УДК 519.21

О. И. Клесов

О скорости сходимости рядов случайных величин

Пусть $\{\xi_k, k \geqslant 1\}$ — независимые случайные величины. Предположим, что почти наверное (п. н.) сходится ряд $\sum_{k\geqslant 1} \xi_k = S$. Положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $\zeta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k$. В заметке исследуется скорость сходимости сумм S_n к S, т. е. скорость сходимости к 0 последовательности ζ_n.

Доказанные ниже предложения по формулировке напоминают теоремы А. Н. Колмогорова об усиленном законе больших чисел [1], с. 332, и законе повторного логарифма [1] с. 358.

Предложение 1. *Пусть выполнено одно из условий:* $0 < t < 1$, *либо*
$1 \leqslant t \leqslant 2$, $M\xi_k = 0$. *Предположим, что последовательность* $\{b_k, k \geqslant 1\}$ *неслучайных констант монотонно возрастает к* ∞ *и* $M|\xi_k|^t < \infty$. *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^t M|\xi_k|^t < \infty$, *то* $\lim_{k\to\infty} b_k\zeta_k = 0$ *п. н.*

Доказательство основывается на следующем аналоге неравенства А. Н. Колмогорова.

Лемма 1. *В условиях предложения 1 имеет место неравенство*

$$P(\sup_{k\geqslant n} b_k |\zeta_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant K_t \varepsilon^{-t} \sum_{k=n}^{\infty} b_k^t M|\xi_k|^t, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$, $K_t = 2^{t+1}(2^{t+1} - 1)/(2^t - 1)$.

Доказательство леммы 1. Не теряя общности, можно считать, что $b_1 = 1$. Пусть $A_i = \{j : 2^i \leqslant b_j < 2^{i+1}\}$, $i \geqslant 0$. Наименьшее число из множества A_i обозначим i_*, а наибольшее — i^*. Для каждого $n \geqslant 1$ найдется $i(n)$, для которого $n \in A_{i(n)}$. Таким образом, для всех $n \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$

$$P(\sup_{k\geqslant n} b_k|\zeta_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(\max_{n\leqslant k\leqslant i^*(n)} b_k|\zeta_k| \geqslant \varepsilon) + \sum_{j>i(n)} P(\max_{k\in A_j} b_k|\zeta_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant P(\max_{n\leqslant k\leqslant i^*(n)} |\zeta_k| \geqslant 2^{-(i(n)+1)}\varepsilon) + \sum_{j>i(n)} P(\max_{k\in A_j} |\zeta_k| \geqslant 2^{-(j+1)}\varepsilon).$$

Используя полученное неравенство и соотношение [2]

$$P(\sup_{k\geqslant m} |\zeta_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant C_t\varepsilon^{-t} \sum_{k\geqslant m} M|\xi_k|^t, \quad 0 < C_t \leqslant 2, \quad \varepsilon > 0, \quad m \geqslant 1,$$

получаем, что для всех $n \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$

$$P(\sup_{k\geqslant n} b_k|\zeta_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant C_t\varepsilon^{-t} 2^{(i(n)+1)t} \sum_{k\geqslant n} M|\xi_k|^t + C_t\varepsilon^{-t} \sum_{j>i(n)} 2^{(j+1)t} \times$$
$$\times \sum_{l=j}^{\infty} \left(\sum_{k\in A_l} M|\xi_k|^t \right) \leqslant 2^t C_t \varepsilon^{-t} \left[\sum_{k\geqslant n} b_k^t M|\xi_k|^t + L_t \sum_{l>i(n)} 2^{tl} \left(\sum_{k\in A_l} M|\xi_k|^t \right) \right],$$

где $L_t = 2^{2t}/(2^t - 1)$. Из определения множества A_l вытекает неравенство (1).

Вследствие неравенства (1) имеет место соотношение $\lim_{n\to\infty} P(\sup_{k\geqslant n} b_k \times$ $\times|\zeta_k|\geqslant\varepsilon)=0,\ \varepsilon>0$, которое и влечет предложение 1.

Замечание. Из теоремы А. Н. Колмогорова о трех рядах вытекает, что для сходимости ряда $\Sigma\eta_n/n^t$, $t>1/2$, где η_n — независимые одинаково распределенные случайные величины, необходимо и достаточно, чтобы в случае $1/2<t\leqslant 1$ $M\eta_n=0$, $M|\eta_n|^{t-1}<\infty$, а в случае $t>1$, чтобы $M|\eta_n|^{1/t}<\infty$. Используя предложение 1 и технику доказательства усиленного закона больших чисел для одинаково распределенных случайных величин, легко показать, что, требуя от случайных величин несколько больше, чем это нужно просто для сходимости ряда $\Sigma\eta_n/n^t$, можно установить скорость сходимости этого ряда. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение: *равенство* $\lim_{n\to\infty} n^s\sum_{k\geqslant n} k^{-t}\eta_k=0$ *п. н. имеет место тогда и только тогда, когда в случае* $s>0$, $t>1/2$, $1/2<t-s\leqslant 1$ $M\eta_n=0$, $M|\eta_n|^{1/(t-s)}<\infty$, *а в случае* $s>0$, $t>1/2$, $1<t-s$ $M|\eta_n|^{1/(t-s)}<\infty$.

Предложение 1 позволяет получать информацию о скорости сходимости случайных рядов в терминах, использующих лишь моментные характеристики слагаемых. Введем класс функций Ψ, которому принадлежат только положительные, монотонно возрастающие функции $\psi(x)$, для которых, $x\psi(1/x)\downarrow 0$, $x\downarrow 0$ и $\sum_{n\geqslant 1} 1/(n\psi(n))<\infty$.

Следствие 1. *Пусть выполнено одно из условий:* $0<t<1$, *либо* $1\leqslant t\leqslant 2$, $M\xi_n=0$. *Предположим, что* $\sum_{n\geqslant 1} M|\xi_n|^t<\infty$ и *положим* $A_{n,t}=$ $=\sum_{k\geqslant n} M|\xi_k|^t$. *Если* $A_{n,t}>0$, $n\geqslant 1$, *то для любой функции* $\psi\in\Psi$ *имеет место соотношение* $\lim_{n\to\infty} \zeta_n/(A_{n,t}\psi(1/A_{n,t}))^{1/t}=0$ *п. н.*

Доказательство следствия базируется на предложении 1 и следующей лемме.

Лемма 2. *Если* $c_n\geqslant 0$, $\sum_{n\geqslant 1} c_n<\infty$, $C_n=\sum_{k\geqslant n} c_k>0$, *то для любой функции* $\psi\in\Psi$ *сходится ряд* $\sum_{n\geqslant n_0} c_n/(C_n\psi(1/C_n))$, *где* n_0 *выбрано таким, чтобы* $\psi(1/C_n)>0$ *для всех* $n\geqslant n_0$.

Доказательство леммы 2. Не теряя общности, будем считать, что $C_1=1$, $\psi(1)>0$. Понятно, что

$$\sum_{n\geqslant 1} c_n/(C_n\psi(1/C_n))=\sum_{n\geqslant 0}\ \sum_{k:2^{-(n+1)}\leqslant C_k<2^{-n}} c_k/(C_k\psi(1/C_k))\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n\geqslant 0} 2^{n+1}2^{-n}/\psi(2^n)=2\sum_{n\geqslant 0}(\psi(2^n))^{-1}.$$

А так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\psi(2^n))^{-1}\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} 1/(k\psi(k))=\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\psi(n)),$$

то лемма 2 доказана.

В силу леммы 2 сходится ряд $\sum_{n\geqslant 1} M|\xi_n|^t/A_{n,t}\psi(1/A_{n,t})$. Поэтому для $b_n=(A_{n,t}\psi(1/A_{n,t}))^{-1/t}$ выполнены условия предложения 1 и следствие 1 доказано.

Замечание 2. Следствие 1 — аналог одной теоремы из [1], с. 339, доказанной для обычных сумм независимых случайных величин. Если в следствии 1 положить $A_{n,2}=B_n$, то, в частности, в случае $\Sigma M\xi_n^2<\infty$, $M\xi_n=0$, $B_n>0$ для всех $0<\delta<1$ будет выполнено соотношение $\lim_{n\to\infty}\zeta_n/$ $(B_n\ln(1/B_n)(\ln\ln(1/B_n))^{1+\delta})=0$ п. н. Оказывается, что ценой введения дополнительных предположений, этот результат можно значительно усилить.

Предложение 2. *Пусть* $M\xi_n=0$, $M\xi_n^2=\sigma_n^2<\infty$. *Предположим, что сходится ряд* $\sum\sigma_n^2$ *и* $B_n=\sum_{k\geqslant n}\sigma_k^2>0$, $n\geqslant 1$. *Если существует последовательность* $\{M_n, n\geqslant 1\}$, *монотонно стремящихся к 0 действительных чисел, такая, что* $|\xi_n|\leqslant M_n$ *п. н.,* $M_n=o\left((B_n/\ln\ln B_n^{-1})^{1/2}\right)$, $n\to\infty$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty}\zeta_n/(2B_n\ln\ln B_n^{-1})^{1/2}=1 \ \text{ п. н.} \tag{2}$$

Предложение 2 получено в [3]. В этой работе, правда, отсутствует требование положительности $B_n>0$, без чего утверждение предложения теряет смысл. Сделанные предположения позволяют, однако, доказать более глубокий результат.

Предложение 3. *Если выполнены условия предложения 2, то множество предельных точек последовательности* $\{\zeta_n/(2B_n\ln\ln B_n^{-1})^{1/2}\}$ *почти наверное совпадает с отрезком* $[-1, 1]$.

Доказательство. Положим $\chi_n=(2B_n\ln\ln B_n^{-1})^{1/2}$. Так как $\{-\xi_n, n\geqslant 1\}$ удовлетворяет условиям предложения 2, то из (2) получаем, что $\liminf_{n\to\infty}\zeta_n/\chi_n=-1$ п. н.

Из этого равенства и (2) вытекает, что точки 1 и -1 п. н. предельны для последовательности $\{\zeta_n/\chi_n\}$, а точки $x>1$ и $y<-1$ — нет. Предположим, что уже доказано, что точки отрезка $(0, 1)$ п. н. предельны для $\{\zeta_n/\chi_n\}$. Так как 0 лежит на границе множества $(0, 1)$, то 0 — п. н. предельная точка для $\{\zeta_n/\chi_n\}$. Последовательность $\{-\xi_n\}$ удовлетворяет всем условиям предложения 2, поэтому в силу нашего предположения точки отрезка $(-1, 0)$ п. н. предельны для $\{-\zeta_n/\chi_n\}$, т. е. точки отрезка $(-1, 0)$ п. н. предельны для $\{\zeta_n/\chi_n\}$. Итак, для доказательства предложения 3 достаточно доказать, что точки отрезка $(0, 1)$ п. н. предельны для $\{\zeta_n/\chi_n\}$. Пусть $0<x<1$ и $x=\delta^{-1/2}$. Отметим, что $\delta>1$. Пусть, далее, $0<\tau<1$ и последовательность $\{n_k\}$ определена следующим образом: $n_k=m_{[k^\delta]}$, $m_l=\max(m: B_m\geqslant\tau^l)$, где $[k^\delta]$ — целая часть k^δ. Ясно, что $B_{m_{l+1}}\neq B_{m_l}$ при больших l (ведь $B_{n+1}/B_n=1+o(1/\ln\ln B_n^{-1})$)(и $B_{n_k})/\tau^{[k^\delta]}\to 1$, $k\to\infty$. Покажем, что

$$\limsup_{k\to\infty}\zeta_{n_k}/\chi_{n_k}=x \ \text{ п. н.} \tag{3}$$

Это и будет обозначать, в частности, что x — предельная точка для $\{\zeta_n/\chi_n\}$. Чтобы убедиться в равенстве (3), достаточно доказать, что

$$\limsup_{k\to\infty}\zeta_{n_k}/\chi_{n_k}\leqslant x \ \text{ п. н.} \tag{4}$$

и

$$\limsup_{k\to\infty}\zeta_{n_k}/\chi_{n_k}\geqslant x \ \text{ п. н.} \tag{5}$$

Сначала докажем (4). В силу леммы Бореля—Кантелли для (4) достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ сходился ряд

$$\Sigma P(\zeta_{n_k}\geqslant(1+\varepsilon)x\chi_{n_k})<\infty. \tag{6}$$

Для доказательства (6) нам понадобится следующий аналог экспоненциального неравенства А. Н. Колмогорова.

Лемма 3. *Если выполнены условия предложения 2, то для всех* $y>0$, $\mu>0$ *найдется номер* $n_0=n_0(y, \mu)$ *такой, что при* $n\geqslant n_0$

$$P(\zeta_n\geqslant y\chi_n)\leqslant(\ln B_n^{-1})^{-y^2(1-\mu)}, \tag{7}$$

$$P(|\zeta_n|\geqslant y\chi_n)\leqslant 2(\ln B_n^{-1})^{-y^2(1-\mu)}. \tag{8}$$

Действительно, для $0<tM_n\leqslant 1$ $M\exp\{t\xi_n\}\leqslant\exp\{t^2\sigma_n^2(1+tM_n/2)/2\}$ (см., например, [1], с. 359). Поэтому для всех $n\geqslant 1$, $m\geqslant n$, $0<tM_n\leqslant 1$ $M\exp\left\{t\sum_{k=n}^m\xi_k\right\}\leqslant\exp\left\{t^2\sum_{k=n}^m\sigma_k^2(1+tM_n/2)/2\right\}$, или, переходя к пределу при

$m \to \infty$, $M \exp\{t\zeta_n\} \leqslant \exp\{t^2 B_n (1 + tM_n/2)/2\}$ для $0 < tM_n \leqslant 1$. Полагая $t = y\chi_n$ и применяя неравенство Чебышева, приходим к неравенству (7). Так как случайные величины $-\xi_n$ удовлетворяют условиям леммы 3, то оценка (7) справедлива и для $-\zeta_n$. Отсюда вытекает (8).

Возвращаясь к ряду (6), видим, что его сходимость вытекает из сходимости ряда $\Sigma (\ln B_{n_k}^{-1})^{-(1+\varepsilon)^2 x^2 (1-\mu)}$, общий член которого мажорируется величиной $\mathrm{const}\, k^{-(1+\varepsilon)^2(1-\mu)}$, а ряд с таким общим членом при $(1+\varepsilon)^2(1-\mu) > 1$ сходится. Следовательно, ряд (6) сходится и неравенство (4) имеет место.

Перейдем к доказательству (5). Положим $\varkappa_k = \zeta_{n_k} - \zeta_{n_{k+1}}$, $C_k = M\varkappa_k^2$ (> 0, k — большое), $\varphi_k = (2C_k \ln\ln C_k^{-1})^{1/2}$. Понятно, что для (5) достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$\limsup_{k\to\infty} \varkappa_k/\chi_{n_k} \geqslant x \text{ п. н.} \tag{9}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} |\zeta_{n_{k+1}}/\chi_{n_k}| = 0 \text{ п. н.} \tag{10}$$

Докажем (10). В силу леммы Бореля—Кантелли для выполнения (10) достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\Sigma P(|\zeta_{n_{k+1}}| \geqslant \varepsilon\chi_{n_k}) < \infty. \tag{11}$$

Вследствие (8) общий член ряда (11), начиная с некоторого номера, мажорируется величиной $\mathrm{const}\,(\ln B_{n_{k+1}}^{-1})^{-\varepsilon^2\chi_{n_k}^2/\chi_{n_{k+1}}^2}$, а ряд с таким общим членом сходится, так как $(\chi_{n_k}/\chi_{n_{k+1}})\, k^{-1} \to \infty$. Таким образом, выполнено (11), а значит, и (10).

Для доказательства (9) необходим аналог другой экспоненциальной оценки А. Н. Колмогорова.

Лемма 4. *Если выполнены условия предложения* 2, *то для любых* $y > 0$, $\mu > 0$ *найдется номер* $n_0 = n_0(y, \mu)$ *такой, что при* $n \geqslant n_0$ $P(\zeta_n \geqslant y\chi_n) \geqslant (\ln B_n^{-1})^{-y^2(1+\mu)}$.

Покажем, что справедлив даже более общий результат, чем лемма 4, а именно: если последовательность $\{y_n,\ n \geqslant 1\}$ такова, что $y_n \to 0$, $y_n M_n/B_n \to 0$, $y_n^2/B_n \to 0$, $n \to \infty$, то для всех $\mu > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\mu)$ такой, что для всех $n \geqslant n_0$

$$P(\zeta_n \geqslant y_n) \geqslant \exp\{-y_n^2(1+\mu)/2B_n\}. \tag{12}$$

В самом деле, как и при доказательстве леммы 2 из [1], с. 359, для $0 < tM_n \leqslant 1$ имеем $M\exp\{t\xi_n\} \geqslant \exp\{\sigma_n^2 t^2 (1 - tM_n)/2\}$, и, таким образом,

$$M\exp\{t\zeta_n\} \geqslant \exp\{B_n t^2 (1 - tM_n)/2\}. \tag{13}$$

Дословно повторяя доказательство уже цитировавшейся леммы 2 из [1], в котором X_n следует заменить на ξ_n, S_n — на ζ_n, MS_n — на $M\zeta_n^2$, из леммы 3 и последнего неравенства выводим соотношение (12).

Замечание 3. Для леммы 4 характерно, что номер n_0, фигурирующий в этой лемме, не зависит ни от распределений ξ_n, ни от того факта, что ζ_n «хвост» ряда. При наличии неравенства (13) выбор номера n_0 зависит лишь от скорости приближения к 0 последовательностей $\{y_n\}$, $\{y_n M_n/B_n\}$, $\{y_n^2/B_n\}$. Поэтому номер $n_0(\mu)$ можно выбрать одним и тем же для всех случайных величин ζ_n (уже не обязательно «хвостов» ряда), обладающих свойством: найдется некоторая последовательность $\{M_n\}$ (одна и та же для всех ζ_n), для которой выполнены неравенство (13) и лемма 1 из [1], с. 358. Доказанная выше лемма 3 фактически и есть лемма 1 из [1], причем, как легко видеть, лемма 3 применима к случайным величинам $\varkappa_k$. Из сказанного делаем вывод: лемма 4 применима к $\varkappa_k$, т. е. $P(\varkappa_k \geqslant (1-\varepsilon)x\varphi_k) \geqslant (\ln C_k^{-1})^{-(1-\varepsilon)^2 x^2 (1+\mu)}$ для любых $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ при $n \geqslant n_0(\varepsilon, \mu)$.

Учитывая неравенство, приведенное в замечании, видим, что общий член ряда $\Sigma P(\varkappa_k \geqslant (1-\varepsilon)\, x\varphi_k)$, начиная с некоторого номера, мажорирует общий член ряда $\Sigma n^{-(1-\varepsilon)^2(1+\mu)}$ (мы воспользовались тем, что $B_{n_k}/C_k \to 1$). Последний ряд расходится при $(1-\varepsilon)^2(1+\mu) < 1$, что в силу независимости и леммы Бореля — Кантелли влечет $P(\varkappa_k \geqslant (1-\varepsilon)\, x\varphi_k$ б. ч.$) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Принимая во внимание произвольность ε и соотношение $\varphi_k/\chi_{n_k} \to 1$, доказываем (9). Предложение 3 полностью доказано.

Предложение 4. *Пусть* $\{\xi_n,\ n \geqslant 1\}$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины,* $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$, $a\{a_n, n \geqslant 1\}$ — *последовательность действительных чисел, обладающих свойствами:* 1) $\sum_{n\geqslant 1} a_n^2 < \infty$; 2) $\sum_{k\geqslant n} a_k^2 > 0$ *для всех* $n \geqslant 1$; 3) $a_n^2 \leqslant \mathrm{const}\, n^{-1} \sum_{k\geqslant n} a_k^2$, $n \geqslant 1$. *Тогда множество всех предельных точек последовательности* $\left\{\sum_{k\geqslant n} a_k\xi_k/(2A_n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2}\right\}$, *где* $A_n = \sum_{k\geqslant n} a_k^2$, *будет совпадать с отрезком* $[-1, 1]$.

Доказательство. Определим по ξ_n случайные величины ξ_n' и ξ_n'' так же, как в [3] случайные величины X_n' и X_n'' определяются по X_n. Тогда, как и в [3] $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''$, при этом

$$|a_n(\xi_n' - M\xi_n')| \leqslant M_n, \quad M_n = o\left((1/A_n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2}\right), \quad n \to \infty.$$

Кроме того для некоторого номера m' (вычисленного в [3])

$$\sum_{n=m'}^{\infty} M|\xi_n''|/(n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2} < \infty. \tag{14}$$

Видим, что последовательность $\{\xi_n'\}$ удовлетворяет условиям предложения 3, и поэтому множество предельных точек для последовательности $\left\{\sum_{k\geqslant n} a_k(\xi_k' - M\xi_k')/(2A_n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2}\right\}$ совпадает с отрезком $[-1, 1]$ (мы воспользовались свойством $M\xi_n^2 = 1$). Учитывая свойство 3), неравенство (14) и равенство нулю математического ожидания у ξ_n, доказываем, что

$$\sum_{n=m'}^{\infty} |a_n|\,|M\xi_n'|/(A_n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2} \leqslant \mathrm{const} \sum_{n=m'}^{\infty} |M\xi_n''|/(n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2} < \infty. \tag{15}$$

Отсюда сразу же получаем, что множество предельных точек последовательности $\left\{\sum_{k\geqslant n} a_k\xi_k'/(2A_n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2}\right\}$ совпадает с отрезком $[-1, 1]$. Из (14) и свойства 3) вытекает также неравенство

$$\sum_{n\geqslant m'} |a_n|\,|M\xi_n''|/(A_n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2} \leqslant \mathrm{const} \sum_{n\geqslant m'} M|\xi_n''|/(A_n \ln\ln A_n^{-1})^{1/2} < \infty.$$

Поэтому из предложения 1 при $t = 1$ можно вывести

$$(A_n \ln\ln A_n^{-1})^{-1/2} \sum_{k=n}^{\infty} a_k(\xi_k'' - M\xi_k'') \to 0 \text{ п. н.}$$

Из этого соотношения, (15) и $M\xi_n = 0$ заключаем, что предложение 4 имеет место.

Замечание 4. В работе [3] предложение 4 доказано для точек 1 и —1.

Пример. Условиям предложения 4 удовлетворяет последовательность $a_n = n^{-t}$, $t > 1/2$. В этом случае легко найти асимптотику A_n и получить следующий результат: если $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$, то множество предельных точек последовательности $\left\{(n^{2t-1}/\ln\ln n)^{1/2} \sum_{k \geqslant n} k^{-t}\xi_k, n \geqslant 3\right\}$ совпадает с отрезком $[-(2(2t-1))^{1/2}, (2(2t-1))^{1/2}]$. В частности, $\limsup_{n\to\infty} \times$ $\times (n^{2t-1}/\ln\ln n)^{1/2} \sum_{k \geqslant n} k^{-t}\xi_k = (2(2t-1))^{1/2}$ п. н.

1. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 414 с.
2. Von *Bahr B.*, *Esseen C.—G.* Inequalities for the r-th absolute moment of a sum of random variables, $1 \leqslant r \leqslant 2$.— Ann. Math. Statist., 1965, 36, N 1, p. 299—303.
3. *Chow Y. S.*, *Teicher H.* Iterated logarithm laws for weighted averages.—Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1973, 26, № 2, p. 87—94.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
08.07.81