АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР • ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 35, № 3
1983

Научный журнал
основан в 1949 г.
Выходит один раз в два месяца

Киев Наукова думка

УДК 517.52

В. В. Андриевский

Сходимость полиномов Бибербаха в областях с квазиконформной границей

1. Пусть конечная область G ограничена жордановой кривой L, а функция $w = \varphi(z)$ конформно отображает эту область на круг $|w| < r_0$ с нормировкой $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) = 1$, где $z_0 \in G$ — произвольная фиксированная точка, а $r_0 = r_0(z_0, G)$.

Полином $\pi_n(z)$, $\deg \pi_n \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$, минимизирующий в классе полиномов $P_n(z)$, $\deg P_n \leqslant n$, удовлетворяющих условию $P_n(z_0) = 0$, $P_n'(z_0) = 1$, интеграл $\iint\limits_G |P_n'(z)|^2 d\sigma_z$ (или, что то же самое, интеграл $\iint\limits_G |\varphi'(z) - P_n'(z)|^2 d\sigma_z$) называется n-м полиномом Бибербаха.

В [1—5] указаны различные достаточные условия на геометрию кривой L такие, чтобы

$$\| \varphi - \pi_n \|_{C(\overline{G})} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{z \in \overline{G}} |\varphi(z) - \pi_n(z)| \to 0$$

при $n \to \infty$. В данной работе доказана равномерная сходимость полиномов Бибербаха и получена оценка величины $\| \varphi - \pi_n \|_{C(\overline{G})}$ в областях с квазиконформной границей

Т е о р е м а. *Пусть область G ограничена квазиконформной кривой. Тогда*

$$\| \varphi - \pi_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant cn^{-\gamma}, \tag{1}$$

где константы $\gamma > 0$ и $c > 0$ не зависят от n.

Напомним одно из возможных геометрических определений квазиконформных кривых [6], с. 102—103; [7]: рассмотрим жорданову кривую и две произвольные точки z_1 и z_2 на ней. Они делят L на две дуги. Рассмотрим ту из них, которая имеет меньший диаметр $d(z_1, z_2)$. Кривая L называется квазиконформной, если для всех точек z_1 и $z_2 \in L$ выполняется неравенство $d(z_1, z_2) \asymp |z_1 - z_2|$.

Класс квазиконформных кривых достаточно широк и включает в себя, в частности, липшицевы кривые, рассмотренные в рамках обсуждаемой задачи в [5].

При доказательстве неравенства (1) мы следуем схеме, применяемой в [1—3, 5], дополняя ее рядом фактов теории квазиконформных отображений и используя хорошие аппроксимационные свойства многочленных ядер из [8, 9].

Всюду в дальнейшем под G будем понимать область с произвольной квазиконформной границей.

2. Пусть $\Omega = C\overline{G}$, функция $\Phi(\zeta)$ конформно отображает Ω на $\Omega' = \{w : |w| > 1\}$ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z}\Phi(z) > 0$. Как известно [7], с. 71—79, функции φ и Φ можно продолжить до квазиконформных отображений плоскости на плоскость. Сохраним за ними те же обозначения φ и Φ. Под символом $a \preccurlyeq b$ будем понимать неравенство $a \leqslant cb$, в котором константа $c > 0$ не зависит от a и b.

Лемма 1 [10]. *Пусть функция $w = F(\zeta)$ осуществляет квазиконформное отображение плоскости $\mathbf{C}_\zeta$ на плоскость $\mathbf{C}_w$; $F(\infty) = \infty$; $\zeta_j \in \mathbf{C}_\zeta$; $F(\zeta_j) = w_j \in \mathbf{C}_w$, $j = 1, 2, 3$. Тогда 1) условия $|\zeta_1 - \zeta_2| \leqslant |\zeta_1 - \zeta_3|$ и $|w_1 - w_2| \preccurlyeq |w_1 - w_3|$ эквивалентны и, следовательно, эквивалентны условия $|\zeta_1 - \zeta_2| \asymp |\zeta_1 - \zeta_3|$ и $|w_1 - w_2| \asymp |w_1 - w_3|$; 2) если $|\zeta_1 - \zeta_2| \leqslant |\zeta_1 - \zeta_3|$, то*

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}\right|^\alpha \preccurlyeq \left|\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_3}\right| \preccurlyeq \left|\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}\right|^\beta$$

и, следовательно, при ζ_1 и ζ_2 лежащих в произвольном фиксированном круге U $|w_1 - w_2|^\alpha \preccurlyeq |\zeta_1 - \zeta_2| \preccurlyeq |w_1 - w_2|^\beta$, где константы $\alpha \geqslant \beta > 0$ зависят только от G.

Квазиконформное отображение F (с нормировкой $F(\infty) = \infty$) является абсолютно непрерывной функцией относительно плоской меры [6], с. 215, при этом меры всех измеримых множеств E, лежащих в произвольном фиксированном круге U, и их образов $F(E)$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{mes} F(E) \preccurlyeq (\operatorname{mes} E)^\delta, \ \delta = \delta(F, U) > 0. \tag{2}$$

Положим для $u > 0$ $L_u = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = 1 + u\}$, $\Omega_u = (\operatorname{int} L_u) \setminus \overline{G}$. Тогда простым следствием неравенства (2) будет оценка

$$\iint\limits_{\Omega_u} |\varphi_{\bar\zeta}|^2 \, d\sigma_\zeta \preccurlyeq u^\delta, \ u \leqslant 1. \tag{3}$$

Действительно, пусть $K > 1$ — коэффициент квазиконформности отображения φ, $J_\varphi = |\varphi_\zeta|^2 - |\varphi_{\bar\zeta}|^2$ — его якобиан. Так как почти всюду в плоскости $|\varphi_{\bar\zeta}/\varphi_\zeta| \leqslant k = (K-1)/(K+1) < 1$, то

$$\iint\limits_{\Omega_u} |\varphi_{\bar\zeta}|^2 \, d\sigma_\zeta = \iint\limits_{\Omega_u} J_\varphi \left(\left|\frac{\varphi_\zeta}{\varphi_{\bar\zeta}}\right|^2 - 1\right)^{-1} d\sigma_\zeta \leqslant (k^{-2} - 1)^{-1} \iint\limits_{\Omega_u} J_\varphi d\sigma_\zeta \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \operatorname{mes} \varphi(\Omega_u) = \operatorname{mes} (\varphi \circ \Phi^{-1})(\Phi(\Omega_u)) \preccurlyeq [\operatorname{mes} \Phi(\Omega_u)]^\delta \asymp u^\delta.$$

3. Зафиксируем круг U достаточно большого радиуса ($U \supset G$). Через $Q_n(z)$ обозначим полином, удовлетворяющий условию $\deg Q_n \leqslant n$.

В теории квазиконформных отображений известен следующий факт (см., например, [7], с. 76): пусть L — ограниченная квазиконформная кривая, разбивающая плоскость на области G ($\ni z_0$) и Ω ($\ni \infty$). Существует квазиконформное отражение α относительно кривой L (т. е отображение, сохраняющее неподвижными точки кривой L и переводящее G в Ω, а Ω в G), которое непрерывно частно дифференцируемо в $\Omega \cup G$ и в фиксированной окрестности кривой L, не содержащей точек z_0 и ∞, изменяет евклидовы длины не более, чем в конечное число раз. Таким образом, при $\zeta \in U \setminus \overline{G}$ имеем

$$|\partial\alpha/\partial x| \asymp |\partial\alpha/\partial y| \asymp 1, \ \zeta = x + iy. \tag{4}$$

Модуль якобиана $J_\alpha(\zeta)$, $\zeta \in U \setminus \overline{G}$ отражения $\alpha(\zeta)$ оценивается следующим образом

$$1 \geqslant |J_\alpha| = ||\alpha_\zeta|^2 - |\alpha_{\bar\zeta}|^2| \geqslant 1 - [(K-1)/(K+1)]^2 \asymp 1, \tag{5}$$

где $K = K(L) > 1$ — коэффициент квазиконформности отражения $\alpha(\zeta)$.

По каждому полиному $Q_n(z)$ определим функцию

$$\tilde{Q}_n(\zeta) = \begin{cases} Q_n(\zeta), & \zeta \in \overline{G}, \\ Q_n[\alpha(\zeta)], & \zeta \in U \setminus \overline{G}. \end{cases} \qquad (6)$$

Через $L_2^1(G)$ обозначим класс функций $f(z)$, заданных в G и имеющих в ней суммируемые с квадратом обобщенные производные первого порядка. Для $f \in L_2^1(G)$ положим

$$\| f \|_{L_2^1(G)} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ \iint_G \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma_\zeta \right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \zeta = x + iy.$$

Согласно соотношениям (4) — (6) имеем $\| \tilde{Q}_n \|_{C(U)} = \| Q_n \|_{C(\overline{G})}$; $\| \tilde{Q}_n \|_{L_2^1(U)} \asymp \asymp \| Q_n \|_{L_2^1(G)}$.

Лемма 2. *Для любого полинома $Q_n(z)$, удовлетворяющего условиям $\deg Q_n \leqslant n$, $Q_n(z_0) = 0$, выполняется неравенство*

$$\| Q_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant \sqrt{\ln n} \, \| Q_n \|_{L_2^1(G)}. \qquad (7)$$

Доказательство. Для $\tilde{Q}_n(z)$ $(\in L_2^1(U))$ при $z \in U$ имеет место следующее интегральное представление [11], с. 52 — 63:

$$\tilde{Q}_n(z) = \iint_U \frac{h(\zeta, z)}{|\zeta - z|^2} \left[\frac{\partial \tilde{Q}_n(\zeta)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial Q_n(\zeta)}{\partial y} (y - y_0) \right] d\sigma_\zeta,$$

где $\zeta = x + iy$, $z = x_0 + iy_0$, $h(\zeta, z)$ определяется с помощью функции

$$v(\zeta) = \begin{cases} \exp \dfrac{|\zeta - z_0|^2}{|\zeta - z_0|^2 - r^2}, & \text{при } |\zeta - z_0| < r; \\ 0 & \text{при } |\zeta - z_0| \geqslant r, \end{cases}$$

где $r > 0$ выбрано так, чтобы выполнялось включение $\{\zeta : |\zeta - z_0| \leqslant r\} \subset G$, по формуле

$$h(\zeta, z) = - \left\{ \iint_G v(\zeta) \, d\sigma_\zeta \right\}^{-1} \int_{|\zeta - z|}^{\infty} v\left(x \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|} + z \right) dx.$$

Таким образом, при $z \in \overline{G}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$|Q_n(z)| = |\tilde{Q}_n(z)| \leqslant \iint_{|\zeta - z| < \varepsilon n^{-2}} \left(\left| \frac{\partial \tilde{Q}_n(\zeta)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{Q}_n(\zeta)}{\partial y} \right| \right) \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} +$$

$$+ \iint_{U \setminus \{|\zeta - z| < \varepsilon n^{-2}\}} \left(\left| \frac{\partial \tilde{Q}_n(\zeta)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{Q}_n(\zeta)}{\partial y} \right| \right) \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} \leqslant$$

$$\leqslant \| \tilde{Q}_n \|_{L_2^1(U)} \left\{ \iint_{U \setminus \{|\zeta - z| < \varepsilon n^{-2}\}} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon n^2 \| Q_n \|_{C(\overline{G})}}{n^2}.$$

Следовательно, $\| Q_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant \sqrt{\ln n} \, \| Q_n \|_{L_2^1(G)} + \varepsilon \| Q_n \|_{C(\overline{G})}$. Отсюда вытекает неравенство (7).

4. К функции $\varphi(z)$ применима формула Коши — Грина [6], с. 155:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{U \setminus \overline{G}} \frac{\varphi_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta, \quad z \in G.$$

Пользуясь этим интегральным представлением, можно построить последовательность полиномов, сходящуюся к $\varphi(z)$ по норме пространства $L_2^1(G)$, что позволяет в силу экстремальных свойств полиномов Бибербаха утверждать справедливость следующего факта.

Лемма 3. *Для всякого натурального* $n=1, 2, \ldots$ $\|\varphi-\pi_n\|_{L_2^1(G)} \leqslant \leqslant n^{-\gamma}$ *при некотором* $\gamma=\gamma(G)>0$.

Доказательство. Пусть ν $(0<\nu<1)$ — произвольное фиксированное число, $z \in G$. Положим

$$U_n = U \setminus (\overline{G} \cup \Omega_{n^{-\nu}}),\ J_1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega_{n^{-\nu}}} \frac{\varphi_{\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\, d\sigma_\zeta,$$

$$J_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{U_n} \frac{\varphi_{\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\, d\sigma_\zeta.$$

Таким образом, $\varphi'(z) = J_1(z) + J_2(z)$, $z \in G$. Как известно [7], с. 81,

$$\iint\limits_{G} |J_1(z)|^2\, d\sigma_z \leqslant \iint\limits_{\Omega_{n^{-\nu}}} |\varphi_{\bar\zeta}(\zeta)|^2\, d\sigma_\zeta \leqslant n^{-\nu\delta}$$

(использовано также неравенство (3)). Кроме того

$$|J_1(z_0)| \leqslant \Big| \iint\limits_{\Omega_{n^{-\nu}}} |\varphi_{\bar\zeta}(\zeta)|\, d\sigma_\zeta \Big| \leqslant \{\operatorname{mes} \Omega_{n^{-\nu}}\}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \iint\limits_{\Omega_{n^{-\nu}}} |\varphi_{\bar\zeta}(\zeta)|^2\, d\sigma_\zeta \Big\}^{\frac{1}{2}} \leqslant n^{-\frac{\nu\delta}{2}}. \quad (8)$$

Для приближения $J_2(z)$ используем ядра В. К. Дзядыка $K_{r,m,k,n}(\zeta, z)$, введенные в [8] (см. также [9]) достаточно хорошо приближающие ядро Коши $1/(\zeta - z)$ и являющиеся при этом полиномами по z степени $n' = n'(r, m, k, n) \asymp n$. Нас будет интересовать случай, когда $r = 2$, а $m = m(G)$ и $k = k(G)$ — достаточно велики. В областях с квазиконформной границей аппроксимационные свойства функций $K_{r,m,k,n}(\zeta, z)$ исследованы в [12]. Комбинируя теорему 1 работы [12] с леммой 1, нетрудно доказать, что существует натуральное $k=k(G) \geqslant 2$, при котором для всех $z \in \overline{G}$ и $\zeta \in U_n$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{(\zeta-z)^2} - \frac{\partial}{\partial z} K_{2,m,k,n}(\zeta, z) \right| \leqslant n^{(\nu-1)m\beta+2\alpha\nu} \leqslant n^{-\gamma} \quad (9)$$

для любого $\gamma > 0$, как только $m > [(2\alpha\nu+\gamma)/(1-\nu)\beta]$.

Положим для $z \in G$

$$P'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} K_{2,m,k,n}(\zeta, z)\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{U_n} \varphi_{\bar\zeta}(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} K_{2,m,k,n}(\zeta, z)\, d\sigma_\zeta;$$

$$P_n(z) = \int\limits_{z_0}^{z} P'_n(\zeta)\, d\zeta.$$

Учитывая (9), получаем $|J_1(z) - P'_n(z)| \leqslant n^{-\gamma}$, $z \in G$. Следовательно,

$$\|\varphi - P_n\|_{L_2^1(G)} \leqslant n^{-\gamma}, \qquad \gamma \leqslant \nu\delta. \quad (10)$$

Полагая $T_n(z) = P_n(z) + [1 - P'_n(z_0)](z - z_0)$, согласно оценкам (8) и (10) имеем $\|T_n - \varphi\|_{L_2^1(G)} \leqslant n^{-\gamma}$, $\gamma \leqslant \frac{\nu\delta}{2}$, при этом $T_n(z_0) = 0$, $T'_n(z_0) = 1$. Для завершения доказательства леммы 3 остается воспользоваться определением полиномов Бибербаха.

Доказательство теоремы проводится несложно с использованием лемм 2 и 3 методом, изложенным в [5].

1. *Келдыш М. В.* Sur l'approximation en moyene quadraque des functions analytique.— Мат. сб., 1939, 5, № 2, с. 391—401.
2. *Мергелян С. Н.* Некоторые вопросы конструктивной теории функций.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1951, 37, с. 3—91.
3. *Wu Xue-mon.* On Bieberbach polynomials.— Acta Math. Sinica, 1963, 13, N 2, p. 145—151.
4. *Суетин П. К.* Многочлены, ортогональные по площади, и многочлены Бибербаха.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1971, 100, с. 3—92.
5. *Симоненко И. Б.* О сходимости полиномов Бибербаха в случае липшицевой границы.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, 42, № 4, с. 870—878.
6. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasiconformal Mappings in the Plane.— Berlin Heildelberg, New York, 1973.— 260.
7. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям.— М.: Мир, 1969.— 133 с.
8. *Дзядык В. К., Швай А. И.* О приближении функций классов Гельдера на замкнутых множествах с острыми внешними углами.— В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1971, вып. 2, с. 74—164.
9. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 512 с.
10. *Андриевский В. В.* Некоторые свойства континуумов с кусочно-квазиконформной границей.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 4, с. 435—440.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Новосибирск: СО АН СССР, 1962.— 127 с.
12. *Белый В. И.* Приближение функций классов $A^r(\overline{G})$ в конечных областях с квазиконформной границей.— В кн.: Теория функций и отображений. Киев : Наук. думка, 1979, с. 37—62.

Институт прикладной математики и механики
АН УССР

Поступила в редакцию
11.01.82