t_{js}) L_{js}(y)$, где $t_{kl} = (k-1)\pi/n + [1 + (-1)^{l-1}]\pi/4n$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, а $L_{kl}(\tau)$ — 2π-периодический сплайн степени $l - 1$ дефекта 1 с узлами $x_m = \pi m/n$, $m = 1, 2, \ldots, 2n$, такой, что $L_{kl}(t_{ml}) = \delta_{km}$ (δ_{km} — символ Кронекера).

Обозначим через σ_n оператор из $\mathcal{A}_{4n}$, ставящий в соответствие каждому оператору $H \in \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$ конечномерный оператор $\sigma_n H z(x) = \int_0^{2\pi} \sigma_n(h; x, y) z(y)\, dy$, где $\sigma_n(h; x, y) = \sigma^x_{n,r} h(x, y) + \sigma^y_{n,s} h(x, y) - \sigma^x_{n,r}\sigma^y_{n,s} h(x, y)$. Отметим, что оператор $\sigma_n H$ действует в подпространство, базисом которого является максимальная линейно независимая система из множества функций $\{L_{ir}(x), h(x, t_{i,s})\}_{i=1}^{2n}$.

Лемма. *Для $H \in \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$, $r, s \geqslant 1$, $\| H - \sigma_n H \|_C^C \leqslant \alpha_{rs} \mathcal{K}_r \mathcal{K}_s / n^{r+s}$, где $\mathcal{K}_r$ и $\mathcal{K}_s$ — константы Фавара.*

Доказательство. Положим для $f \in C$

$$\psi(x) = \int_0^{2\pi} [h(x, y) - \sigma^y_{n,s} h(x, y)] f(y)\, dy.$$

Из [3] следует, что

$$h(x, y) - \sigma^y_{n,s} h(x, y) = -\pi^{-1} \int_0^{2\pi} F_{s-1}(y, t)\, \partial^s/\partial t^s h(x, t + t_{1,s})\, dt,$$

где $F_{s-1}(y, t)$ определена в [3] и

$$\int_0^{2\pi} | F_{s-1}(y, t) |\, dy = \pi | \varphi_{n,s}(t) |,$$

а $\varphi_{n,s}(t)$ — s-й интеграл от $\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sign} \sin nt$ с периодом $2\pi/n$ и средним значением на периоде, равным нулю. Известно, что $\| \varphi_{ns} \|_C = \mathcal{K}_s / n^s$. Используя известную оценку приближения дифференцируемой периодической функции интерполяционным сплайном дефекта 1 по равномерному разбиению [4, с. 290], получаем

$$\| (H - \sigma_n H) f \|_C = \| \psi - \sigma^x_{n,r} \psi \|_C \leqslant \mathcal{K}_r \| \psi^{(r)} \|_\infty / n^r. \tag{5}$$

Оценим $\| \psi^{(r)} \|_\infty$. Для этого заметим, что

$$\psi(x) = -\pi^{-1} \int_0^{2\pi} \partial^s/\partial t^s h(x, t) \int_0^{2\pi} F_{s-1}(y, t - t_{1,s}) f(y)\, dy dt$$

и

$$\| \psi^{(r)} \|_\infty = \pi^{-1} \left\| d^r/dx^r \int_0^{2\pi} \partial^s/\partial t^s h(x, t) \left(\int_0^{2\pi} F_{s-1}(y, t - t_{1,s}) f(y)\, dy \right) dt \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_{rs}\pi^{-1} \left\| \int_0^{2\pi} F_{s-1}(y, t - t_{1,s}) f(y)\, dy \right\|_\infty \leqslant \alpha_{rs} \| f \|_C \| \varphi_{n,s} \|_C = \alpha_{rs} \mathcal{K}_s \| f \|_C / n^s. \tag{6}$$

Утверждение леммы следует теперь из (5) и (6).

Замечание 1. Известно [5, с. 517], что оператор $I - \sigma_n H$ будет иметь ограниченный обратный, если

$$\| H - \sigma_n H \|_C^C \leqslant \alpha_{rs} \mathcal{K}_r \mathcal{K}_s / n^{r+s} < 1/\beta \leqslant 1 / \| (I - H)^{-1} \|_C^C,$$

т. е. для любого уравнения (I) класса $\Psi^{r,s}$ уравнение $z_{\sigma_n} = \sigma_n H z_{\sigma_n} + f$ однозначно разрешимо при $n > (\alpha_{rs} \mathcal{K}_r \mathcal{K}_s \beta)^{1/r+s}$. Кроме того,

$$\| (I - \sigma_n H)^{-1} \|_C^C \leqslant \beta / (1 - \alpha_{rs} \beta \mathcal{K}_r \mathcal{K}_s / n^{r+s}). \tag{7}$$

Теорема. $\theta_N(\Psi^{r,s}, L_q) \asymp N^{-r-s}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $r, s \geqslant 1$. *Оптимальным по порядку методом на классе $\Psi^{r,s}$ в пространстве L_q является метод, определяемый оператором σ_n, $n = [N/4]$ ($[\nu]$ — целая часть числа ν).*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $z - z_{\sigma_n} = \sigma_n H (z - z_{\sigma_n}) + (H - \sigma_n H) z$. Но тогда из леммы и (7) при $n > (\alpha_{rs} \beta \mathcal{K}_r \mathcal{K}_s)^{1/r+s}$

$$\| z - z_{\sigma_n} \|_C \leqslant \| (I - \sigma_n H)^{-1} \|_C^C \, \| (H - \sigma_n H) z \|_C \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_{rs} \beta^2 \gamma \mathcal{K}_r \mathcal{K}_s / n^{r+s} (1 - \alpha_{rs} \beta \mathcal{K}_r \mathcal{K}_s / n^{r+s}). \tag{8}$$

Требуемая оценка сверху для величины $\theta_N(\Psi^{r,s}, L_q)$ получена.

Для получения оценки снизу для величины $\theta_N(\Psi^{r,s}, L_q)$ рассмотрим оператор D_μ, определяемый равенством

$$D_\mu f(x) = \mu \int_0^{2\pi} D_{r+s}(x - y) f(y)\, dy,$$

где $D_m(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(ku - \pi m/2) / k^m$ — функция Бернулли, а постоянная $\mu > 0$ выбирается так, чтобы $D_\mu \in \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$. Обозначим через Φ_δ множество функций f, представимых в виде $f(x) = \varphi(x) - D_\mu \varphi(x)$, где $\varphi \in C_{\delta,0} = \left\{ \varphi / \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0, \| \varphi \|_C \leqslant \delta \right\}$, а постоянная δ выбирается так, чтобы $\Phi_\delta \subset C_\gamma$. Множество уравнений

$$z = D_\mu z + f, \tag{9}$$

где f пробегает Φ_δ, принадлежит классу $\Psi^{r,s}(\alpha, \beta, \gamma)$, и множество их решений целиком заполняет $C_{\delta,0}$. Таким образом, решение каждого уравнения (9) представимо в виде

$$z(x) = g(x) + f(x), \tag{10}$$

где $g(x)$ принадлежит классу $W_C^{r+s}(\mu, \delta)$ периодических функций, в среднем равных нулю на $(0, 2\pi)$, имеющих $(r+s)$-ю непрерывную производную и $\| g^{(r+s)} \|_C \leqslant \pi\mu\delta$. Причем, когда функция f пробегает множество Φ_δ, функция g пробегает класс $W_C^{r+s}(\mu, \delta)$.

С другой стороны, для любого метода $A \in \mathcal{L}_N$ решение уравнения $z_A = A D_\mu z_A + f$ имеет вид

$$z_A(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \xi_i(x) + f(x), \tag{11}$$

где $\{\xi_i(x)\}_{i=1}^N$ — базис пространства, в которое действует конечномерный оператор AD_μ. Из (10) и (11) получаем

$$\theta_N(\Psi^{r,s}, L_q) \geqslant d_N(W_C^{r+s}(\mu, \delta), L_q) \asymp N^{-r-s}, \tag{12}$$

где $d_N(\mathfrak{M}, L_q)$ — N-й поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_q. Для завершения доказательства остается сравнить (8) и (12).

Замечание 2. В наших обозначениях в [2, с.162] установлено, что

$$V_N(\Psi^{r,s}, L_q) \asymp N^{-r}. \tag{13}$$

Интересно сравнить (13) с утверждением теоремы.

Замечание 3. Если при определении класса $\Psi^{r,s}$ отказаться от условий периодичности, то утверждение теоремы, касающееся величины θ_N остается в силе. При построении оптимальных по порядку методов нужно вместо периодических интерполяционных сплайнов дефекта I использовать интерполяционные сплайны из [6].

Замечание 4. В [2] и [7] строятся оптимальные по порядку в смысле задачи (4) методы, состоящие в замене интегрального оператора конечномерным (так называемые конечномерные методы). Но в то время как методы из [2] и [7] не чувствительны к гладкости ядра $h(x, y)$ по второй переменной, методы, построенные в настоящей работе, реагируют на эту гладкость, причем оптимальным образом. Отметим, что влияние гладкости ядра по второй переменной на скорость сходимости проекционно-итеративного процесса установлено в [8], но рассмотренные там методы не являются конечномерными в указанном здесь смысле.

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. —М. : Наука, 1973.— 632 с.
2. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. —Казань: Изд-во Казанского ун-та 1980.— 232 с.
3. *Korneičuk N. P.* Exact error bound of approximation by interpolating splines in L-metric on the classes $W_p^r(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ of periodic functions.— Anal. Math., 1977, 3, p. 109—117.
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. —М.:Наука, 1976.—320 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. —М. : Наука, 1977.— 744 с.
6. *Golitschec M.* On n-widths and Interpolation by Polinomial Splines.— J. of Approximation Theory, 1979, **26**, N 2, p. 132—141.
7. *Переверзев С. В.* Об оптимальных по порядку методах приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 2, с. 181—188.
8. *Лучка А. Ю.* Быстрота сходимости проекционно-итеративного метода для интегральных уравнений.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 2, с. 190—198.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
25.10.81