1983 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 35, № 3

УДК 517.9

Ха Тьен Нгоан

Одно необходимое условие гипоэллиптичности для уравнений второго порядка со знакопеременной характеристической формой

1. Введение. Пусть в области $\Omega \subset R^m$ рассматривается дифференциальный оператор второго порядка

$$L(u) \equiv \sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{kj}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ предполагаются вещественными бесконечно дифференцируемыми функциями. Напомним, что оператор (1) называется гипоэллиптическим в области Ω, если для любой ее подобласти $\omega \subset \subset \Omega$ из $u \in D'(\Omega)$, $L(u) \in C^\infty(\omega)$, следует $u \in C^\infty(\omega)$.

При изучении условий гипоэллиптичности интересно получить для нее необходимые условия. В работе [1] для оператора (1) получено первое необходимое условие гипоэллиптичности. Это условие состоит в том, что при любой фиксированной $x \in \Omega$ характеристическая форма $\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j$ должна быть знакоопределенной, т. е. $\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \geqslant 0$, либо $\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \leqslant 0$ при любом $\xi \in R^m$. Для некоторых классов операторов с неотрицательной характеристической формой другие дальнейшие необходимые условия получены и в указанной выше работе [1] и в обзорной статье [2].

В настоящей работе рассматриваются операторы, характеристическая форма которых меняет знак при изменении x. Предполагаем, что область Ω разбита на две подобласти Ω_+ и Ω_-, т. е.

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Gamma, \tag{2}$$

где Γ — общая граница областей Ω_+, Ω_-, и задается уравнением

$$F(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

где $F \in C^\infty$ и $\operatorname{grad} F(x) \neq 0$ всюду на Γ, при этом

$$F(x) > 0 \text{ в } \Omega_+, \tag{4}$$

$$F(x) < 0 \text{ в } \Omega_-. \tag{5}$$

Мы предполагаем, что характеристическая форма $\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}(x)\zeta_k\xi_j$ знакоопределена в каждой из Ω_+ и Ω_-, т. е.

$$\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \geqslant 0 \text{ в } \Omega_+, \tag{6}$$

$$\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \leqslant 0 \text{ в } \Omega_- \tag{7}$$

для любого $\xi \in R^m$.

Для исследования гипоэллиптичности оператора (1) введем функции

$$B(x) \equiv \sum_{j=1}^{m} b_j(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_j}, \tag{8}$$

$$A(x) \equiv \sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial a_{kj}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial F(x)}{\partial x_k}. \tag{9}$$

Очевидно, что обе функции $B(x)$ и $A(x)$ принадлежат классу C^∞. Основным результатом данной работы является следующая теорема о необходимом условии для гипоэллиптичности оператора (1).

Теорема 1. *Пусть область* Ω *удовлетворяет условиям* (2), (3), (4), (5), *а для коэффициентов оператора* (1) *выполнены условия* (6), (7).

Тогда для гипоэллиптичности оператора (1) *в области* Ω *необходимо выполнение следующего условия: если в точке* $x^\circ \in \Gamma$ *имеет место*

$$\sum_{j=1}^{m} |b_j(x^0)| > 0, \tag{10}$$

то в этой точке выполняется неравенство

$$B(x^0) \geqslant A(x^0), \tag{11}$$

где функции $B(x)$, $A(x)$ *определяются равенствами* (8) *и* (9).

Модельным оператором наших исследований является оператор Канная

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{12}$$

рассмотренный в [4]. Приведенное ниже доказательство теоремы 1— дальнейшее развитие идеи, использованной при весьма простом методе доказательства негипоэллиптичности оператора (12) в [4].

2. Некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть область* Ω *удовлетворяет условиям* (2), (3), (4), (5).

Тогда в каждой точке $x \in \Gamma$ *вектор* grad $F(x)$ *будет иметь направление внутренней нормали области* Ω_+.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $x \in \Gamma$, то для достаточно малых $t > 0$ все точки $x + t\,\mathrm{grad}\,F(x)$ принадлежат области Ω_+. Имеем по формуле Тейлора $F(x + t\,\mathrm{grad}\,F(x)) = t\,|\mathrm{grad}\,F(x)|^2 + O(t^2)$, так как $F(x) = 0$ при $x \in \Gamma$. Отсюда при достаточно малых $t > 0$ имеем $F(x + t\,\mathrm{grad}\,F(x)) > 0$, что означает в силу (4) принадлежность точек $x + t\,\mathrm{grad}\,F(x)$ к области Ω_+.

Приведем некоторые необходимые факты теории первой краевой задачи для уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой из [3].

Пусть $G \subset R^m$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial G = \Sigma$. Рассмотрим в G уравнение второго порядка

$$M(v) \equiv \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{kj}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \gamma(x) v = f. \tag{13}$$

Предполагается, что всюду в $G \cup \Sigma$ выполняется условие

$$\sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{kj}(x) \xi_k \xi_j \geqslant 0, \quad \xi \in R^m. \tag{14}$$

Через $\bar{n}(x) = (n_1(x), \ldots, n_m(x))$ обозначим вектор внутренней нормали в точке x к границе Σ области G. Пусть Σ^0 — множество точек $x \in \Sigma$, где

$\sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{kj}(x)\, n_k(x)\, n_j(x) = 0$. В точках Σ^0 рассмотрим функцию

$$\beta(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} \left(\beta_k(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{kj}(x)}{\partial x_j} \right) n_k(x), \tag{15}$$

которая называется функцией Фикеры для уравнения (13) относительно области G. Обозначим через Σ_0, Σ_1, Σ_2 подмножества точек множества Σ^0, где соответственно $\beta(x) = 0$, $\beta(x) > 0$, $\beta(x) < 0$. Множество $\Sigma \setminus \Sigma^0$ обозначим через Σ_3.

Первая краевая задача для уравнения (13) состоит в следующем: найти функцию $v(x)$ в $G \cup \Sigma$ такую, что

$$M(v) = f \text{ в } G, \tag{16}$$

$$v = g \text{ на } \Sigma_2 \cup \Sigma_3, \tag{17}$$

где f и g — заданные функции соответственно в G и на $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Формально сопряженный с M оператор M^* имеет вид

$$M^*(w) = \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{kj}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^*(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} + \gamma^*(x)\, w, \tag{18}$$

где

$$\beta_j^*(x) = 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{kj}(x)}{\partial x_k} - \beta_j(x), \tag{19}$$

$$\gamma^*(x) = \sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \alpha_{kj}(x)}{\partial x_k \partial x_j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \beta_j(x)}{\partial x_j} + \gamma(x). \tag{20}$$

Для функций $v(x)$ и $w(x)$ из $C^{(2)}(G \cup \Sigma)$ имеет место формула Грина

$$\int_G \{M(v)\, w - M^*(w)\, v\}\, dx = \int_{\Sigma_3} \left(w \frac{\partial v}{\partial \bar{\nu}} - v \frac{\partial w}{\partial \bar{\nu}} \right) d\sigma - \int_{\Sigma} \beta v w\, d\sigma, \tag{21}$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} \equiv \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{kj} n_j \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\beta(x)$ — функция Фикеры, определенная равенством (15).

Через V обозначаем класс функций из $C^{(2)}(G \cup \Sigma)$ таких, что $v = 0$ на $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$. Обобщенным решением задачи (16), (17) будем называть любую функцию $v(x)$ из $\mathscr{L}_p(G)$ такую, что для любой функции $w(x)$ из V выполняется интегральное тождество

$$\int_G v M^*(w)\, dx = \int_G f v\, dx - \int_{\Sigma_3} g \frac{\partial w}{\partial \bar{\nu}}\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} \beta g w\, d\sigma. \tag{22}$$

В частности, функция $v(x) \in \mathscr{L}_p(G)$ — обобщенное решение задачи

$$M(v) = f \text{ в } G, \tag{23}$$

$$v = 0 \text{ на } \Sigma_2 \cup \Sigma_3, \tag{24}$$

если для любой $w(x) \in V$ выполняется тождество

$$\int_G v M^*(w)\, dx = \int_G f w\, dx. \tag{25}$$

Из теории первой краевой задачи, изложенной в [3], вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что для оператора M вида* (13) *с неотрицательной характеристической формой* (14) *существует функция* $\psi(x)$ *из* $C^2(G \cup \Sigma)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\psi(x) \leqslant 0 \text{ в } G \cup \Sigma, \tag{26}$$

$$M(\psi) + (q-1)\gamma^*\psi > 0 \text{ в } G \cup \Sigma, \tag{27}$$

где $\gamma^*(x)$ *определяется равенством* (20), $q > 1$. *Тогда при любой* $f(x) \in \mathcal{L}_p(G)$ *задача* (23), (24) *будет разрешимой в пространстве* $\mathcal{L}_p(G)$, *где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ниже нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть M — любой оператор второго порядка вида* (13), *не обязательно обладающий неотрицательной характеристической формой* (14). *Пусть в некоторой точке* $x^\circ = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in G$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^{m} |\beta_j(x^0)| > 0. \tag{28}$$

Тогда будет существовать достаточно малая окрестность ω *точки* x^0 *в* G *и функция* $\psi(x) \in C^{(2)}(\overline{\omega})$ *такие, что*

$$\psi(x) \leqslant 0 \text{ в } \overline{\omega}, \tag{29}$$

$$M(\psi) + (q-1)\gamma^*\psi > 0 \text{ в } \overline{\omega}. \tag{30}$$

Доказательство. Из условия (28) следует, что существует ненулевой вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{m} \xi_j \beta_j(x^0) > 0. \tag{31}$$

Положим $\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j (x_j - x_j^0) - \varepsilon$, *где* ε — некоторое положительное число, которое будет выбрано позже. Так как $\psi(x)$ — линейная функция, то

$$M(\psi) + (q-1)\gamma^*\psi = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \beta_j(x) + [\gamma(x) - (q-1)\gamma^*(x)] \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{m} \xi_j (x_j - x_j^0) - \varepsilon[\gamma(x) - (q-1)\gamma^*(x)]. \tag{32}$$

Так как $\beta_j(x)$, $\gamma(x)$, $\gamma^*(x)$ непрерывны в G, то из (31), (32) вытекает, что существует достаточно малая окрестность ω точки x^0 и достаточно малое положительное число ε такие, что в $\overline{\omega}$ будут выполнены (29), (30). Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Итак, пусть оператор L вида (1) гипоэллиптический в области Ω, причем в точке $x^0 \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} |b_j(x^0)| > 0. \tag{10'}$$

Допустим противное, что условие (11) не выполняется. Это означает, что в этой точке имеет место неравенство

$$B(x^0) - A(x^0) < 0. \tag{33}$$

Мы придем к противоречию, если найдем достаточно малую окрестность $\omega \subset \Omega$ точки x^0, для которой ограничение некоторого решения $u(x)$ однородного уравнения $L(u) = 0$ в ω на поверхности $\Gamma \cap \omega$ не принадлежит классу $C^\infty(\Gamma \cap \omega)$. Действительно, если это так, то $u(x)$ не может принадлежать $C^\infty(\omega)$, так как в противном случае ограничение $u(x)|_{\Gamma\cap\omega}$ принадлежало бы $C^\infty(\Gamma \cap \omega)$.

Из (10'), (33) и в силу доказанной выше леммы 2, примененной к операторам L и $(-L)$, можем найти достаточно малый шар ω в Ω с центром в точке x^0 и функции $\psi_+(x) \in C^{2}(\overline{\omega})$, $\psi_-(x) \in C^{(2)}(\overline{\omega})$ такие, что для них будут выполняться условия

$$\psi_+(x) \leqslant 0, \quad L(\psi_+) + c^*\psi_+ > 0 \text{ в } \overline{\omega}, \tag{34}$$

$$\psi_-(x) \leqslant 0, \quad (-L)(\psi_-) + (-c^*)\psi_- > 0 \text{ в } \overline{\omega}, \tag{35}$$

$$B(x) - A(x) < 0 \text{ в } \overline{\omega}. \tag{36}$$

Пусть $\omega_+ = \omega \cap \Omega_+$, $\omega_- = \omega \cap \Omega_-$, $\gamma = \Gamma \cap \omega$. Заметим, что в силу условий (6), (7) операторы L и $(-L)$ имеют неотрицательную характеристическую форму соответственно в областях ω_+ и ω_-. Пусть $b_+(x)$ (соответственно $b_-(x)$) — функция Фикеры оператора L (соответственно оператора $(-L)$) относительно области ω_+ (соответственно относительно области ω_-). Пусть имеем разбиение

$$\partial\omega_+ = \Sigma_0^+ \cup \Sigma_1^+ \cup \Sigma_2^+ \cup \Sigma_3^+, \tag{37}$$

$$\partial\omega_- = \Sigma_0^- \cup \Sigma_1^- \cup \Sigma_2^- \cup \Sigma_3^-. \tag{38}$$

Из (6), (7) следует, что характеристическая форма $\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j$ тождественно обращается в нуль при $x \in \Gamma$ и при всех $\xi \in R^m$. Это означает в частности, что

$$\gamma \subset (\partial\omega_+ \setminus \Sigma_3^+) \cap (\partial\omega_- \setminus \Sigma_3^-). \tag{39}$$

Так как на γ внутренние нормали относительно областей ω_+ и ω_- имеют противоположные направления, а коэффициенты операторов L и $(-L)$ — противоположные знаки, то из леммы 1, соотношений (15), (8), (9) получаем, что

$$b_+(x) = b_-(x) = \frac{B(x) - A(x)}{|\operatorname{grad} F(x)|}, \quad x \in \gamma. \tag{40}$$

Отсюда и из (35), (39) вытекает, что

$$\gamma \subset \Sigma_2^+ \cap \Sigma_2^-. \tag{41}$$

Фиксируем некоторую функцию $g(x) \in C^{(2)}(\Omega)$ такую, что ее ограничение на поверхности Γ следующее:

$$\psi \equiv g|_\Gamma \in C^{(2)}(\Gamma) \setminus C^\infty(\Gamma). \tag{42}$$

Лемма 3. *Краевая задача*

$$L(u_+) = 0 \text{ в } \omega_+, \tag{43}$$

$$u_+|_\gamma = \psi \tag{44}$$

всегда имеет по крайней мере одно обобщенное решение $u_+(x)$ *из* $\mathscr{L}_2(\omega_+)$, *которое удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_{\omega_+} u_+(x)\, L^*(\varphi)\, dx = \int_{\gamma} b_+ \psi\varphi\, d\sigma, \tag{45}$$

где $d\sigma$ — *элемент площади поверхности* γ, $\varphi(x)$ — *любая функция из* $C_0^\infty(\omega)$.

Доказательство. Положим $f = -L(g)$. Так как $g \in C^{(2)}(\Omega)$, то $f \in \mathcal{L}_2(\omega_+)$. Рассмотрим краевую задачу

$$L(w_+) = f \text{ в } \omega_+, \tag{46}$$

$$w_+ |_{\Sigma_2^+ \cup \Sigma_3^+} = 0. \tag{47}$$

В силу (34) и упомянутой выше теоремы 2 вытекает, что краевая задача (46), (47) имеет обобщенное решение $w_+(x)$ из $\mathcal{L}_2(\omega_+)$, для которого выполняется тождество

$$\int_{\omega_+} w_+ L^*(w)\,dx = \int_{\omega_+} fw\,dx, \tag{48}$$

для любой функции $w(x) \in C^{(2)}(\bar{\omega}_+)$, $w|_{\Sigma_1^+ \cup \Sigma_3^+} = 0$.

Покажем, что функция $u_+(x) = w_+(x) + g(x)$ — решение задачи (43), (44). Действительно, из (48) имеем

$$\int_{\omega_+} (u_+(x) - g(x))\, L^*(w)\,dx = \int_{\omega_+} fw\,dx. \tag{49}$$

Из формулы Грина (21) вытекает, что

$$\int_{\omega_+} gL^*(w)\,dx = \int_{\omega_+} L(g)\,w\,dx + \int_{\Sigma_2^+} b_+ gw\,d\sigma - \int_{\Sigma_3^+} g\,\frac{\partial w}{\partial \bar{\nu}}\,d\sigma. \tag{50}$$

Принимая во внимание, что $f = -L(g)$, из (48), (49) получаем

$$\int_{\omega_+} u_+ L^*(w)\,dx = \int_{\Sigma_2^+} b_+ gw\,d\sigma - \int_{\Sigma_3^+} g\,\frac{\partial w}{\partial \bar{\nu}}\,d\sigma. \tag{51}$$

Положим в (51) $w(x) = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — любая функция из $C_0^\infty(\omega)$. Так как $\gamma \subset \Sigma_2^+$ и $\varphi(x)$ тождественно обращается в нуль в некоторой окрестности множества $\partial\omega_+ \setminus \gamma$, то из (51), (42) получаем доказываемое тождество (45). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть ψ — такая же функция, что и в (42) и (44). Тогда краевая задача*

$$L(u_-) = 0 \text{ в } \omega_-, \tag{52}$$

$$u_-|_\gamma = \psi \tag{53}$$

будет иметь по крайней мере одно обобщенное решение $u_-(x)$ из $\mathcal{L}_2(\omega_-)$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_{\omega_-} u_-(x)\, L^*(\varphi)\,dx = -\int_\gamma b_- \psi\varphi\,d\sigma, \tag{54}$$

где, как и в лемме 3, $d\sigma$ — элемент площади поверхности γ, $\varphi(x)$ — любая функция из $C_0^\infty(\omega)$.

Доказательство. Функция $u_-(x)$ — решение задачи (52), (53) тогда и только тогда, когда она — решение краевой задачи

$$(-L)(u_-) = 0 \text{ в } \omega_-, \tag{52'}$$

$$u_-|_\gamma = \psi. \tag{53'}$$

Задача (52′), (53′) имеет полную аналогию с рассматриваемой выше задачей (43), (44) в лемме 3. Тогда из утверждения леммы 3 получим, что задача (52′), (53′) имеет по крайней мере одно обобщенное решение $u_-(x)$ из $\mathcal{L}_2(\omega_-)$, для которого выполняется тождество

$$\int_{\omega_-} u_-(x)\,(-L)^*(\varphi)\,dx = \int_\gamma b_- \psi\varphi\,d\sigma \tag{55}$$

для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\omega)$. Из (61) получаем (54). Лемма 4 доказана.

Вместе с замечанием, сделанным после предположения (33), доказательство теоремы 1 завершим с помощью следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть* $u_+(x)$, $u_-(x)$ — *обобщенные решения задачи* (43), (44) *и* (52), (53), *соответственно принадлежащие* $\mathscr{L}_2(\omega_+)$ *и* $\mathscr{L}_2(\omega_-)$. *Определим функцию* $u(x)$ *в* ω *следующим образом*:

$$u(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in \omega_+, \\ \psi(x), & x \in \gamma, \\ u_-(x), & x \in \omega_-. \end{cases} \tag{56}$$

Тогда $u(x)$ *будет обобщенным решением однородного уравнения* $L(u)=0$ *в* ω.

Доказательство. Очевидно, что $u(x) \in \mathscr{L}_2(\omega)$. Достаточно показать, что для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\omega)$ имеет место

$$\int\limits_\omega uL^*(\varphi)\,dx = 0.$$

Действительно, в силу (56), (45), (54) и (40) имеем

$$\int\limits_\omega uL^*(\varphi)\,dx = \int\limits_{\omega_+} uL^*(\varphi)\,dx + \int\limits_{\omega_-} uL^*(\varphi)\,dx = \int\limits_{\omega_+} u_+L^*(\varphi)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\omega_-} u_-L^*(\varphi)\,dx = \int\limits_\gamma (b_+ - b_-)\,\psi\varphi d\sigma = 0.$$

Лемма 5 доказана. Теорема 1 доказана полностью.

4. Некоторые следствия и примеры. Из основной теоремы 1 непосредственно получаем следствие.

Следствие 1. *Пусть выполняются все предположения теоремы* 1. *Тогда для гипоэллиптичности оператора* (1) *необходимо выполнение следующего условия: если для некоторой точки* $x^0 \in \Gamma$ *имеет место*

$$B(x^0) < A(x^0), \tag{57}$$

то существует достаточно малая окрестность ω *точки* x^0 *в* Ω *такая, что* $B(x)$ *тождественно обращается в нуль вместе со всеми коэффициентами* $b_j(x)$ *на* $\Gamma \cap \omega$.

Доказательство. Из (57) и из непрерывности функций $B(x)$, $A(x)$ вытекает, что существует достаточно малая окрестность ω точки x^0 в Ω, для которой

$$B(x) < A(x), \quad x \in \Gamma \cap \omega. \tag{58}$$

Утверждаем, что тогда

$$\sum_{j=1}^m |b_j(x)| = 0, \quad x \in \Gamma \cap \omega. \tag{59}$$

Действительно, допустим, что в некоторой точке $x^1 \in \Gamma \cap \omega$ имеет место

$$\sum_{j=1}^m |b_j(x^1)| > 0. \tag{60}$$

Тогда из (60) и из доказанной теоремы 1 будет следовать, что в точке x^1 имеет место

$$B(x^1) \geqslant A(x^1). \tag{61}$$

Противоречие между (61) и (58) доказывает справедливость (66), вместе с ним и утверждение следствия.

Пример 1. Пусть область Ω и функция $F(x)$ удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (5). Пусть $A_{kj}(x)$ — функции класса $C^\infty(\Omega)$, причем форма $\sum\limits_{k,j=1}^m A_{kj}(x)\,\xi_k\xi_j$ — неотрицательная при $x \in \Omega$. Тогда если положим

$$a_{kj}(x) = F(x)\,A_{kj}(x), \tag{62}$$

то условия (6), (7) автоматически будут выполняться. В этом случае имеет место следующая лемма.

Л е м м а 6. *Пусть* $A(x)$ — *функция, определяемая соотношением* (9), *где* $a_{kj}(x)$ *имеют представления* (62). *Тогда всюду на* Γ

$$A(x) \geqslant 0, \quad x \in \Gamma. \tag{63}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (62) имеем

$$\frac{\partial a_{kj}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} A_{kj}(x) + F(x) \frac{\partial A_{kj}(x)}{\partial x_j}.$$

Тогда

$$A(x) = \sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial a_{kj}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} = \sum_{k,j=1}^{m} A_{kj}(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} + $$

$$+ F(x) \sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial A_{kj}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial F(x)}{\partial x_k}.$$

Утверждение леммы 6 легко вытекает из неотрицательной определенности формы $\sum_{k,j=1}^{m} A_{kj}(x)\,\xi_k \xi_j$ и из того, что $F(x)$ обращается в нуль на Γ.

С л е д с т в и е 2. *Пусть область* Ω *и функция* $F(x)$ *удовлетворяют условиям* (2)—(5), *а коэффициенты* $a_{kj}(x)$ *имеют вид* (62). *Тогда для гипоэллиптичности оператора* (1) *необходимо выполнение следующих условий:* (1) $B(x) \geqslant 0$, $x \in \Gamma$; 2) *в точках* $x \in \Gamma$, *где* $B(x) = 0$, *но* $\sum_{j=1}^{m} |b_j(x)| > 0$, *функция* $A(x)$ *должна обращаться в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем первое утверждение. Допустим противное, что в некоторой точке $x^0 \in \Gamma$ имеет место

$$B(x^0) < 0. \tag{64}$$

Из (64) и (8) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{m} |b_j(x^0)| > 0, \tag{65}$$

так как в противном случае имели бы $B(x^0) = 0$.

Согласно доказанной теореме 1, из (65) получаем, что $B(x^0) \geqslant A(x^0)$. С другой стороны, мы знаем из леммы 6, что $A(x^0) \geqslant 0$. Отсюда

$$B(x^0) \geqslant 0. \tag{66}$$

Противоречие между (66) и (64) доказывает справедливость первого утверждения.

Докажем второе утверждение. Пусть в точке $x^0 \in \Gamma$

$$B(x^0) = 0, \text{ но } \sum_{j=1}^{m} |b_j(x^0)| > 0. \tag{67}$$

Из (67) и из теоремы 1 получаем

$$B(x^0) \geqslant A(x^0). \tag{68}$$

Но из доказанной выше леммы 6 следует, что

$$A(x^0) \geqslant 0. \tag{69}$$

Тогда доказываемое утверждение можно вывести из (67), (68), (69).

П р и м е р 2. Рассмотрим оператор

$$L(u) = x_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + a \frac{\partial u}{\partial x_1} + b \frac{\partial u}{\partial x_2} + cu, \tag{70}$$

где a, b, c — постоянные.

Имеем $F(x) = x_1$, $B(x) = a$, $A(x) = 1$. Из теоремы 1 следует, что оператор (70) будет негипоэллиптическим в любой области, имеющей общие точки с осью ox_2, в каждом из следующих случаев: 1) $a < 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $0 < a < 1$.

Пример 3. Рассмотрим оператор

$$L(u) = \frac{1}{2}(|x|^2 - r^2)\Delta u + b(x)\sum_{j=1}^{m} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu, \tag{71}$$

где $b(x)$ — некоторая функция класса C^∞.

Имеем $F(x) = \frac{1}{2}(|x|^2 - r^2)$, $B(x) = b(x)|x|^2$, $A(x) = |x|^2$. Поэтому из теоремы 1 получаем, что оператор (71) будет негипоэллиптическим в любой области, имеющей непустое пересечение с окружностью $\{|x| = r\}$, если на этом пересечении функция $b(x)$ принимает минимальное значение, меньшее 1.

1. *Хермандер Л.* Гипоэллиптические дифференциальные уравнения второго порядка.— Математика, 1968, 12, № 2, с. 88—109.
2. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* О локальной гладкости обобщенных решений и гипоэллиптичности дифференциальных уравнений второго порядка.— Успехи мат. наук, 1971, 26, № 2, с. 265—281.
3. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.— Итоги науки. Мат. анализ, М.: Наука, 1971.— 252 с.
4. *Nagel A., Stein E. M.* Lectures on pseudo-differential operators: Regularity theorems and applications to non-elliptic problems.— New Jersey. 1979.— 159 p.

Ханойский математический Институт

Поступила в редакцию 26.02.82