УДК 517.956

Д. В. Капанадзе (Тбилис. ун-т, Грузия)

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta^n v = 0$

We prove the uniqueness of solution of the problem with directional derivative for the equation $\Delta^n v = 0$.

Доводиться єдиність розв'язку задачі з похилою похідною для рівняння $\Delta^n v = 0$.

Эллиптические задачи рассматривались в работах [1 – 3], а задача с наклонной производной — в [4 – 8]. Известно, что если направление дифференцирования хотя бы в одной точке касается границы области, то задача с наклонной производной перестает быть не только фредгольмовой, но даже нетеровой. Она либо не разрешима нормально, либо ее индекс бесконечен, либо одновременно имеет место и то, и другое.

В настоящей статье рассматривается вопрос о единственности решения задачи с наклонной производной для уравнения $\Delta^n v = 0$. Для простоты изложения будем рассматривать трехмерное пространство R^3 (Δ — оператор Лапласа).

Введем некоторые обозначения. Объемные потенциалы и потенциалы простого слоя обозначим следующим образом [9]:

$$V^{\mu}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\mu(y)\,dy}{|x-y|},$$

$$U^{\psi}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\psi(y)\,dSy}{|x-y|},$$

где $\partial\Omega$ — граница области $\Omega \in C^{(2,\alpha)}$, $\mu \in L_1(\Omega)$, $\psi \in L_1(\partial\Omega)$. Если G — функция Грина задачи Дирихле для области Ω, то решение задачи Дирихле в области Ω имеет вид

$$v(x) = -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\,dSy, \qquad x \in \Omega, \qquad \varphi \in C(\partial\Omega).$$

Здесь ν — внешняя нормаль в точке $y \in \partial\Omega$,

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|x-y|} - U^{\varepsilon'_x}(y)\right]$$

— функция Грина в области Ω для задачи Дирихле, $U^{\varepsilon'_x}(y)$ — потенциал простого слоя, ε'_x — плотность выметанной [9, с. 255] меры Дирака ε_x из Ω на $\partial\Omega$. Через l_x, $x \in \partial\Omega$, обозначим гладкое направление в точке $x \in \partial\Omega$, $l_x \in C^{(3,\alpha)}$, $|l| = 1$. Плотность выметанной меры для объемной плотности $\mu \in C(\overline{\Omega})$ определим следующим образом:

$$T\mu(y) = \mu'(y) = -\int_{\Omega}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\mu(x)\,dx.$$

Известно, что справедливо равенство [9, с. 260]

$$V^{\mu}(x) = U^{\mu'}(x), \qquad x \in R^3 - \overline{\Omega}.$$

Через E обозначим множество точек

$$E = \left\{ x \colon \cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right) = 0,\ \ x \in \partial\Omega \right\},$$

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|}$$

— ядро Ньютона. Символ $\varnothing$ обозначает пустое множество.

В дальнейшем понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Для функции Грина задачи Дирихле справедливо равенство*

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial l_y} = \cos\left(\widehat{\nu_y l_y}\right) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y}, \qquad x \in \Omega, \qquad y \in \partial\Omega - E.$$

Доказательство. Рассмотрим потенциал (потенциал Грина)

$$W(x) = -\int\limits_{\Omega} G(x, y) f(y)\, dy, \qquad f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

Ясно, что

$$\frac{\partial W(x)}{\partial l_x} = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial l_x} f(y)\, dy, \qquad x \in \partial\Omega.$$

С другой стороны,

$$W(x) = -\int\limits_{\Omega} G(x, y) f(y)\, dy = -\int\limits_{\Omega} \Gamma(x, y) f(y)\, dy + \int\limits_{\partial\Omega} \Gamma(x, y) f'(y)\, dSy.$$

Известно, что

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma(x, y) f(y)\, dy = \int\limits_{\partial\Omega} \Gamma(x, y) f'(y)\, dSy, \qquad x \in R^3 - \overline{\Omega}.$$

Кроме того, если $\cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right) \neq 0$, $x \in \partial\Omega$, то для потенциала простого слоя

$$U^{\Psi}(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \Gamma(x, y) \Psi(y)\, dSy, \qquad \Psi \in C^1(\partial\Omega),$$

справедливо равенство (предел изнутри и извне)

$$\frac{\partial U_i^{\Psi}(x)}{\partial l_x} = \frac{1}{2} \Psi(x) \cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial l_x} \Psi(y)\, dSy.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial U_e^{\Psi}(x)}{\partial l_x} = -\frac{1}{2} \Psi(x) \cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial l_x} \Psi(y)\, dSy.$$

Кроме того, очевидно, что

$$0 = \frac{\partial W_e(x)}{\partial l_x} =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial l_x} f(y)\, dy - \frac{1}{2} f'(x) \cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial l_x} f'(y)\, dSy,$$

$$\frac{\partial W_i(x)}{\partial l_x} = -\int_{\Omega} \frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial l_x} f(y)dy + \frac{1}{2} f'(x)\cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial l_x} f'(y)dSy.$$

Из разности

$$\frac{\partial W_i(x)}{\partial l_x} - \frac{\partial W_e(x)}{\partial l_x} = -\int_{\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial l_x} f(y)dy$$

получаем

$$\int_{\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial l_x} f(y)dy = f'(x)\cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right), \quad f' = Tf.$$

Следовательно,

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial l_x} f(y)dy = -\cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right)\int_{\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial l_x} f(y)dy.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial l_x} = \cos\left(\widehat{\nu_x l_x}\right)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_x}, \quad x \in \partial\Omega - E, \quad y \in \Omega.$$

Известно следующее утверждение задачи с наклонной производной для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$.

Теорема (Ж. Булиган)**.** *Пусть* v *— гармоническая функция из пространства* $C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \in C^{(2,\alpha)}$. *Если* $v(x) = 0$, $x \in E$, *и*

$$\frac{\partial v(y)}{\partial l_y} = 0, \quad y \in \partial\Omega,$$

то $v(x) = 0$, $x \in \Omega$.

В этой статье устанавливается теорема Ж. Булигана для уравнения $\Delta^n v = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* Ω *— ограниченная область из класса* $C^{(4,\alpha)}$, v *— решение уравнения* $\Delta^3 v = 0$ *из пространства* $C^{(4,\alpha)}(\overline{\Omega})$, $l_x \in C^{(3,\alpha)}$. *Пусть, далее,* $v(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, $\Delta v(x) = \Delta^2 v(x) = 0$, $x \in E$. *Если*

$$\frac{\partial v(x)}{\partial l_x} = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial l_x^2} = 0, \quad x \in \partial\Omega - E,$$

то $v(x) = 0$, $x \in \overline{\Omega}$.

Доказательство. Для решения уравнения $\Delta^3 v = 0$, $v \in C^{(4,\alpha)}(\overline{\Omega})$, справедливо следующее представление:

$$v(x) = H_0(x) - \int_{\Omega} G(x,y)H_1(y)dy + \int_{\Omega} G(x,y)\int_{\Omega} G(y,z)H_2(z)dzdy, \quad x \in \Omega,$$

где H_0, H_1, H_2 — гармонические функции, для которых $H_k(x) = \Delta^k v(x)$, $x \in \partial\Omega$, $k = 0, 1, 2$.

Обозначим

$$H(\Omega, E) = \left\{\omega : \omega \in C(\overline{\Omega}),\ \Delta\omega(x) = 0,\ x \in \Omega,\ \omega(x) = 0,\ x \in E\right\}.$$

Через $\overline{H}(\Omega, E)$ обозначим пополнение линейного множества $H(\Omega, E)$ по норме $L_2(\Omega)$. Нетрудно видеть, что справедливо следующее разложение пространства $L_2(\Omega)$:

$$L_2(\Omega) = \overline{H}(\Omega, E) \oplus \overline{H}^{\perp}(\Omega, E),$$

где $\overline{H}^{\perp}(\Omega, E)$ — ортогональное дополнение для $\overline{H}(\Omega, E)$. Отсюда для функции

$$V_G^{H_2}(x) = \int_{\Omega} G(x, y) H_2(y) dy$$

получаем

$$V_G^{H_2}(x) = H_3(x) + \Phi(x),$$

где

$$H_3 \in \overline{H}(\Omega, E), \quad \Phi \in \overline{H}^{\perp}(\Omega, E) \quad \left(\int_{\Omega} H_3(x)\Phi(x) dx = 0 \right).$$

Здесь $H_3 \in \overline{H}(\Omega, E)$, $\Phi \in \overline{H}^{\perp}(\Omega, E)$. Значит,

$$v(x) = -\int_{\Omega} G(x, y) H_1(y) dy + \int_{\Omega} G(x, y) \int_{\Omega} G(y, z) H_2(z) dz dy, \quad x \in \Omega.$$

Согласно условию теоремы на $\partial\Omega - E$ имеем

$$\frac{\partial v(x)}{\partial l_x} = 0 = -\int_{\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial l_x} H_1(y) dy +$$
$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial l_x} H_3(y) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial l_x} \Phi(y) dy.$$

Следовательно,

$$-\int_{\Omega} H(y) H_1(y) dy + \int_{\Omega} H(y) H_3(y) dy + \int_{\Omega} H(y)\Phi(y) dy = 0,$$

где $H \in \overline{H}(\Omega, E)$. Поскольку

$$\int_{\Omega} H(x)\Phi(x) dx = 0, \quad \Phi \in \overline{H}^{\perp}(\Omega, E),$$

то

$$\int_{\Omega} H(x) H_1(x) dx = \int_{\Omega} H(y) H_3(y) dy, \quad H \in \overline{H}(\Omega, E).$$

Отсюда получаем $H_1(x) = H_3(x)$, $x \in \Omega$. Теперь представление решения v $(\Delta^3 v = 0)$ принимает вид

$$v(x) = \int_{\Omega} G(x, y)\Phi(y) dy.$$

В силу условия теоремы

$$\frac{\partial v(x)}{\partial l_x} = \int_{\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial l_x} \Phi(y) dy, \quad x \in \partial\Omega - E.$$

Значит, согласно лемме

$$\Phi'(x) = T\Phi(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega - E.$$

Кроме того, для решения v имеем

$$v(x) = \int_\Omega G(x, y)\Phi(y)dy = \int_\Omega \Gamma(x, y)\Phi(y)dy - \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, y)\Phi'(y)dSy.$$

Согласно условию

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial l_x^2} = 0, \qquad x \in \partial\Omega - E.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 V_i^\Phi(x)}{\partial l_x^2} - \frac{\partial^2 U_i^{\Phi'}}{\partial l_x^2} = 0, \qquad x \in \partial\Omega - E.$$

Очевидно также, что

$$\frac{\partial^2 V_i^\Phi(x)}{\partial l_x^2} - \frac{\partial^2 V_e^\Phi(x)}{\partial l_x^2} + \frac{\partial^2 V_e^\Phi(x)}{\partial l_x^2} - \frac{\partial^2 U_i^{\Phi'}}{\partial l_x^2} = 0, \qquad x \in \partial\Omega - E.$$

Из теории потенциала известно, что

$$V^\Phi(x) = U^{\Phi'}(x), \qquad x \in \partial\Omega.$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 V_e^\Phi(x)}{\partial l_x^2} = \frac{\partial^2 U_e^{\Phi'}(x)}{\partial l_x^2} = 0, \qquad x \in \partial\Omega.$$

Поскольку $\Phi'(x) = 0,\ x \in \partial\Omega - E,$ то

$$\frac{\partial^2 V_e^\Phi(x)}{\partial l_x^2} - \frac{\partial^2 U_i^{\Phi'}}{\partial l_x^2} = 0, \qquad x \in \partial\Omega - E.$$

Кроме того, в силу формулы из [10, с. 115]

$$0 = \frac{\partial^2 V_i^\Phi(x)}{\partial l_x^2} - \frac{\partial^2 V_e^\Phi(x)}{\partial l_x^2} = -\Phi(x)\cos^2(\nu_x, l_x), \qquad x \in \partial\Omega - E.$$

Отсюда получаем $\Phi(x) = 0,\ x \in \partial\Omega - E.$ Далее, так как

$$V_G^{H_2}(x) = H_3 + \Phi,$$

то $\Phi(x) = 0,\ x \in \partial\Omega.$ Отсюда следует, что $H_3(x) = 0,\ x \in \partial\Omega,$ и

$$V_G^{H_2}(x) = \Phi(x).$$

Поскольку $\Phi'(x) = 0,\ x \in \partial\Omega - E,$ то

$$\int_\Omega V_G^{H_2}(x)H(x)dx = 0, \qquad H \in \overline{H}(\Omega, E).$$

Итак,

$$\int_\Omega V_G^{H_2}(x)H_2(x)dx = 0.$$

Таким образом, энергия [9, с. 120] плотности H_2 равна нулю. Следовательно, $H_2(x) = 0,\ x \in \Omega,$

$$v(x) = \int_\Omega G(x,y) V_G^{H_2}(x)\,dx = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Теорема 1 доказана.

Теперь рассмотрим уравнение $\Delta^n v = 0$.

Теорема 2. *Пусть ограниченная область* Ω *принадлежит классу* $C^{(2n-2,\alpha)}$, *а* v *— решение уравнения* $\Delta^n v = 0$ *из пространства* $C^{(2n-2,\alpha)}(\overline{\Omega})$. *Пусть, далее,* $\Delta^k v(x) = 0$, $x \in E$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $l \in C^{(n,\alpha)}$. *Если* $v(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, *и*

$$\frac{\partial^k v(x)}{\partial l_x^k} = 0, \qquad x \in \partial\Omega - E, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

то $v(x) = 0$, $x \in \partial\overline{\Omega}$.

Доказательство. Для решения v справедливо представление

$$v(x) = -\int_\Omega G(x,y_1) H_1(y_1)\,dy_1 + \int_\Omega G(x,y_1) \int_\Omega G(y_1,y_2) H_2(y_2)\,dy_2\,dy_1 +$$

$$+ (-1)^{n-1} \int_\Omega G(x,y_1) \int_\Omega G(y_1,y_2) \ldots \int_\Omega G(y_{n-2},y_1) H_{n-1}(y_{n-1})\,dy_{n-1} \ldots dy_1.$$

Очевидно также следующее представление:

$$v(x) = -\int_\Omega G(y_1) \Phi_1(x,y_1)\,dy_1,$$

где

$$\Phi_1(y_1) = H_1(y_1) - \int_\Omega G(y_1,y_2) H_2(y_2)\,dy_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \int_\Omega G(y_1,y_2) \ldots \int_\Omega G(y_{n-2},y_{n-1}) H_{n-1}(y_{n-1})\,dy_{n-1} \ldots dy_2.$$

Нетрудно видеть, что $\Delta v(x) = \Phi_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, и

$$0 = \frac{\partial v(x)}{\partial l_x} = -\int_\Omega \frac{\partial G(x,y_1)}{\partial l_x} \Phi_1(y_1)\,dy_1,$$

$$0 = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial l_x^2} = \Phi_1(x) \cos^2(\nu_x, l_x), \qquad x \in \partial\Omega - E.$$

В силу условия теоремы $\Phi_1(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$. Кроме того,

$$\Delta^{n-1}(\Delta v) = \Delta^{n-1}\Phi_1(x) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Итак, Φ_1 — решение уравнения

$$\Delta^{n-1}\Phi_1(x) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Используем метод математической индукции. Теорема 2 доказана в случае $n = 3$ (заметим, что теорема 2 легко доказывается также для бигармонического уравнения $\Delta^2 v = 0$). Допустим, что теорема 2 справедлива для уравнения $\Delta^{n-1} v = 0$. Докажем теорему для уравнения $\Delta^n v = 0$. Поскольку $\Phi_1(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, для любого k, $1 \le k \le n-2$, получаем

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} \Phi_1(x) \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial l_{x_0}^2} dS_x = (-1)^k \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial^k \Phi_1(x)}{\partial l_{x_0}^k} \varphi(x) dS_x,$$

$$\varphi \in C_0^{n-2}(R^3), \quad x_0 \in \partial\Omega - E.$$

Здесь Φ_1 рассматривается как обобщенная функция. Из предыдущего равенства следует

$$\frac{\partial^k \Phi_1(x)}{\partial l_x^k} = 0, \quad x \in \partial\Omega - E, \quad k = 1, 2, \dots, n-2.$$

Нетрудно видеть, что $\Delta^k(\Delta v(x)) = \Delta^k \Phi_1(x) = 0,\ x \in E,\ k = 1, 2, \dots, n-2.$

Поскольку теорема 2 справедлива для уравнения $\Delta^{n-1} v = 0$, получаем $\Phi_1(x) = 0,\ x \in \Omega$. Из равенства $\Delta v(x) = \Phi_1(x) = 0,\ x \in \Omega$, следует, что v — гармоническая функция в области Ω. В силу граничного условия $v(x) = 0$, $x \in \overline{\Omega}$.

Теорема 2 доказана.

1. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1953. – **5**, № 2. – С. 132–151.
2. *Вишик М. И.* Лекции по вырождающимся эллиптическим задачам // Седьмая летняя мат. школа (Кацивели, 1969). – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.
3. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса в эллиптических краевых задачах. – М.: Мир, 1986.
4. *Бицадзе А. В.* Об одной задаче с наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 4. – С. 749–752.
5. *Млютов М. Б.* О задаче с наклонной производной в трехмерном пространстве // Там же. – 1967. – **172**, № 2. – С. 283–287.
6. *Янушкаускас А. И.* К задаче о наклонной производной для гармонических функций трех независимых переменных // Сиб. мат. журн. – 1967. – **8**, № 2. – С. 749–752.
7. *Мазья В. Г.* О вырождающейся задаче с косой производной // Мат. сб. – 1969. – **78(120)**, № 1. – С. 148–178.
8. *Алимов Ш. А.* Об одной задаче с наклонной производной // Дифференц. уравнения. – 1981. – № 1. – С. 1738–1751.
9. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Мир, 1966.
10. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953.

Получено 29.06.2005,
после доработки — 21.11. 2005