УДК 517.946

М. В. Краснощок (Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Донецьк)

ЕВОЛЮЦІЙНА ЗАДАЧА З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ СТАЦІОНАРНОЇ СИСТЕМИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

We consider an evolution free-boundary problem for a stationary linear system of the theory of elasticity that arises in the investigation of solid thin films in microelectronic devices. We prove its solvability on an arbitrary time interval under the condition that the initial data are sufficiently close to the stationary solution.

Рассмотрена эволюционная задача со свободной границей для стационарной линейной системы теории упругости, возникающая при исследовании тонких пленочных покрытий в микроэлектронных устройствах. Доказана ее разрешимость на произвольном интервале времени при условии, что начальные данные достаточно близки к стационарному решению.

Вступ. У даній роботі розглянуто еволюційну задачу з вільною межею для стаціонарної лінійної системи теорії пружності, що виникає при дослідженні тонких плівкових покриттів у мікроелектронних приладах (див. [1], а також [2, 3]). Зазначимо, що у роботі [1] побудовано розв'язок лінеаризованої однорідної задачі у модельному випадку, коли початкова товщина покриття має вигляд $h_0(x_1) = h^0 + a\cos(\omega x_1)$, де h^0, a, ω — задані сталі. Нижче вивчено вихідну задачу в точній постановці, з урахуванням додаткової інтегральної умови, яка гарантує єдиність розв'язку. Доведено існування розв'язку даної задачі на довільному відрізку часу у віповідних класах Соболєва. Відносно початкового положення вільної межі ми припускаємо, що h_0 — достатньо гладка періодична (з періодом 2π) функція, до того ж різниця між $h_0(x_1)$ та її середньою величиною $h^0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h_0(x_1)dx_1$ у відповідній нормі є „достатньо малою".

Еволюційні задачі з вільними межами для еліптичних рівнянь та систем досліджувались, наприклад, у роботах [4 – 10] (див. також бібліографію в [11]). У даній роботі, як і в [10], будемо припускати періодичність вільної межі і використовувати метод відокремлення змінних.

Стаття складається зі вступу і п'яти пунктів. У першому пункті наведено постановку задачі, у другому введено основні функціональні простори і сформульовано основний результат. Третій пункт містить деякі допоміжні твердження, зокрема щодо зведення задачі з вільною межею до задачі у фіксованій області. У четвертому пункті досліджується відповідна лінійна задача. П'ятий пункт присвячено доведенню основного результату даної роботи — теореми 1.

1. Постановка задачі. Будемо вважати, що підсумовування за повторюваними індексами i, j, k проводиться від 1 до 2. Для довільних тензорів другого рангу a і b позначимо через $a \cdot b = a_{ij}b_{ij}$ їх скалярний добуток.

Нагадаємо, що за умов плоскої деформації, переміщення $u = (u_1, u_2)$ компоненти тензорів деформації ε і напружень σ пов'язані співвідношеннями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_j u_i), \qquad \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\partial_k u_k\,\delta_{ij}\right), \tag{1}$$

де δ_{ij} — символи Кронекера, $\nu \in (0, 1/2)$ — коефіцієнт Пуассона, $E > 0$ — модуль Юнга. Нагадаємо також, що стан рівноваги смуги $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x_2 < h^0\}$, на яку вздовж осі Ox_1 діє розтяжне зусилля $\sigma_0 > 0$, верхня межа якої $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 = h^0\}$ вільна від навантаження, а нижня $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 = 0\}$ спирається без тертя на недеформовну основу, можна описати за допомогою відповідно тензорів напружень і деформацій

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^0 = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} (1-\nu)\sigma_0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо далі еволюцію криволінійної смуги $Q(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x_2 < h(x_1,t)\}$, товщина якої $h(x_1,t)$ буде знаходитись із рівняння поверхневої дифузії, що описує фазовий перехід „пара-пружне тіло” (див. [1]). Позначимо через $\gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 = h(x_1,t)\}$ вільну межу, через $\varkappa = \dfrac{h_{x_1x_1}}{(1+h_{x_1}^2)^{3/2}}$ її кривизну, через $n = \left(-\dfrac{h_{x_1}}{(1+h_{x_1}^2)^{1/2}}, \dfrac{1}{(1+h_{x_1}^2)^{1/2}}\right)$ одиничну зовнішню нормаль до $\gamma(t)$, через $V_n = \dfrac{h_t}{\sqrt{1+h_{x_1}^2}}$ швидкість руху вільної межі у напрямку нормалі n і через $\Delta_{\gamma(t)}$ оператор Лапласа – Бельтрамі на $\gamma(t)$. Як вже зазначалося, початкова функція $h_0(x_1)$ є періодичною за змінною x_1 з періодом 2π. Як наслідок вважатимемо, що всі функції, що розглядаються, мають ту саму властивість, і називатимемо їх періодичними. Нехай $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x_1 < 2\pi\}$ і для довільної множини $G \in \mathbb{R}^2$ $\;G' = G \cap \Pi$.

Розглянемо наступну задачу: знайти періодичну функцію $h(x_1,t)$, відповідну вільну межу $\gamma(t)$ та періодичну вектор-функцію $u(x,t)$ в області $Q(t) = \{x \in R^2 \colon 0 < x_2 < h(x_1,t)\}$ так, щоб виконувались умови

$$\begin{gathered} \partial_j \sigma_{ij} = 0, \qquad x \in Q(t), \quad t \in (0,T), \quad i = 1,2, \\ (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^0) n_j = 0, \qquad x \in \gamma(t), \quad t \in (0,T), \quad i = 1,2, \\ \sigma_{12} = 0, \quad u_2 = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t \in (0,T), \\ \int\limits_{Q'(t)} u_1(x,t)\,dx = 0, \ t \in (0,T), \end{gathered} \tag{2}$$

$$V_n = \Delta_{\gamma(t)}\left(-\alpha_0 \varkappa + \alpha_1 U^0\right), \qquad x \in \gamma(t), \quad t \in (0,T), \qquad h(x_1,0) = h_0(x_1), \tag{3}$$

де α_0, α_1 — додатні сталі, $U^0 = \dfrac{1}{2}(\sigma + \sigma^0)\cdot(\varepsilon + \varepsilon^0)$.

З рівняння (3) видно, що $\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x_1,t)\,dx_1 = \int_0^{2\pi} h_0(x_1)\,dx_1$. Позначимо через $\varrho = h - h^0$ відхилення вільної межі $\gamma(t)$ від Γ. Далі невідомі σ, ε, h можна розглядати як збурення „базового стану” σ^0, ε^0, h^0. Зазначимо також, що набір функцій $u = 0$, $h = h^0$ $(\varrho = 0)$ є стаціонарним розв’язком задачі (2), (3).

***Зауваження* 1.** Безпосередніми обчисленнями неважко перевірити, що $U^0 = U + \sigma_0 \partial_1 u_1 + \dfrac{1}{2}\sigma_{11}^0 \varepsilon_{11}^0$, де $U = \dfrac{1}{2}\sigma\varepsilon$. Отже, умову (3) можна замінити на еквівалентну:

$$V_n = \Delta_{\gamma(t)}\left(-\alpha_0 \varkappa + \alpha_1 U + \alpha_1 \sigma_0 \partial_1 u_1\right), \qquad x \in \gamma(t), \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

***Зауваження* 2.** Позначимо через $\Re$ лінійний простір жорстких переміщень v в $\mathbb{R}^2 : v_1 = a_1 + bx_2$, $v_2 = a_2 - bx_1$, де a_1, a_2, b — довільні сталі. Неважко перевірити, що $\partial_j \sigma_{ij}(v) = 0$, $i = 1, 2$, для всіх $v \in \Re$. Якщо компоненти вектора v є періодичними, то $b = 0$. З умов $v_2|_\Sigma = 0$ і $\int_{Q'(t)} v_1 dx = 0$ випливає відповідно, що $a_2 = 0$ і $a_1 = 0$, тобто $v = 0$. Таким чином, однорідна (при $\sigma^0_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$) задача (2) для заданої кривої $\gamma(t)$ має лише тривіальний розв'язок. Зазначимо також, що завдяки періодичності функції h (див. також [12, с. 49]) буде виконано умови узгодження $\int_{\gamma'(t)} \sigma^0_{ij} n_j(t) ds = 0, \quad i = 1, 2$, оскільки $\int_{\gamma'(t)} n_1 ds = \int_0^{2\pi} h_{x_1}(x_1, t) dx_1 = 0$.

***Зауваження* 3.** Для оператора Лапласа – Бельтрамі Δ_Γ використовуватимемо два еквівалентних зображення

$$\Delta_{\gamma(t)} f(x_1, t) = \Delta^{(1)}_{\gamma(t)} f(x_1, t) = \frac{1}{(1 + h^2_{x_1})^{1/2}} \left(\frac{f_{x_1}}{(1 + h^2_{x_1})^{1/2}} \right)_{x_1},$$
$$\Delta_{\gamma(t)} f(x, t) = \Delta^{(2)}_{\gamma(t)} f(x_1, t) = \sum_{i,j=1}^{2} \tau_i \tau_j \partial_i \partial_j f - \varkappa \sum_{i=1}^{2} n_i \partial_i f, \tag{5}$$

де $\tau = \left(\frac{1}{(1 + h^2_{x_1})^{1/2}}, \frac{h_{x_1}}{(1 + h^2_{x_1})^{1/2}} \right)$ — дотична до $\gamma(t)$.

2. Основний результат. Визначимо спочатку основні функціональні простори. Для довільних періодичних функцій $f(x_1, t)$, $F(x, t)$ позначимо відповідно через

$$\widehat{f}(m, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, t) \exp(-imx_1) dx_1, \qquad \widehat{F}(m, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, t) \exp(-imx_1) dx_1$$

їх коефіцієнти Фур'є.

Далі скрізь q — натуральне число. Визначимо простори $P^{q+1/2}(\Gamma)$, $P^{q+1/2}(\Gamma_T)$, як замикання періодичних нескінченно диференційовних функцій за нормами

$$\|f\|_{P^{q+1/2}(\Gamma)} \equiv |f|_{q+1/2,\Gamma} = \left(\sum_{m \in Z} (1 + |m|^{2q+1}) |\widehat{f}(m)|^2 \right)^{1/2}, \qquad q \geq 0,$$

$$\|f\|_{P^{q+1/2}(\Gamma_T)} \equiv |f|_{q+1/2,\Gamma_T} = \left(\sum_{0 \leq i \leq 2} \int_0^T |\partial^i_t f(\cdot, t)|^2_{q+1/2-4i,\Gamma} dt \right)^{1/2}, \qquad q \geq 8,$$

відповідно. Простір $P^{q+1/2}(\Sigma_T)$ визначаємо аналогічним чином.

Позначимо

$$|F|_{0,Q'_T} = \left(\int_0^T dt \int_{Q'} |F(x, t)|^2 dx \right)^{1/2}$$

і введемо простір періодичних функцій $P^q(Q_T)$, $q \geq 9$, із скінченною нормою

$$\|F\|_{P^q(Q_T)} \equiv |F|_{q,Q_T} = \left(\sum_{0\le i\le 2} \sum_{0\le 4i+|k|\le q} |\partial_t^i \partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2} F|^2_{0,Q'_T} \right)^{1/2}.$$

Нехай ϱ належить $P^{q-1/2}(\Gamma_T)$ і функція $\widetilde{\varrho}(y,t) \in P^q(\Omega_T)$ така, що $\widetilde{\varrho}|_\Gamma = \varrho$ (див. нижче лему 2). Введемо функцію $\chi \in C^\infty(R^1)$ таку, що

$$\chi(y_2) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad y_2 \ge h^0/2, \\ 0 & \text{при} \quad y_2 \le h^0/4. \end{cases}$$

Визначимо заміну координат $x = Y_\varrho(y,t)$:

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2 + \chi(y_2)\widetilde{\varrho}(y,t),$$

яка для кожного $t \in [0,T]$ виконує взаємно однозначне перетворення області Ω на $Q(t)$ (див. нижче лему 3). Визначник матриці Якобі даного перетворення позначимо через $J = 1 + (\chi\widetilde{\varrho})_{y_2}$.

Зберігаючи за функціями $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ у нових змінних y_1, y_2 ті самі позначення, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial y_1} + a_1 \frac{\partial u}{\partial y_2} \equiv \widetilde{\partial}_1 u,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = a_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} \equiv \widetilde{\partial}_2 u, \tag{6}$$

де $a_1 = -\dfrac{(\chi\widetilde{\varrho})_{y_1}}{1 + (\chi\widetilde{\varrho})_{y_2}}$, $a_2 = \dfrac{1}{1 + (\chi\widetilde{\varrho})_{y_2}}$.

Компоненти деформацій та напружень у нових змінних набирають вигляду (пор. з (1))

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\widetilde{\partial}_j u_i + \widetilde{\partial}_i u_j), \qquad \vartheta_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \widetilde{\partial}_k u_k \delta_{ij} \right). \tag{7}$$

Позначимо $I[f](t) = \displaystyle\int_{\Omega'} f(y,t)dy$. На підставі (5)–(7) задачу (2), (4) можна сформулювати так: знайти періодичні u, ϱ такі, що

$$\widetilde{\partial}_j \vartheta_{ij} = 0, \qquad (y,t) \in Q_T, \quad i = 1,2, \tag{8}$$

$$\vartheta_{12} - \partial_1\varrho\vartheta_{11} = \sigma_0 \partial_1 \varrho, \qquad \vartheta_{22} - \partial_1\varrho\vartheta_{21} = 0, \quad (y,t) \in \Gamma_T,$$
$$\vartheta_{12} = 0, \qquad u_2 = 0, \quad (y,t) \in \Sigma_T,$$
$$\frac{\varrho_t}{(1+\varrho_{y_1}^2)^{1/2}} = -\alpha_0 \Delta_\Gamma^{(1)} \varkappa + \alpha_1 \widetilde{\Delta}_\Gamma^{(2)} \widetilde{U} + \alpha_1\sigma_0 \widetilde{\Delta}_\Gamma^{(2)} \widetilde{\partial}_1 u_1, \quad (y,t) \in \Gamma_T, \tag{9}$$
$$I[Ju_1] = 0, \quad t \in (0,T), \qquad \varrho(y_1,0) = \varrho_0(y_1) \equiv h_0(y_1) - h^0,$$

де $\widetilde{\Delta}_\Gamma^{(2)} = \sum_{i,j=1}^2 \tau_i\tau_j \widetilde{\partial}_i \widetilde{\partial}_j - \varkappa \sum_{i=1}^2 n_i \widetilde{\partial}_i$, $\widetilde{U} = \dfrac{1}{2}\vartheta_{ij}\epsilon_{ij}$.

Основним результатом даної статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $q \geq 8$. Для довільного $T > 0$ існує стала $\delta_0 = \delta_0(T, q)$ така, що для довільної початкової функції ϱ_0,*

$$|\varrho_0|_{q+2+1/2,\Gamma} \leq \delta_0(T, q), \tag{10}$$

існує єдиний розв'язок $u \in P^{q+5}(\Omega_T)$, $\varrho \in P^{q+4+1/2}(\Gamma_T)$ задачі (8), (9).

Зауважимо також, що, як проміжний результат, одержано достатню умову стійкості (в сенсі роботи [1]) стаціонарного розв'язку $u = 0$, $h = h^0$ (див. нижче умову (31)).

3. Допоміжні твердження. Наступні три леми потрібні для побудови невиродженої заміни координат Y_ϱ.

Позначимо через $H^{3,1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1)$ простір функцій із скінченною нормою

$$\|w\|_3^2 \equiv \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^2} \left(|w(x,t)|^2 + |\partial_t w(x,t)|^2 + \sum_{k_1+k_2 \leq 3} |\partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2} w(x,t)|^2 \right) dx.$$

Лема 1. *Якщо w належить $H^{3,1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1)$, то w належить $C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1)$ і справджується оцінка*

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1} |w| \leq C \|w\|_3.$$

Доведення. Використаємо той самий підхід, що і при доведенні леми 5.1 роботи [13]. Для перетворення Фур'є

$$\widehat{w}(\xi, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^2} w(x,t) \exp(ix\xi + it\tau) dx$$

на підставі формули Парсеваля виконується нерівність $\|\widehat{w}\|_3 \leq C' \|w\|_3$, де

$$\|\widehat{w}\|_3 = \int\limits_{R^1} d\tau \int\limits_{R^2} |\widehat{w}(\xi, \tau)|^2 (1 + |\xi|^3 + |\tau|)^2 d\xi.$$

Позначимо $\psi(\xi, \tau) = 1 + |\xi|^3 + |\tau|$. Очевидно, $\psi^{-1} \in L^2(R^2 \times R^1)$. На підставі нерівності Гельдера функція $\widehat{w} = (\widehat{w}\psi) \cdot \psi^{-1}$ належить до $L^1(R^2 \times R^1)$. Останнє означає, що функція $w(x,t)$ є обмеженою і неперервною. Отже,

$$\sup_{R^2 \times R^1} |w| \leq \|\widehat{w}\|_{L^1(R^2 \times R^1)} \leq C'' \|\widehat{w}\|_3 \leq C' C'' \|w\|_3 \leq C \|w\|_3.$$

Лему доведено.

За аналогією з $H^{3,1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1)$ введемо простір $H^{3,1}(\Omega'_T)$ з нормою $\|w\|_{3,\Omega'_T}$.

***Наслідок* 1.** *Якщо w належить $H^{3,1}(\Omega'_T)$, то w належить $C(\overline{\Omega}'_T)$ і справджується оцінка*

$$\sup_{\Omega'_T} |w| \leq C_1(h^0, T) \|w\|_{3,\Omega'_T}. \tag{11}$$

Лема 2 (продовження функцій). *Нехай f належить $P^{q-1/2}(\Gamma_T)$, $q \geq 9$, тоді існує функція $\widetilde{f} \in P^q(Q_T)$ така, що*

$$\widetilde{f}|_\Gamma = f, \qquad \partial_2 \widetilde{f}|_\Gamma = 0, \qquad |\widetilde{f}|_{q,Q_T} \le C_2(q,h^0,T)|f|_{q-1/2,\Gamma_T}.$$

Для доведення даної леми достатньо, наприклад, як і в роботі [10], покласти

$$\widetilde{f}(x,t) = \sum_{m\in Z}(1+(h^0-x_2)^2m^2)^{-1/2}\widehat{f}_m(t)\exp(imx_1).$$

Нехай далі функція $\widetilde{\varrho} \in P^q(\Omega_T)$ є продовженням функції $\varrho \in P^{q-1/2}(\Gamma_T)$, що задовольняє умови леми 2.

Лема 3 (заміна координат). *Існує* $\delta_* = \delta_*(h^0, T, C_1(h^0,T))$, $q \ge 8$, *таке, що при* $|\varrho|_{q+1/2,Q_T} \le \delta_*$ *заміна* $x = Y_\varrho(y,t)$ *для кожного* $t \in [0,T]$ *взаємно однозначно відображає область* Ω *на* $Q(t)$.

Доведення. Із вигляду Y_ϱ видно, що достатньо відшукати таке значення параметра δ_*, що $\widetilde{\varrho}(y,t) \le h^0/2$ і $J(y,t) = 1 + \partial_2(\chi(y_2)\widetilde{\varrho}(y,t)) \ge 1/2$ при $(y,t)\in\Omega_T$. Оскільки (див. наслідок 1)

$$\sup_{\Omega_T}|\partial_2(\chi\widetilde{\varrho})| \le C_\chi(\sup_{\Omega_T}|\widetilde{\varrho}| + \sup_{\Omega_T}|\partial_2\widetilde{\varrho}|) \le 2C_1(h^0,T)C_\chi|\widetilde{\varrho}|_{q,\Omega_T}, \quad \text{де} \quad c_\chi = \max\{1, \sup_{(0,h^0)}|\chi'|\},$$

обидві умови буде виконано, якщо

$$|\varrho|_{q-1/2,Q_T} \le \delta_* \equiv \frac{1}{C_2(q,h^0,T)}\min\left\{\frac{h^0}{2}, \frac{1}{4C_1(h^0,T)C_\chi}\right\}.$$

Лему доведено.

Наступні три леми є необхідними для оцінки норм нелінійних членів при доведенні теореми 1.

Лема 4 (мультиплікативна властивість норм). 1. *Нехай* u, v *належать* $P^q(\Omega_T)$, $q \ge 8$, *тоді* uv *належить* $P^q(\Omega_T)$ *і має місце оцінка*

$$|uv|_{q,\Omega_T} \le C_3(q,h^0,T)|u|_{q,\Omega_T}|v|_{q,\Omega_T}. \tag{12}$$

2. *Нехай* u, v *належать* $P^{q-1/2}(\Gamma_T)$, $q \ge 9$, *тоді* uv *належить* $P^{q-1/2}(\Gamma_T)$ *і має місце оцінка*

$$|uv|_{q-1/2,\Gamma_T} \le C_4(q,h^0,T)|u|_{q-1/2,\Gamma_T}|v|_{q-1/2,\Gamma_T}. \tag{13}$$

Доведення. 1. Маємо

$$|uv|^2_{q,\Omega_T} \le \sum_{0\le i\le 2}\sum_{|k|\le q-4i}|\partial_t^i\partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}(uv)|^2_{0,\Omega'_T} \le$$

$$\le c(q)\sum_{0\le i\le 2}\sum_{|k|\le q-4i}\sum_{j=0}^{i}\sum_{|l|\le|k|}|\partial_t^j\partial_1^{l_1}\partial_2^{l_2}u\,\cdot\,\partial_t^{i-j}\partial_1^{k_1-l_1}\partial_2^{k_2-l_2}v|^2_{0,\Omega'_T}.$$

Розіб'ємо останній вираз на дві групи доданків: до першої групи віднесемо члени, у яких $4j+|l| \le q-4$, а до другої — всі інші. Легко бачити, що у другій групі для відповідних індексів, за якими проводиться підсумовування, маємо нерівність $4(i-j)+|k-l| \le 4$. Застосовуючи оцінку (11) у першій групі до похідних u і у другій — до похідних v, отримуємо оцінку (12).

2. Згідно з лемою 2 можна побудувати функції $\widetilde{u} \in P^q(\Omega_T)$, $\widetilde{v} \in P^q(\Omega_T)$ такі, що $\widetilde{u}|_\Gamma = u$, $\widetilde{v}|_\Gamma = v$ і до того ж

$$|\widetilde{u}|_{q,\Omega_T} |\widetilde{v}|_{q,\Omega_T} \leq (C_2(q, h^0, T))^2 |u|_{q-1/2,\Gamma_T} |v|_{q-1/2,\Gamma_T}.$$

З іншого боку, застосовуючи оцінку (12) та теорему про сліди до добутку $\widetilde{u}\widetilde{v}$ (тут ми використовуємо підхід, запропонований у роботі [7]), маємо

$$|\widetilde{u}|_{q,\Omega_T} |\widetilde{v}|_{q,\Omega_T} \geq \frac{1}{C_3(q, h^0, T)} |\widetilde{u}\widetilde{v}|_{q,\Omega_T} \geq \frac{C(q)}{C_3(q, h^0, T)} |uv|_{q-1/2,\Gamma_T}.$$

З двох останніх нерівностей випливає оцінка (13).

Лему доведено.

Лема 5. *Нехай*

$$u \in P^q(\Omega_T), \quad q \geq 8, \qquad \sup_{\Omega_T} |u| \leq 1/2, \qquad |u|_{q,\Omega_T} \leq \frac{1}{2C_3(q, h^0, T)},$$

тоді $(1-u)^{-l}$ *належить* $P^q(\Omega_T)$ *і виконується нерівність*

$$|1 - (1-u)^{-l}|_{q,\Omega_T} \leq C_5(l, q, h^0, T) |u|_{q,\Omega_T}.$$

Для доведення даної леми необхідно використати розвинення функції $(1-u)^{-l}$ у ряд Тейлора, до кожного члена якого застосовано оцінку (12).

Лема 6. *Нехай* u *належить* $P^{q-1/2}(\Gamma_T)$, $q \geq 9$, $\sup_{\Omega_T} |u| \leq 1/2$, $|u|_{q-1/2,\Gamma_T} \leq \dfrac{1}{2C_4(q, h^0, T)}$, *тоді* $(1-u)^{-l}$ *належить* $P^{q-1/2}(\Gamma_T)$ *і виконується нерівність*

$$|1 - (1-u)^{-l}|_{q-1/2,\Gamma_T} \leq C_6(l, q, h^0, T) |u|_{q-1/2,\Gamma_T}.$$

Доведення даної леми є комбінацією підходів доведення твердження 2 леми 4 і леми 5.

Леми 5 і 6 потрібні для оцінки норм членів вигляду $(1 + (\partial_1 \varrho)^2)^{-l}$.

Лема 7. *Нехай* w *належить* $H^2(\Omega')$, $w(0, x_2) = w(2\pi, x_2)$ *при* $x_2 \in (0, h^0)$, *функції* $\sigma_{ij}(w)$, $\vartheta_{ij}(w)$ *обчислюються відповідно за формулами* (1) *і* (7), *тоді мають місце співвідношення*

$$\int\limits_{\Omega'} \partial_j \sigma_{1j}(w) dx = \int\limits_{\Gamma'} \sigma_{12}(w) ds - \int\limits_{\Sigma'} \sigma_{12}(w) ds, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\Omega'} J \widetilde{\partial}_j \vartheta_{1j}(w) dx = \int\limits_{\Gamma'} (-\partial_1 \varrho \vartheta_{11}(u) + \vartheta_{12}(u)) ds - \int\limits_{\Sigma'} \vartheta_{12}(u) ds. \tag{15}$$

Якщо, додатково, $w_2|_\Sigma = 0$ *і* $I[w_1] = 0$, *то виконується нерівність Корна*

$$\|w\|^2_{H^1(\Omega')} \leq C(h^0) \int\limits_{\Omega'} \sigma(w) \cdot \varepsilon(w) \, dx. \tag{16}$$

Формула (14) є звичайною формулою інтегрування частинами, а (15) безпосередньо випливає з властивостей функцій a_1, a_2, J, зокрема того, що $\partial_1 J + \partial_2(a_1 J) = 0$ (пор. з формулою (3.11) з роботи [9]). Нерівність (16) є наслідком теореми 2.5 із монографії [12] і зауваження 2.

***Зауваження* 4.** Зважаючи на формулу (15), у подальшому розгляді замість (8) розглядатимемо еквівалентну систему

$$J\sum_{j=1}^{2}\widetilde{\partial}_j\vartheta_{ij}=0,\qquad (x,t)\in Q_T,\quad i=1,2. \tag{17}$$

4. Лінійна задача. Розглянемо таку задачу для знаходження невідомих $u=(u_1,u_2)$ і r :

$$\sum_{j=1}^{2}\partial_j\sigma_{ij}(u)=f_i,\qquad (x,t)\in Q_T,\quad i=1,2,$$

$$\sigma_{12}(u)-\sigma_0\partial_1 r=\phi_1,\qquad \sigma_{22}(u)=\phi_2,\quad (x,t)\in\Gamma_T, \tag{18}$$

$$\sigma_{12}(u)=\phi_3,\qquad u_2=0,\quad (x,t)\in\Sigma_T,\quad I[u_1](t)=\phi(t),\quad t\in(0,T),$$

$$r_t=-\alpha_0\partial_1^4 r+\alpha_1\partial_1^3 u_1+\phi_4,\qquad (x,t)\in\Gamma_T,\quad r(y_1,0)=r_0(y_1).$$

Введемо простір $\mathcal{W}_{q,T}=P^{q+4+1/2}(\Gamma_T)\times P^{q+5}(\Omega_T)\times P^{q+5}(\Omega_T)$ з нормою

$$\mathcal{N}_{q,T}(r,u)=|r|_{q+4+1/2,\Gamma_T}+|r_t|_{q+1/2,\Gamma_T}+|u|_{q+5,\Omega_T}.$$

Позначимо також

$$\mathcal{F}_{q,T}(f,\phi)=\sum_{i=1}^{2}|f_i|_{q+3,\Omega_T}+\sum_{i=1}^{2}|\phi_i|_{q+3+1/2,\Gamma_T}+|\phi_3|_{q+3+1/2,\Sigma_T}+|\phi_4|_{q+1/2,\Gamma_T}+|\phi|_{H^2(0,T)}.$$

Теорема 2. *Нехай виконано такі умови*:

$\mathrm{H}_1)$ $\quad r_0\in P^{q+2+1/2}(\Gamma),\quad f_i\in P^{q+3}(Q_T),\quad \phi_i\in P^{q+3+1/2}(\Gamma_T),\quad i=1,2,$

$$\phi_3\in P^{q+3+1/2}(\Sigma_T),\quad \phi_4\in P^{q+1/2}(\Gamma_T),\quad \phi\in H^2(0,T);$$

$\mathrm{H}_2)$ $$\int_{Q'}f_1(y,t)dy=\int_{\Gamma'}\phi_1(y,t)ds-\int_{\Sigma'}\phi_3(y,t)ds,\qquad t\in[0,T].$$

Тоді існує єдиний розв'язок $(r,u)\in\mathcal{W}_{q,T}$ задачі (18) *і справджується оцінка*

$$\mathcal{N}_{q,T}(r,u)\le C_7(q,T)\left(\mathcal{F}_{q,T}(f,\phi)+|r_0|_{q+2+1/2,\Gamma}\right). \tag{19}$$

Доведення. Для розв'язання задачі (18) використаємо метод Фур'є. Позначимо через $\widehat{r}(m,t)$, $\widehat{u}_k(m,y_2,t)$, $m\in Z$, $k=1,2$, невідомі коефіцієнти Фур'є, а також

$$L_k(\partial_1,\partial_2)u=\partial_j\sigma_{kj}(u),\qquad \widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}(m)]=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\partial_2\widehat{u}_1(m)+im\widehat{u}_2(m)\right),$$

$$\widehat{\sigma}_{22}[\widehat{u}_m]=\frac{E}{1+\nu}\left(\partial_2\widehat{u}_2(m)+\frac{\nu}{1-2\nu}(im\widehat{u}_1(m)+\partial_2\widehat{u}_2(m))\right).$$

Отже, задача (18) зводиться до наступної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$L_k(im,\partial_2)\widehat{u}(m)=\widehat{f}_k(m),\ 0<y_2<h^0,\ k=1,2, \tag{20}$$

$$\widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}(m)]=\sigma_0 im\partial_1\widehat{r}(m)+\widehat{\phi}_1(m),\qquad \widehat{\sigma}_{22}[\widehat{u}_m]=\widehat{\phi}_2(m),\qquad y_2=h^0,$$
$$\widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}(m)]=\widehat{\phi}_3(m),\qquad \widehat{u}_2(m)=0,\qquad y_2=0,$$
$$\widehat{r}_t(m)=-\alpha_0 m^4\widehat{r}(m)-\alpha_1\sigma_0 im^3\widehat{u}_1(m)+\widehat{\phi}_4(m),\qquad y_2=0, \tag{21}$$
$$\int\limits_0^{h^0}\widehat{u}_1(0,y_2,t)dy_2=2\pi\phi(t),\qquad t\in(0,T),\qquad \widehat{r}(m,0)=\widehat{r}_0(m).$$

У свою чергу умова узгодження H_2 набирає вигляду

$$\int\limits_0^{h^0}\widehat{f}_1(0,y_2,t)dy_2=\widehat{\phi}_1(0,t)-\widehat{\phi}_3(0,t),\qquad t\in[0,T]. \tag{22}$$

Далі наша мета полягає в тому, щоб звести неоднорідну задачу (20), (21) до аналогічної задачі з $\widehat{f}_k(m)=0,\ k=1,2,\ \widehat{\phi}_i(m)=0,\ i=1,2,3$ (див. нижче задачу (26), яка містить в собі основну інформацію про лінеаризовану задачу і диктує вибір функціональних просторів). Оскільки інтегральна умова в (21) і умова узгодження (22) стосуються лише випадку $m=0$, спочатку ми знаходимо $\widehat{u}_k(0,y_2,t)$ і $\widehat{r}(0,t)$, а потім послідовно „знімаємо” праві частини $\widehat{f}_k(m)$, $k=1,2$, і $\widehat{\phi}_i(m)$, $i=1,2,3$, при $m\neq0$.

При $m=0$ маємо

$$\widehat{u}_1(0,y_2,t)=\frac{2\pi}{h^0}\phi(t)-\frac{1}{H}\int\limits_0^{h^0}\widehat{u}_{1,0}(z,t)dz+\widehat{u}_{1,0}(y_2,t),$$

де

$$\widehat{u}_{1,0}(y_2,t)=\frac{2(1+\nu)}{E}\left\{-\int\limits_0^{y_2}z\widehat{f}_1(0,z,t)dz+y_2\left(\widehat{\phi}_1(0,t)-\int\limits_{y_2}^{h^0}\widehat{f}_1(0,z,t)dz\right)\right\},$$
$$\widehat{u}_2(0,y_2,t)=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\left\{-\int\limits_0^{y_2}z\widehat{f}_2(0,z,t)dz+y_2\left(\widehat{\phi}_2(0,t)-\int\limits_{y_2}^{h^0}\widehat{f}_2(0,z,t)dz\right)\right\}, \tag{23}$$

$$\widehat{r}(0,t)=\widehat{r}_0(0)+\int\limits_0^t\widehat{\phi}_4(m,s)ds.$$

При $m \neq 0$ спочатку побудуємо функцію $\widehat{u}^f(m, y_2, t) = (\widehat{u}_1^f(m, y_2, t), \widehat{u}_2^f(m, y_2, t)$, яка задовольняє систему (20) та умову $\widehat{u}_2^f(m, 0, t) = 0$. Загальний розв'язок однорідної системи (20) можна записати у вигляді

$$\widehat{w}_1(m, y_2) = \frac{i|m|}{m}\left[\left(-c_1 + \left(y_2 - \frac{3-4\nu}{|m|}\right)c_2\right)e^{-|m|y_2} + \left(c_3 - \left(y_2 + \frac{3-4\nu}{|m|}\right)c_4\right)e^{|m|y_2}\right],$$

$$\widehat{w}_2(m, y_2) = (c_1 - y_2c_2)e^{-|m|y_2} + (c_3 - y_2c_4)e^{|m|y_2}.$$

Використовуючи метод варіації довільних сталих, одержуємо $\left(\lambda = \dfrac{1+\nu}{4E(1-\nu)}\right)$:

$$\widehat{u}_1^f(m, y_2, t) =$$

$$= -\lambda\left[\int\limits_0^{y_2}\left((\zeta - y_2)\left(\frac{im}{|m|}\widehat{f}_2(m,\zeta,t) + \widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right) + \frac{3-4\nu}{|m|}\widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right)e^{|m|(\zeta-y_2)}d\zeta +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{y_2}^{h^0}\left((\zeta - y_2)\left(\frac{im}{|m|}\widehat{f}_2(m,\zeta,t) - \widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right) + \frac{3-4\nu}{|m|}\widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right)e^{-|m|(\zeta-y_2)}d\zeta\right] +$$

$$+\lambda\frac{im}{|m|}\left[-\int\limits_0^{h^0}(\zeta - y_2)(\widehat{f}_2(m,\zeta,t) + \frac{im}{|m|}\widehat{f}_1(m,\zeta,t)) +\right.$$

$$\left. + \frac{3-4\nu}{|m|}\widehat{f}_2(m,\zeta,t) + \frac{3-4\nu}{m}\left(\widehat{f}_2(m,\zeta,t) + \frac{im}{|m|}\widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right)e^{-|m|(\zeta+y_2)}d\zeta\right],$$

$$\widehat{u}_2^f(m, y_2, t) =$$

$$= \lambda\left[\int\limits_0^{y_2}\left((\zeta - y_2)\left(\widehat{f}_2(m,\zeta,t) - \frac{im}{|m|}\widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right) - \frac{3-4\nu}{|m|}\widehat{f}_2(m,\zeta,t)\right)e^{|m|(\zeta-y_2)}d\zeta -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{y_2}^{h^0}\left((\zeta - y_2)\left(\widehat{f}_2(m,\zeta,t) + \frac{im}{|m|}\widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right) + \frac{3-4\nu}{|m|}\widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right)e^{-|m|(\zeta-y_2)}d\zeta\right] +$$

$$+\lambda\int\limits_0^{h^0}\left((\zeta - y_2)\left(\widehat{f}_2(m,\zeta,t) + \frac{im}{|m|}\widehat{f}_1(m,\zeta,t)\right) + \frac{3-4\nu}{|m|}\widehat{f}_2(m,\zeta,t)\right)e^{-|m|(\zeta+y_2)}d\zeta.$$

Тепер шукаємо розв'язок задачі (20), (21) у вигляді $\widehat{u}_i(m) = \widehat{u}_i^f(m) + \widehat{u}_i^b(m) + \widehat{u}_i^r(m)$, $i = 1, 2$, де функції $\widehat{u}_i^b(m)$ знаходяться із співвідношень

$$L_k(im, \partial_2)\widehat{u}^b(m) = 0, \qquad 0 < y_2 < h^0, \quad k = 1, 2, \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}^b(m)] = \widehat{\psi}_{1,m}(t) \equiv \widehat{\phi}_1(m,t) - \sigma_{12}[\widehat{u}_i^f(m)],\\ \widehat{\sigma}_{22}[\widehat{u}^b(m)] = \widehat{\psi}_2(m,t) \equiv \widehat{\phi}_2(m,t) - \widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}^f(m)], \ \ y_2 = h^0,\\ \widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}^b(m)] = \widehat{\psi}_3(m,t) \equiv \widehat{\phi}_3(m,t) - \widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}^f(m)], \ \ \widehat{u}_2^b(m) = 0, \ \ y_2 = 0,\end{gathered} \tag{25}$$

а функції $\widehat{u}_i^r(m)$, $\widehat{r}(m)$ задовольняють наступні умови:

$$\begin{gathered}L_k(im, \partial_2)\widehat{u}^r(m) = 0, \qquad 0 < y_2 < h^0, \quad k = 1, 2,\\ \widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}^r(m)] = \sigma_0 im\widehat{r}(m), \quad \widehat{\sigma}_{22}[\widehat{u}^r(m)] = 0, \quad y_2 = h^0,\\ \widehat{\sigma}_{12}[\widehat{u}^r(m)] = 0, \quad \widehat{u}_2^r(m) = 0, \quad y_2 = 0,\\ \widehat{r}_t(m) = -\alpha_0 m^4 \widehat{r}(m) - \alpha_1\sigma_0 im^3\widehat{u}_1^r(m) + \widehat{\psi}_4(m,t), \quad y_2 = 0, \quad r_m(0) = r_{0,m},\end{gathered} \tag{26}$$

де $\widehat{\psi}_4(m,t) = \widehat{\phi}_4(m,t) - \alpha_1 im^3\sigma_0\widehat{u}_1^f(m) - \alpha_1 im^3\sigma_0\widehat{u}_1^b(m)$.

Розв'язок задачі (24), (25) шукатимемо у вигляді $\widehat{u}^b(m) = \Phi X$, де $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ — невідомий вектор і

$$\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{im}{|m|}\mathrm{ch}(|m|y_2) & \mathrm{sh}(|m|y_2)\\ \dfrac{im}{|m|}(y_2\mathrm{sh}(|m|y_2) + \dfrac{3-4\nu}{|m|}\mathrm{ch}(|m|y_2) & y_2\mathrm{ch}(|m|y_2)\\ \dfrac{im}{|m|}(y_2\mathrm{ch}(|m|y_2) + \dfrac{3-4\nu}{|m|}\mathrm{sh}(|m|y_2) & y_2\mathrm{sh}(|m|y_2). \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Зазначимо, що $\widehat{u}^b(m)|_{y_2=0} = 0$ при довільному виборі X. Підставляючи даний вираз у граничні умови (25), одержуємо алгебраїчну систему $AX = \Psi$, де

$$\Psi = \frac{1}{2\mu}(\widehat{\psi}_1(m,t), \widehat{\psi}_2(m,t), \widehat{\psi}_3(m,t))^{\mathrm{T}}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Виконуючи відповідні обчислення, отримуємо ($M = |m|h^0$)

$$A = \begin{pmatrix} i|m|\mathrm{sh}(M) & im(h^0\mathrm{ch}(M) + \dfrac{2(1-\nu)}{|m|}\mathrm{sh}(M) & im(h^0\mathrm{sh}(M) + \dfrac{2(1-\nu)}{|m|}\mathrm{ch}(M))\\ |m|\mathrm{ch}(M) & M\mathrm{sh}(M) + (1-2\nu)\mathrm{ch}(M)) & M\mathrm{sh}(M) + (1-2\nu)\mathrm{ch}(M))\\ 0 & 0 & 2(1-\nu)\dfrac{im}{|m|} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{i(M\mathrm{sh}(M) + (1-2\nu)\mathrm{ch}(M))}{m(\mathrm{ch}(M)\mathrm{sh}(M) + M)} & -\dfrac{i|m|\mathrm{ch}(M)}{m(\mathrm{ch}(M)\mathrm{sh}(M) + M)} & 0 \\ \dfrac{M\mathrm{ch}(M) + 2(1-\nu)\mathrm{sh}(M))}{|m|(\mathrm{ch}(M)\mathrm{sh}(M) + M)} & -\dfrac{\mathrm{sh}(M)}{(\mathrm{ch}(M)\mathrm{sh}(M) + M)} & 0 \\ \dfrac{i(M^2 - 2(1-\nu)(1-2\nu)}{2m(1-\nu)(\mathrm{ch}(M)\mathrm{sh}(M) + M)} & \dfrac{i|m|(\mathrm{ch}^2(M) + 1 - 2\nu)}{2m(1-\nu)(\mathrm{ch}(M)\mathrm{sh}(M) + M)} & \dfrac{im}{2m(1-\nu)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

Отже, функція $\widehat{u}^b(m)$ визначається за формулою

$$\widehat{u}^b(m) = B\Psi, \qquad B = \Phi A^{-1}. \tag{27}$$

Зазначимо, що, наприклад, якщо $\psi_2 = \psi_3 = 0$, то

$$\widehat{u}_1^b(m, y_2, t) = \frac{1+\nu}{E}\left(\frac{|m|(y_2 - h^0)\mathrm{sh}(|m|y_2)\mathrm{ch}(|m|h^0) + |m|h^0\mathrm{sh}(|m|(y_2 - h^0))}{|m|\,[h^0|m| + \mathrm{ch}(|m|h^0)\mathrm{sh}(|m|h^0)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1-\nu)\mathrm{ch}(|m|y_2)\mathrm{ch}(|m|h^0)}{|m|\,[h^0|m| + \mathrm{ch}(|m|h^0)\mathrm{sh}(|m|h^0)]}\right)\widehat{\psi}_1(m, t). \tag{28}$$

Відповідно, функція $\widehat{u}^r(m)$ визначається за формулою

$$\widehat{u}^r(m) = BF, \qquad \text{де} \;\; F = (im\sigma_0\widehat{r}(m,t), 0, 0)^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

Враховуючи формули (27)–(29), для знаходження $\widehat{r}(m,t)$ одержуємо задачу Коші

$$\widehat{r}_t(m,t) = -\alpha_0 m^4\widehat{r}(m,t) + |m|^3\frac{2\alpha_1(1-\nu^2)\sigma_0^2\mathrm{ch}^2(|m|h^0)}{E(h^0|m| + \mathrm{sh}(|m|h^0)\mathrm{ch}(|m|h^0))}\widehat{r}(m,t) + \widehat{\psi}_4(m,t),$$

$$\widehat{r}(m,0) = \widehat{r}_0(m).$$

Таким чином,

$$r_m(t) = r_{0,m}e^{-\mathcal{M}_m|m|^4 t} + \int\limits_0^t e^{-\mathcal{M}_m|m|^4(t-s)}\widehat{\psi}_4(m,s)ds, \tag{30}$$

де

$$\mathcal{M}_m = \alpha_0 - \frac{2\alpha_1(1-\nu^2)\sigma_0^2 h^0}{E}\frac{\mathrm{ch}^2(|m|h^0)}{|m|h^0(h^0|m| + \mathrm{sh}(|m|h^0)\mathrm{ch}(|m|h^0))}, \; m \neq 0.$$

Враховуючи останнє співвідношення в (23) і той факт, що $\psi_{4,0} = \phi_{4,0}$, можемо вважати, що зображення (30) має місце для всіх m (покладемо, наприклад, $\mathcal{M}_0 = 1$).

Позначимо $d^* = \sup_{M\in[h^0,+\infty)} \dfrac{\mathrm{ch}^2(M)}{M(M + \mathrm{sh}(M)\mathrm{ch}(M))}$. Легко бачити, що

$$\mathcal{M}_m > 0 \text{ для всіх } m \in Z, \text{ якщо } \alpha_0 - \frac{2\alpha_1(1-\nu^2)\sigma_0^2 h^0}{E}\, d^* > 0, \tag{31}$$

і тоді стаціонарний розв'язок буде стійким у сенсі роботи [1]. Але, взагалі кажучи, за рахунок вибору достатньо великих значень σ_0^2, значення $\mathcal{M}_m$ при деяких m може бути від'ємним, тому далі будемо розмірковувати таким чином. З огляду на те, що $\mathcal{M}_m \to \alpha_0$ при $|m| \to \infty$, величина

$$K_* = \max_{m \in Z} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} - \mathcal{M}_m \right\}$$

є обмеженою зверху, і $\exp(-\mathcal{M}_m |m|^4 t) \le \exp(K_* T) \exp\left(-\frac{\alpha_0}{2} |m|^4 t\right)$ для всіх $m \in Z, t \in [0, T]$.

Отже, маємо

$$\int_0^T |r(\cdot, t)|^2_{q+4+1/2,\Gamma} dt \le 2\exp(2K_* T) \sum_{m \in Z} \left[\int_0^T \exp(-\alpha_0 |m|^4 t) dt (1 + m^2)^{q+4+1/2} |\widehat{r}_0(m)|^2 + \right.$$

$$\left. + (1 + m^2)^{q+4+1/2} \int_0^T \left(\int_0^t \exp(-\alpha_0 |m|^4 (t - s)) \widehat{\psi}_4(m, s) ds \right)^2 dt \right] = 2\exp(2K_* T)(I_1 + I_2).$$

Оцінимо, наприклад, доданок I_2. На підставі нерівності Гельдера та заміни порядку інтегрування отримуємо

$$\int_0^T \left(\int_0^t \exp(-\alpha_0 |m|^4 (t - s)) \widehat{\psi}_4(m, s) ds \right)^2 dt \le$$

$$\le \max_{m \ne 0} \left\{ \left(T, \frac{1}{\alpha_0 |m|^4} \right) \right\} \int_0^T ds \int_s^T \exp(-\alpha_0 |m|^4 (t - s)) |\widehat{\psi}_4(m, s)|^2 dt \le$$

$$\le \left(\max_{m \ne 0} \left\{ \left(T, \frac{1}{\alpha_0 |m|^4} \right) \right\} \right)^2 \int_0^T |\widehat{\psi}_4(m, s)|^2 ds.$$

Отже,

$$I_2 \le \sum_{m \in Z} \left(\max_{m \ne 0} \left\{ \left(T, \frac{1}{\alpha_0 |m|^4} \right) \right\} \right)^2 (1 + m^2)^{q+4+1/2} \int_0^T |\widehat{\psi}_4(m, s)|^2 ds \le C(\alpha_0, T) |\psi_4|_{q+1/2,\Gamma_T}$$

і остаточно

$$\int_0^T |r(\cdot, t)|^2_{q+4+1/2,\Gamma} dt \le C(\alpha_0, T, K_*)(|r_0|_{q+2+1/2,\Gamma} + |\psi_4|_{q+1/2,\Gamma_T}).$$

Використовуючи аналогічні міркування, можна оцінити відповідні норми похідних r_t і r_{tt}. Таким чином, справджується оцінка

$$|r|_{q+4+1/2,\Gamma_T} \le \mathbb{C}_1(\alpha_0, T, K_*) \left(|r_0|_{q+2+1/2,\Gamma} + |\psi_4|_{q+1/2,\Gamma_T} \right). \tag{32}$$

Перейдемо до оцінок норм переміщень. Визначимо спочатку $u^{fb}(y,t)$, як вектор-функцію з коефіцієнтами Фур'є $\widehat{u}_k^{fb}(0,y_2,t)=\widehat{u}_k(0,y_2,t)$ і $\widehat{u}_k^{fb}(m,y_2,t)=\widehat{u}_k^{f}(m,y_2,t)+\widehat{u}_k^{b}(m,y_2,t)$ при $m\neq 0$, $k=1,2$. Має місце оцінка

$$|u^{fb}|_{q+5,\Omega_T}\leq \mathbb{C}_2(q,T)\mathcal{F}_{q,T}(f,\phi). \tag{33}$$

Розглянемо лише два типових інтеграла

$$I_1=m^4\int\limits_0^{h^0}\left(\int\limits_0^{\zeta}e^{|m|(z-\zeta)}\frac{f_{1,m}(z,t)}{|m|}dz\right)^2d\zeta,\qquad I_2=\int\limits_0^{h^0}\frac{(|m|(y_2-h^0))^2\mathrm{sh}^2(|m|y_2)}{|m|^2\mathrm{sh}^2(|m|h^0)}dy_2,$$

що виникають при оцінюванні членів, що відповідають $\widehat{u}_k^{f}(m,y_2,t)$ і $\widehat{u}_k^{b}(m,y_2,t)$, $m\neq 0$. Послідовно застосовуючи заміну $y_2=\zeta-z$, нерівності Мінковського та Гельдера, маємо

$$I_1\leq m^4\left[\int\limits_0^{h^0}\left\{\int\limits_{y_2}^{h^0}e^{-2|m|y_2}\frac{|f_{1,m}(x_2-y_2,t)|^2}{|m|^2}dx_2\right\}^{1/2}dy_2\right]^2\leq$$

$$\leq m^4\left[\int\limits_0^{h^0}\frac{e^{-|m|y_2}}{|m|}dy_2\right]^2\int\limits_0^{h^0}|f_{1,m}(z,t)|^2dz\leq C\int\limits_0^{h^0}|f_{1,m}(z,t)|^2dz.$$

Для другого інтеграла I_2 одержуємо ($z=|m|y_2$, $M=|m|h^0$)

$$I_2=\frac{1}{|m|^3}\int\limits_0^{M}\frac{(z-M)^2\mathrm{sh}^2z}{\mathrm{sh}^2M}dz=\frac{1}{|m|^3}\int\limits_0^{M}\frac{(z-M)^2e^{2z}(1-2e^{-2z}+e^{-4z})}{e^{2M}(1-2e^{-2M}+e^{-4M})}dz\leq$$

$$\leq\frac{C(h^0)}{|m|^3}\int\limits_0^{M}(z-M)^2e^{2(z-M)}dz\leq\frac{C(h^0)}{|m|^3}\int\limits_0^{\infty}\zeta^2e^{-2\zeta}dz.$$

З оцінок (32), (33) випливає, що

$$|r|_{q+4+1/2,\Gamma_T}\leq\mathbb{C}_3(\alpha_0,T,K_*)\left(|r_0|_{q+2+1/2,\Gamma}+\mathcal{F}_{q,T}(f,\phi)\right). \tag{34}$$

Визначимо далі вектор-функцію $u^r(y,t)$ з коефіцієнтами Фур'є $\widehat{u}_k^r(m,y_2,t)$ при $m\neq 0$ і $\widehat{u}_k^r(0,y_2,t)=0$, $k=1,2$. Аналогічно до (33) отримуємо нерівність

$$|u^r|_{q+5,\Omega_T}\leq\mathbb{C}_4(q,T)|r|_{q+4+1/2,\Gamma_T}. \tag{35}$$

Враховуючи (33) – (35), бачимо, що

$$|u|_{q+5,\Omega_T}+|r|_{q+4+1/2,\Gamma_T}\leq\mathbb{C}_5(\alpha_0,T,K_*)\left(|r_0|_{q+2+1/2,\Gamma}+\mathcal{F}_{q,T}(f,\phi)\right). \tag{36}$$

Нарешті, з рівняння $r_t=-\alpha_0\partial_1^4r+\alpha_1\partial_1^3u_1+\phi_4$ у (18) за допомогою (36) оцінимо норму $|r_t|_{q+1/2,\Gamma_T}$ і дістанемо нерівність (19).

Для доведення єдиності розв'язку задачі (18) використаємо наступні міркування. Нехай набір функцій $\rho \in P^{q+4+1/2}(\Gamma_T)$, $w \in P^{q+5}(\Omega_T)$ є нетривіальним розв'язком відповідної однорідної задачі з нульовою початковою умовою:

$$\sum_{j=1}^{2} \partial_j \sigma_{ij}(w) = 0, \qquad (x,t) \in Q_T, \quad i = 1,2,$$

$$\sigma_{12}(w) - \sigma_0 \partial_1 \rho = 0, \quad \sigma_{22}(w) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{37}$$

$$\sigma_{12}(w) = 0, \quad w_2 = 0, \qquad (x,t) \in \Sigma_T, \quad I[w_1](t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$\rho_t = -\alpha_0 \partial_1^4 \rho + \alpha_1 \partial_1^3 u_1, \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \quad \rho(y_1, 0) = 0. \tag{38}$$

Зокрема, з рівняння (38) видно, що коефіцієнти Фур'є $\widehat{\rho}(m,t)$, $\widehat{w}_1(m,0,t)$ задовольняють систему

$$\widehat{\rho}_t(m,1) = -\alpha_0 m^4 \widehat{\rho}(m,t) - \alpha_1 \sigma_0 i m^3 \widehat{w}_1(m,0,t), \ \rho_m(0) = 0, \ \ m \in Z. \tag{39}$$

На підставі нерівності Корна (16) можна стверджувати, що співвідношення (4) встановлюють взаємно однозначну відповідність між функціями ρ і w. Іншими словами коефіцієнти Фур'є функції w можна визначити за допомогою формул (29) і підставити в (39), причому одержана система

$$\widehat{\rho}_t(m,1) = -\mathcal{M}_m m^4 \widehat{\rho}(m,t), \qquad \rho_m(0) = 0, \quad m \in Z,$$

і система (39) є еквівалентними. Очевидно, що $\widehat{\rho}(m,t) = 0$ для всіх $m \in Z$ і $t \in (0,T)$. Звідси одержуємо, що $\rho \equiv 0$ і, як наслідок, $w \equiv 0$.

Теорему 2 доведено.

5. Існування нерухомої точки. Повернемося до задачі (17) (див. зауваження 4 в пункті 3), (9). Залишаючи в лівих частинах члени, лінійні відносно ϱ, u, записуємо її у вигляді

$$\begin{gathered}
\partial_j \sigma_{ij}(u) = f_i(\widetilde{\varrho}, u), \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad i = 1,2, \\
\sigma_{12}(u) - \sigma_0 \partial_1 \varrho = \phi_1(\widetilde{\varrho}, u), \qquad \sigma_{22}(u) = \phi_2(\widetilde{\varrho}, u), \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \\
\sigma_{12}(u) = \phi_3(\widetilde{\varrho}, u), \qquad u_2 = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T, \\
\varrho_t + \alpha_0 \partial_1^4 \varrho - \alpha_1 \sigma_0 \partial_1^3 u_1 = \phi_4(\widetilde{\varrho}, u), \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \\
I\,[u] = \phi(\widetilde{\varrho}, u), \qquad t \in (0,T), \\
\varrho(y_1, 0) = \varrho_0(y_1),
\end{gathered} \tag{40}$$

де

$$
\begin{gathered}
f_i(\widetilde{\varrho}, u) = \partial_j \sigma_{ij}(u) - J\widetilde{\partial}_j \vartheta_{ij}(u), \qquad i = 1,2, \\
\phi_i(\widetilde{\varrho}, u) = \sigma_{i2}(u) - \vartheta_{i2}(u) + \partial_1 \varrho \vartheta_{i1}(u), \qquad i = 1,2, \\
\phi_3(\widetilde{\varrho}, u) = \sigma_{12}(u) - \vartheta_{12}(u), \\
\phi_4(\widetilde{\varrho}, u) = \alpha_0 \partial_1^4 \varrho - \alpha_1 \sigma_0 \partial_1^3 u_1 - \\
-(1 + (\partial_1 \varrho)^2)^{1/2} \left(\alpha_0 \Delta_\Gamma^{(1)} \varkappa - \alpha_1 \sigma_0 \widetilde{\Delta}_\Gamma^{(2)} \widetilde{\partial}_1 u_1 - \alpha_1 \widetilde{\Delta}_\Gamma^{(2)} \widetilde{U} \right), \\
\phi(\widetilde{\varrho}, u) = I\left[u(1 - J) \right].
\end{gathered}
\tag{41}
$$

Нехай $\delta \in (0, \delta_*)$ (див. лему 3), $\delta_0 > 0$, $\varrho_0 \in P^{q+2+1/2}(\Gamma)$, $|\varrho_0|_{q+2+1/2,\Gamma} \le \delta_0$. Значення параметрів δ, δ_0 буде уточнюватися нижче. Розглянемо далі замкнену за нормою в $\mathcal{W}_{q,T}$ множину

$$
\mathcal{K}_\delta = \left\{ (\varrho, u) \colon \mathcal{N}_{q,T}(\varrho, u) \le \delta, \ \varrho|_{t=0} = \varrho_0 \right\}.
$$

Лема 8. *Нехай $\delta \ge 4\delta_0$, тоді множина $\mathcal{K}_\delta$ є непорожньою.*

Доведення. Розглянемо задачу Коші: знайти $\rho \in P^{q+4+1/2}(\Gamma_T)$ таку, що

$$
\partial_t \rho + \partial_{x_1}^4 \rho = 0, \qquad \rho(x_1, 0) = \varrho_0(x_1).
$$

Для коефіцієнтів Фур'є маємо співвідношення $\widehat{\rho}(m,t) = \exp(-m^4 t)\widehat{\varrho}_0(m)$. Нагадаємо, що h^0 вибрано таким чином, що $\widehat{\varrho}_0(0) = 0$. Одержуємо наступні нерівності:

$$
|\rho|^2_{q+4+1/2,\Gamma_T} = \sum_{i=0}^{2} \int_0^T |\partial_t^i \rho(\cdot, t)|_{q+4+1/2-4i,\Gamma} dt \le
$$

$$
\le \sum_{m \in Z} \sum_{i=0}^{2} (1+m^2)^{q+4+1/2-4i} m^{8i} \int_0^T |\exp(-2m^4 t) dt |\widehat{\varrho}_0(m)|^2 \le
$$

$$
\le \frac{1}{2} \sum_{m \in Z} \left((1+m^2)^{q+4+1/2} m^{-4} + 2(1+m^2)^{q+2+1/2} \right) |\widehat{\varrho}_0(m)|^2 \le 2|\varrho_0|^2_{q+2+1/2,\Gamma}.
$$

Аналогічно $|\rho_t|^2_{q+1/2,\Gamma_T} \le 2|\varrho_0|^2_{q+2+1/2,\Gamma}$.

Таким чином, якщо $\delta \ge 4\delta_0$, то множина $\mathcal{K}_\delta$ містить принаймні один елемент $(\rho, 0)$.

Лему доведено.

Позначимо $\mathcal{L}_i(u) = \sum_{j=1}^{2} \partial_j \sigma_{ij}(u)$,

$$
\mathcal{A}(\varrho, u) = [\mathcal{L}_1(\varrho, u), \mathcal{L}_2(\varrho, u), (\sigma_{12}(u) - \sigma_0 \partial_1 \varrho)|_\Gamma, \sigma_{22}(u)|_\Gamma, \sigma_{12}(u)|_\Sigma, u_2|_\Sigma,
$$

$$
(\varrho_t + \gamma_0 \partial_1^4 \varrho - \gamma_1 \partial_1^3 u_1)|_\Gamma, I\left[u\right], \varrho|_{t=0} \right],
$$

$$\mathcal{G}(\widetilde{\varrho},u)=[f_1(\widetilde{\varrho},u),f_2(\widetilde{\varrho},u),\phi_1(\widetilde{\varrho},u),\phi_2(\widetilde{\varrho},u),\phi_3(\widetilde{\varrho},u),0,\phi_4(\widetilde{\varrho},u),\phi(\widetilde{\varrho},u),0],$$

$$\mathcal{H}=[0,0,0,0,0,0,0,0,\varrho_0].$$

Отже, задача (40), (41) в операторній формі набирає вигляду $\mathcal{A}(r,u)=\mathcal{G}(\widetilde{\varrho},u)+\mathcal{H}$. Визначимо відображення $\mathcal{Y}$, яке ставить у відповідність елементу $(\varrho,u)\in\mathcal{K}_\delta$ розв'язок задачі $\mathcal{A}(r,v)=\mathcal{G}(\widetilde{\varrho},u)+\mathcal{H}$. Спочатку необхідно перевірити, що ми маємо можливість використати теорему 2. Із лем 4 – 6 видно, що задовольняються вимоги H_1 на регулярність правих частин, а з леми 7 випливає (див. формули (14), (15)), що буде виконано також умову узгодження H_2.

Покажемо, що існує достатньо мале значення параметра δ_0 таке, що для довільної початкової функції $\varrho_0\in P^{q+2+1/2}(\Gamma)$: $|\varrho_0|_{q+2+1/2,\Gamma}\le\delta_0$ можна вибрати $\delta\ge4\delta_0$ так, що оператор $\mathcal{Y}$ є оператором стиску і відображає множину $\mathcal{K}_\delta$ в себе.

На підставі лем 4 – 6 отримуємо наступний результат.

Лема 9. *Нехай δ належить $(0,\delta_*)$, тоді існують сталі C_8, C_9, які залежать від T, δ_*, такі, що для довільних елементів (ϱ,u), $(\varrho,u)\in\mathcal{K}_\delta$, виконуються нерівності*

$$\sum_{i=1}^{2}|f_i(\widetilde{\varrho},u)|_{q+3,\Omega_T}+\sum_{i=1}^{2}|\phi_i(\widetilde{\varrho},u)|_{q+3+1/2,\Gamma_T}+|\phi_3(\widetilde{\varrho},u)|_{q+3+1/2,\Sigma_T}+$$
$$+|\phi_4(\widetilde{\varrho},u)|_{q+1/2,\Gamma_T}+|\phi(\widetilde{\varrho},u)|_{H^2(0,T)}\le C_8(\mathcal{N}_{q,T}(\varrho,u))^2, \tag{42}$$

$$\sum_{i=1}^{2}|f_i(\widetilde{\varrho},u)-f_i(\widetilde{\varrho}',u')|_{q+3,\Omega_T}+\sum_{i=1}^{2}|\phi_i(\widetilde{\varrho},u)-\phi_i(\widetilde{\varrho}',u')|_{q+3+1/2,\Gamma_T}+$$
$$+|\phi_3(\widetilde{\varrho},u)-\phi_3(\widetilde{\varrho}',u')|_{q+3+1/2,\Sigma_T}+|\phi_4(\widetilde{\varrho},u)-\phi_4(\widetilde{\varrho}',u')|_{q+1/2,\Gamma_T}+$$
$$+|\phi(\widetilde{\varrho},u)-\phi(\widetilde{\varrho}',u')|_{H^2(0,T)}\le C_9\delta\mathcal{N}_{q,T}(\varrho-\varrho',u-u'). \tag{43}$$

Безпосередньо з оцінки (19) та леми 9 випливають нерівності

$$\mathcal{N}_{q,T}\left(\mathcal{Y}(\varrho,u)\right)\le C_{10}(T,\delta_*)\left((\mathcal{N}_{q,T}(\varrho,u))^2+|\varrho_0|_{q+2+1/2,\Gamma}\right), \tag{44}$$

$$\mathcal{N}_{q,T}\left(\mathcal{Y}(\varrho,u)-\mathcal{Y}(\varrho',u')\right)\le C_{11}(T,\delta_*)\delta\mathcal{N}_{q,T}(\varrho-\varrho',u-u'), \tag{45}$$

де $C_{10}=C_7C_8$, $C_{11}=C_7C_9$.

Отже, оператор $\mathcal{Y}$ є оператором стиску, якщо 1) $\delta\le\dfrac{1}{2C_{11}}$, і відображає множину $\mathcal{K}_\delta$ в себе, якщо $C_{10}(\delta^2+\delta_0)\le\delta$. Остання нерівність виконується, якщо, наприклад, маємо 2а) $\delta\le\dfrac{1}{4C_{10}}$ та 2б) $\delta_0\le\dfrac{\delta}{4C_{10}}$. За лемою 8 необхідно також, щоб 3) $\delta_0\le\delta/4$. Покажемо тепер, що сукупність умов 1, 2а, 2б, 3 є сумісною. Спочатку виберемо $\delta\in(0,\delta_*)$ за умовами 1 та 2а:

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{4C_{11}},\frac{1}{8C_{10}},\frac{\delta_*}{2}\right\},$$

а потім δ_0, що задовольняє умови 2б та 3:

$$\delta_0 = \frac{1}{8\max\{C_{10}, 1\}} \min\left\{\frac{1}{4C_{11}}, \frac{1}{8C_{10}}, \frac{\delta_*}{2}\right\}.$$

Після зазначеного вибору параметрів δ_0, δ теорема 1 випливає з принципу стисливих відображень (див., наприклад, [14, с. 390]).

1. *Yang F.* Stress-induced instability of an elastic layer // Mech. Mater. – 2006. – **38**. – P. 111 – 118.
2. *Tekalign W. T., Spencer B. J.* Evolution equation for a thi epitaxial film on a deformable substrate // J. Appl. Phys. – 2004. – **96**. – P. 5505 – 5512.
3. *Barett J. W., Garcke H., Nürnberg R.* Finite element approximation of a phase field for surface diffusion of a voids in a stresed solid // Math. Comput. – 2005. – **75**. – P. 7 – 41.
4. *Базалий Б. В.* Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 10. – С. 1299 – 1315.
5. *Фролова Е. В.* Квазистационарное приближение для задачи Стефана // Проблемы мат. анализа.– 2005. – **31**. – С. 167 – 179.
6. *Antontsev S. N., Gonçalves C. R., Meirmanov A. M.* Exact estimates for the classical solutions to the free boundary problem in the Hele – Shaw cell // Adv. Different. Equat.– 2003. – **8**. – P. 1259 – 1280.
7. *Friedman A., Reitich F.* Nonlinear stability of a quasi-static Stefan problem with surface tension: a continuation approach // Ann. Scuola norm. Pisa. – 2001. – **30**. – P. 341 – 403.
8. *Friedman A., Reitich F.* Quasi-static motion of a capillary drop. I. The two-dimensional case // J. Different. Equat. – 2002. – **178**. – P. 212 – 263.
9. *Günter M., Prokert G.* A justification for the thin film approximation of Stokes flow with surface tension // J. Different. Equat.. – 2008. – **245**. – P. 2802 – 2845.
10. *Bum Ja Jin.* Estimates of the solutions of the elastic system in a moving domain with free upper interface // Nonlinear Anal. – 2002. – **51**. – P. 1009 – 1029.
11. *Бокало М. М., Дмитришин Ю. Б.* Нелінійна динамічна крайова задач без початкової умови для квазілінійних еліптичних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2007. – **17**. – P. 1 – 19.
12. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 311 с.
13. *Beale T.* Large-time regularity of viscous surface waves // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1984. – **84**. – P. 304 – 352.
14. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

Одержано 22.09.11,
після доопрацювання — 04.01.13