УДК 517.9

О. Ю. Романенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЯВИЩЕ АВТОСТОХАСТИЧНОСТІ В ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ, ПОРОДЖУВАНИХ РІЗНИЦЕВИМИ РІВНЯННЯМИ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ*

For dynamical systems induced by continuous time difference equations $x(t+1) = f(x(t))$, where f is a continuous self-map of an interval, we present the mathematical justification of the self-stochasticity phenomenon, which implies that the attractor of a deterministic system contains random functions.

Для динамічних систем, породжуваних різницевими рівняннями з неперервним часом $x(t+1) = f(x(t))$ (f — неперервне відображення інтервалу у себе), наведено математичне обґрунтування явища автостохастичності, яке полягає у тому, що атрактор детермінованої системи містить випадкові функції.

1. Вступ. При якісному дослідженні різницевих рівнянь з дискретним часом (ДРР) стандартним є метод переходу до динамічної системи (ДС), індукованої рівнянням на просторі початкових станів. Цей метод виявляється досить плідним і для різницевих рівнянь з неперервним часом (НРР). Але при цьому принципова складність полягає в тому, що, на відміну від ДРР, *динамічні системи, індуковані НРР, є нескінченновимірними і, що більш суттєво, їх фазові простори, як правило, є некомпактними і, як наслідок, у типових ситуаціях не містять глобальних атракторів відповідних систем.* Тому виникає необхідність залучати до розгляду функціональні простори, ширші за вихідний фазовий простір і наділені спеціальними метриками. Нові метричні простори повинні забезпечувати таке поповнення (за допомогою нової метрики) вихідного простору, щоб початкові функції, які породжують траєкторії, компактні у розширеному просторі, утворювали у вихідному просторі масивну у тому чи іншому сенсі (в залежності від задачі) підмножину. Це дозволить побудувати ω-граничні множини таких траєкторій і охарактеризувати (глобальний) атрактор системи[1]. Один із можливих підходів до вирішення цієї проблеми розвинуто в [1 – 3] (див. також [4, 5] та наведену там бібліографію). Зокрема, встановлено, що в якості згаданого вище розширеного простору має сенс, за певних умов, використовувати простір випадкових функцій; тоді ω-граничні множини траєкторій ДС можуть містити випадкові функції, і тому при великих значеннях часу цілком детерміновані функції — точки відповідних траєкторій — поводитимуться як випадкові процеси. Таке явище одержало назву автостохастичність; воно надає один із сценаріїв розвинення просторово-часового хаосу у розподілених детермінованих системах і дозволяє здійснити асимптотично точний статистичний опис станів системи.

Зауважимо, що тут під випадковою функцією (процесом) насправді розуміється розподіл випадкової функції (або, інакше, міра на просторі реалізацій); у такому сенсі термін „випадкова функція" використовується для зручності (що не є загальновживаним в теорії ймовірностей).

У даній роботі концепція автостохастичності в детермінованих системах застосовується до різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

* Частково підтримано Міністерством освіти та науки України, Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 01.07/00081).

[1] Від вибору того чи іншого ширшого простору залежить те, наскільки точним буде опис асимптотичних властивостей функцій, що утворюють траєкторії ДС; деякі пояснення з цього приводу наведено наприкінці статті (зауваження 3).

де $f \in C(I, I)$ — задана необоротна функція, I — обмежений замкнений інтервал. Слід зауважити, що необоротність нелінійності f є необхідною умовою (у розмірності один) для існування розв'язків зі складною асимптотичною поведінкою (однієї лише нелінійності f для цього, як відомо, замало).

Різницеві рівняння, як такі, не вимагають ні гладкості, ні навіть неперервності розв'язків. Зокрема, щодо (1), то для будь-якої функції $\varphi : [0, 1) \to I$ початкова умова

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [0, 1), \tag{2}$$

визначає єдиний розв'язок $x_\varphi : \mathbb{R}^+ \to I$ рівняння (1), який можна знайти методом кроків:

$$x_\varphi(t) = (f^n \circ \varphi)(t - n), \qquad t \in [n, n+1), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

де символом $\circ$ позначено операцію композиції функцій, а f^n — n-та ітерація функції f (тобто $f^0(z) = z$, $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$, $n = 1, 2, \ldots$). Отже, розв'язок x_φ може виявитись розривним навіть при неперервних функціях f і φ; щоб цього не сталося, початкова функція $\varphi(t)$ повинна задовольняти *умову узгодженості*: $\varphi(1-0) = f(\varphi(0))$.

Нижче ми обмежимося лише одним припущенням відносно початкових функцій φ: *будемо вважати функції* φ *неперервними на замкненому інтервалі* $[0, 1]$, *довизначивши їх у точці* $t = 1$ *за неперервністю.* В цьому випадку розв'язки рівняння (1) будуть, взагалі кажучи, багатозначними (а саме, набуватимуть двох значень) у цілочислових точках.

Рівняння (1) індукує нескінченновимірну динамічну систему

$$\left\{C([0,1]), \mathbb{Z}^+, S\right\}, \qquad S[\varphi] = f \circ \varphi \quad \text{при} \quad \varphi \in C([0,1], I). \tag{4}$$

Траєкторії цієї динамічної системи мають вигляд

$$S^n[\varphi] = f^n \circ \varphi, \qquad n \in \mathbb{Z}^+, \quad \varphi \in C([0,1], I), \tag{5}$$

і, отже, між розв'язками рівняння (1) і траєкторіями ДС (4) існує такий зв'язок:

$$x_\varphi(t) = S^{\langle t \rangle}[\varphi](\{t\}), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

де через $\langle\cdot\rangle$ і $\{\cdot\}$ позначено відповідно цілу і дробову частини числа. Таким чином, *асимптотичну поведінку розв'язків рівняння* (1) *можна описати у термінах* ω-*граничних множин траєкторій ДС* (4). Ми зосередимося лише на дослідженні ДС (4), залишивши відповідні висновки відносно розв'язків рівняння (1) для окремої работи.

З формули (5) випливає, зокрема, що для кожної початкової функції φ, відмінної від константи, динаміку відповідної траєкторії $S^n[\varphi]$ можна трактувати як динаміку континуума незв'язаних осциляторів, що відрізняються лише початковими станами: у кожній точці $t \in [0, 1]$ знаходиться осцилятор $x_n \mapsto x_{n+1} = f(x_n)$, де $x_0 = \varphi(t)$; коливання осциляторів з різними початковими станами (хоча і відбуваються за одним і тим самим законом) є взаємно незалежними. На інтуїтивному рівні зрозуміло, що саме взаємна незалежність коливань осциляторів є „відповідальною" за наявність автостохастичності у ДС (4).

Отже, поведінка траєкторій ДС (4) визначається одновимірним відображенням $f \in C(I, I)$. При цьому особливу роль відіграє множина

$$\mathcal{D}(f) = \left\{z \in I : \text{траєкторія } f^n(z),\ n = 0, 1, \ldots, \text{ є нестійкою за Ляпуновим}\right\},$$

яка називається *роздільником* відображення f. Нагадаємо, що точка z має нестійку траєкторію, якщо існує число $d = d(z) > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдуться точка $z' \in (z-\varepsilon, z+\varepsilon) \bigcap I$ і номер m із властивістю $\left| f^m(z) - f^m(z') \right| > d$ (тоді точку z називають *нестійкою* при відображенні f). Тому для точок $z \in \mathcal{D}(f)$ як завгодно мала похибка у визначенні числового значення z може призводити до того, що значення величини $f^n(z)$, одержане в результаті обчислень, істотно відрізнятиметься від його точного значення. Це стає принципово важливим, коли роздільник $\mathcal{D}(f)$ містить підмножину $\mathcal{D}_*(f)$ додатної міри, для якої $d_*(f) := \inf_{z \in \mathcal{D}_*(f)} d(z) > 0$. Таке явище називають *чутливою залежністю від початкових даних* або *сенситивністю.*

Якщо відображення f є сенситивним, то $\operatorname{mes} \mathcal{D}(f) > 0$, і тому *траєкторії* $S^n[\varphi]$, *для яких* $\operatorname{mes} \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)) > 0$, *опиняються за „горизонтом передбачуваності”* із зростанням n, а саме: нехай комп’ютер розрізняє величини порядку ε; яким би малим не було ε, можна знайти номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ похибка при обчисленні значення функції $f^n \circ \varphi(t)$, коли t належить множині (додатної міри) $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$, може бути величиною порядку $d_*(f) > 0$. Далі будемо називати такі траєкторії *„нерегулярними”*. Існування „нерегулярних” траєкторій означає, що:

фазовий простір $C([0,1], I)$ системи не містить ω-граничних множин таких траєкторій;

для опису властивостей функцій $f^n \circ \varphi(t)$, що утворюють „нерегулярні” траєкторії, при великих значеннях n потрібні ймовірнісні методи.

У роботі для цього випадку дається математичне обґрунтування явища автостохастичності: показано, що за певних умов (головною з яких є існування у відображення f гладкої інваріантної міри) функції, що утворюють „нерегулярні” траєкторії, асимптотично точно описуються певними (стаціонарними) випадковими процесами: при цьому поведінка самих „нерегулярних” траєкторій є простою: ці траєкторії притягуються циклами так званої розширеної ДС, яка є продовженням вихідної ДС на деякий простір, що поряд з детермінованими містить і випадкові функції. Роботу побудовано таким чином.

У пункті 2 введено простір $\mathfrak{R}$ детермінованих і випадкових функцій, які розуміються як набори їх скінченновимірних розподілів, тобто елементами простору $\mathfrak{R}$ фактично є розподіли функцій. Простір $\mathfrak{R}$ наділено спеціальною метрикою $\rho^{\#}$, яка порівнює функції, виходячи з їх усереднених розподілів.

Пункт 3 присвячено розширеній динамічній системі $\{C^{\#}, \mathbb{Z}^+, S\}$, де $C^{\#}$ — поповнення у метриці $\rho^{\#}$ простору C_{ns} несингулярних початкових функцій $\varphi \in C$ функціями з $\mathfrak{R}$ і $S[\zeta] = f \circ \zeta$, $\zeta \in C^{\#}$. Показано, що розширена динамічна система є неперервним продовженням системи $\{C_{ns}, \mathbb{Z}^+, S\}$.

В останньому пункті обґрунтовано поняття ω-граничної множини траєкторії $S^n[\varphi]$ вихідної ДС як ω-граничної множини траєкторії розширеної ДС, яка проходить через ту ж саму „точку” φ. Доведено: якщо відображення f має гладку інваріантну міру, носій якої складається із скінченного числа інтервалів, то ω-граничні множини „нерегулярних” траєкторій є циклами (розширеної ДС) і складаються з випадкових функцій. Спочатку розглянуто найпростішу ситуацію, коли носієм міри є лише один інтервал (теорема S), і на цій основі досліджено загальний випадок (теорема G).

2. Розширений фазовий простір. Із наведених у вступі міркувань випливає, що для аналізу (за окресленою там схемою) асимптотичної поведінки траєкторій ДС (4) у випадку, коли відображення f є сенситивним, потрібен простір, який крім детермінованих функцій містив би і випадкові функції.

Випадкові функції (або, інакше, стохастичні процеси) будемо розуміти як набори всіх їх скінченновимірних розподілів і, таким чином, будемо ототожнювати випадкові функції з однаковими скінченновимірними розподілами[2].

Щодо детермінованих функцій, то їх також можна трактувати як набори скінченновимірних розподілів; у цьому випадку кожному набору розподілів відповідає лише одна детермінована функція.

Нехай $J = f(I)$ і $\mathcal{B}$ — σ-поле всіх борелевих множин $B \subset J$. Позначимо через $\Re([0,1], I)$ простір випадкових функцій та детермінованих неперервних функцій $\zeta : [0, 1] \to I$, заданих їх скінченновимірними розподілами — функціями множини

$$\mathcal{F}_\zeta(B_1, \dots, B_r, t_1, \dots, t_r), \qquad B_i \in \mathcal{B}, \quad t_i \in [0,1], \tag{7}$$

які набувають значень з інтервалу $[0, 1]$ і задовольняють умови узгодження Колмогорова:

$$\mathcal{F}_\zeta(B_{i_1}, \dots, B_{i_r}, t_{i_1}, \dots, t_{i_r}) = \mathcal{F}_\zeta(B_1, \dots, B_r, t_1, \dots, t_r),$$

де $\{i_1, \dots, i_r\}$ — довільна перестановка з чисел $1, 2, \dots, r$;

$$\mathcal{F}_\zeta(B_1, \dots, B_{r-1}, J, t_1, \dots, t_r) = \mathcal{F}_\zeta(B_1, \dots, B_{r-1}, t_1, \dots, t_{r-1}).$$

Значення розподілу (7) — число з інтервалу $[0, 1]$ — називається *ймовірністю* того, що $\zeta(t_1) \in B_1, \dots, \zeta(t_r) \in B_r$. При цьому для детермінованої функції $\zeta_*(t)$ (тут і далі під детермінованою функцією будемо розуміти неперервну детерміновану функцію) маємо

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_{\zeta_*}(B, t) = \chi_B(\zeta_*(t)), \\ \mathcal{F}_{\zeta_*}(B_1, \dots, B_r, t_1, \dots, t_r) = \mathcal{F}_{\zeta_*}(B_1, t_1)\mathcal{F}_{\zeta_*}(B_2, t_2)\dots\mathcal{F}_{\zeta_*}(B_r, t_r),\end{gathered} \tag{8}$$

де $\chi_B(\cdot)$ — індикатор (характеристична функція) множини B. Як відомо, розподіли (7) однозначно визначаються через скінченновимірні функції розподілу

$$F_\zeta(z_1, \dots, z_r, t_1, \dots, t_r) = \mathcal{F}_\zeta(B_{z_1}, \dots, B_{z_r}, t_1, \dots, t_r), \qquad B_z = (-\infty, z] \cap J, \tag{9}$$

зокрема,

$$F_\zeta([z', z''], t) = F_\zeta(z'', t) - F_\zeta(z', t). \tag{10}$$

Таким чином, для ідентифікації функції $\zeta \in \Re([0,1], I)$ достатньо задати функції (9). Для спрощення будемо позначати r-вимірну функцію розподілу через $F_\zeta(r; z, t)$, вважаючи $t \in [0,1]^r$ і $z \in J^r$ (тут $[0,1]^r$ і J^r — прямі добутки відповідно r інтервалів $[0, 1]$ і r інтервалів J).

Далі вважатимемо, що для $\zeta \in \Re([0,1], I)$ їх функції розподілу $F_\zeta(r; z, t)$, як функції $t \in [0,1]^r$, є вимірними (відносно $\mathcal{B}$).

Одразу зауважимо, що детерміновані функції з $\Re([0,1], I)$ задовольняють цю умову. Справді, для детермінованої (неперервної) функції $\zeta_*(t) \in \Re([0,1], I)$ $F_{\zeta_*}(z, t) = \chi_{B_z}(\zeta_*(t)) = \chi_{\zeta_*^{-1}(B_z)}(t)$, тобто $F_{\zeta_*}(z, t)$ є характеристичною функцією множини $B_z^* = \zeta_*^{-1}(B_z)$. Оскільки $B_z \in \mathcal{B}$, то з неперервності ζ_* випливає, що $B_z^* \in \mathcal{B}$ і тому множина B_z^* є вимірною. З останнього, у свою чергу, випливає вимірність характеристичної функції множини B_z^* (див., наприклад, [6]), тобто вимірність функції розподілу $F_{\zeta_*}(z, t)$, а отже, і вимірність всіх скінченновимірних функцій розподілу.

Означення 1. *Будемо говорити, що деяка властивість* $\mathbf{P}(r; z, t)$ *викону-*

[2] З точки зору статистичного аналізу такі функції не можна розрізнити.

ється майже завжди, якщо для будь-якого цілого $r > 0$ *і кожного* $z \in J^r$ *ця властивість має місце при майже всіх* $t \in [0,1]^r$; *тут термін „майже всі" означає „за винятком, можливо, множини лебегової міри нуль (або просто нуль-множини)"*.

Означення 2. *Вважатимемо, що* $\zeta_1 = \zeta_2$, *якщо рівність* $F_{\zeta_1}(r; z, t) = F_{\zeta_2}(r; z, t)$ *виконується майже завжди.*

Для порівняння детермінованих і випадкових функцій скористаємось запропонованою в [2] метрикою, але у дещо підкоректованому вигляді

$$\rho^{\#}_{(a)}(\zeta_1, \zeta_2) = \sup_{\varepsilon > 0} \min \left\{ \varepsilon, \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{a^r} \sup_{z \in J^r} \int_{[0,1]^r} \left| F^{\varepsilon}_{\zeta_1}(r; z, t) - F^{\varepsilon}_{\zeta_2}(r; z, t) \right| dt \right\}, \tag{11}$$

де $F^{\varepsilon}_{\zeta}(r; z, t)$ — усереднення r-вимірних функцій розподілу функції ζ по ε-околу точки $t \in [0,1]^r$, а саме:

$$F^{\varepsilon}_{\zeta}(r; z, t) = \frac{1}{\operatorname{mes} V_{\varepsilon}(t)} \int_{V_{\varepsilon}(t)} F_{\zeta}(r; z, t) d\tau, \quad t \in [0,1]^r, \quad z \in J^r, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

$V_{\varepsilon}(t) = V_{\varepsilon}(t_1) \times V_{\varepsilon}(t_2) \times \ldots \times V_{\varepsilon}(t_r)$ і $V_{\varepsilon}(t_i) = (t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon) \cap [0,1]$, якщо $t_1, t_2, \ldots, t_r$ — координати точки $t \in [0,1]^r$.

Такий підхід дозволяє перейти від розривних функцій розподілу до неперервних (по t) усереднених функцій розподілу. Більш того,

a) функція $F^{\varepsilon}_{\zeta}(r; z, t)$ є абсолютно неперервною по $t \in [0,1]^r$;

b) функція $F^{\varepsilon}_{\zeta}(r; z, t)$ є рівномірно неперервною по $\varepsilon \geq 0$ рівномірно по $(z, t) \in J^r \times [0,1]^r$;

c) має місце співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F^{\varepsilon}_{\zeta}(r; z, t) = F_{\zeta}(r; z, t) \quad \text{майже завжди.} \tag{13}$$

Твердження a) випливає з загальної теорії функцій [6]. Твердження b) є наслідком оцінки

$$\left| F^{\varepsilon}_{\zeta}(r; z, t) - F^{\varepsilon'}_{\zeta}(r; z, t) \right| = 2r|\varepsilon - \varepsilon'|, \tag{14}$$

яку одержуємо таким чином (тут $\varepsilon' < \varepsilon$):

$$\left| F^{\varepsilon}_{\zeta}(r; z, t) - F^{\varepsilon'}_{\zeta}(r; z, t) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{\operatorname{mes} V_{\varepsilon}(t)} - \frac{1}{\operatorname{mes} V_{\varepsilon'}(t)} \right| \int_{V_{\varepsilon'}(t)} \left| F_{\zeta}(r; z, \tau) \right| d\tau + \frac{1}{\operatorname{mes} V_{\varepsilon}(t)} \int_{V_{\varepsilon}(t) \setminus V_{\varepsilon'}(t)} \left| F_{\zeta}(r; z, \tau) \right| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon^r} \left| \varepsilon^r - (\varepsilon')^r \right| = \frac{2}{\varepsilon^r} |\varepsilon - \varepsilon'| \left| \varepsilon^{r-1} + \varepsilon^{r-2}\varepsilon' + \ldots + (\varepsilon')^{r-1} \right| \leq 2r|\varepsilon - \varepsilon'|.$$

Доведемо твердження c). Нехай $t = (t_1, \ldots, t_r)$, $z = (z_1, \ldots, z_r)$. Покладемо

$$\Phi(t_1, \ldots, t_r) = \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_r} F_{\zeta}(z_1, \ldots, z_r, \tau_1, \ldots, \tau_r) d\tau_1 \ldots d\tau_r,$$

де підінтегральна функція — це r-вимірна функція розподілу $F_{\zeta}(r; z, t)$, записана у розгорнутому вигляді. Елементарні викладки показують, що для тих $t = (t_1, \ldots, t_r)$, для яких границя у лівій частині (13) існує, має місце співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_{\zeta}^{\varepsilon}(z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r) = \frac{d^r \Phi(t_1, \ldots, t_r)}{dt_1 \ldots dt_r}. \tag{15}$$

Задля простоти перевіримо (15) при $r = 1$. Розбиваючи інтеграл у правій частині (12) на 4 інтеграли з границями від 0 до $t-\varepsilon$, t, $t+\varepsilon$ і t, одержуємо

$$F_{\zeta}^{\varepsilon}(z, t) = \frac{\Phi(t) - \Phi(t-\varepsilon)}{2\varepsilon} + \frac{\Phi(t+\varepsilon) - \Phi(t)}{2\varepsilon}.$$

Звідси, спрямовуючи ε до 0, маємо (15) з $r = 1$. З іншого боку, оскільки функція $\Phi(t_1, \ldots, t_r)$ є абсолютно неперервною, то

$$\frac{d^r \Phi(t_1, \ldots, t_r)}{dt_1 \ldots dt_r} = F_{\zeta}(z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r) \tag{16}$$

при майже всіх $(t_1, \ldots, t_r) \in [0,1]^r$. З (15) і (16) одразу випливає (13).

Твердження 1. 1. *Функціонал* (11) *при будь-якому* $a \geq 2$ *є метрикою на* $\mathfrak{R}([0,1], I)$.

2. *Якщо функція* ζ_1 *збігається з функцією* ζ_1^* *при майже всіх* $t \in [0,1]$, *то*

$$\rho_{(a)}^{\#}(\zeta_1, \zeta_2) = \rho_{(a)}^{\#}(\zeta_1^*, \zeta_2).$$

Доведення. Сума у правій частині (11) завжди збігається, оскільки вираз під знаком інтеграла не перевищує 1, і, отже, функціонал (11) визначено коректно. Виконання нерівності трикутника перевіряється елементарно (і не потребує умови (13)). Залишається показати, що із співвідношення

$$\rho_{(a)}^{\#}(\zeta_1, \zeta_2) = 0 \tag{17}$$

випливає, що $\zeta_1 = \zeta_2$ у сенсі означення 2. З неперервності усереднених функцій розподілу випливає, що (17) має місце тоді і тільки тоді, коли при кожному $\varepsilon > 0$

$$F_{\zeta_1}^{\varepsilon}(r; z, t) = F_{\zeta_2}^{\varepsilon}(r; z, t), \qquad t \in [0,1]^r, \quad z \in J^r, \quad r = 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

Тому маємо

$$\left| F_{\zeta_1}(r; z, t) - F_{\zeta_2}(r; z, t) \right| \leq \left| F_{\zeta_1}(r; z, t) - F_{\zeta_1}^{\varepsilon}(r; z, t) \right| + \left| F_{\zeta_2}(r; z, t) - F_{\zeta_2}^{\varepsilon}(r; z, t) \right|. \tag{19}$$

Як випливає з (13), вираз у лівій частині (19) майже завжди можна зробити як завгодно малим за рахунок зменшення ε. Це означає, що $F_{\zeta_1}(r; z, t) = F_{\zeta_2}(r; z, t)$ майже завжди, і, отже, $\zeta_1 = \zeta_2$. Друге твердження є очевидним.

Наділимо простір $\mathfrak{R}([0,1], I)$ метрикою $\rho_{(a)}^{\#}$. Якщо послідовність $\zeta_i \in$ $\in \mathfrak{R}([0,1], I)$ збігається до функції $\zeta \in \mathfrak{R}([0,1], I)$, записуємо

$$\mathcal{L}\lim_{i \to \infty} \zeta_i = \zeta. \tag{20}$$

Сенс збіжності у просторі $\mathfrak{R}([0,1], I)$ розкриває наступне твердження.

Твердження 2. *Якщо* $\mathcal{L}\mathrm{im}_{i \to \infty} \zeta_i = \zeta$, *то*:

1) *при фіксованих* $\varepsilon_* > 0$, $r_* \in \mathbb{Z}^+$, $z_* \in I^{r_*}$ *послідовність* $F_{\zeta_i}^{\varepsilon_*}(r_*; z_*, t)$ *збігається до* $F_{\zeta}^{\varepsilon_*}(r_*; z_*, t)$ *за мірою* (*Лебега*) *рівномірно по* z_*;

2) *при фіксованих* $r_* \in \mathbb{Z}^+$, $z_* \in I^{r_*}$ *для будь-яких* $\gamma > 0$ *та* $\sigma > 0$ *знайдуться* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *і номер* K *такі, що*

$$\mathrm{mes}\left\{t \in [0,1]: \left|F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(r_*; z_*, t) - F_{\zeta}(r_*; z_*, t)\right| \geq \gamma\right\} < \sigma \quad \textit{при} \quad \varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2, \quad i > K. \tag{21}$$

Доведення. Щоб спростити викладки, позначимо $F^{\varepsilon}_{\zeta}(r_*; z_*, t)$ через $F^{\varepsilon}_{\zeta}(*, t)$.

1. Зафіксуємо довільне $\gamma > 0$ і покладемо

$$\tau_i(\gamma) = \left\{t \in [0,1]: \left|F^{\varepsilon_*}_{\zeta_i}(*, t) - F_{\zeta}(*, t)\right| \geq \gamma\right\}.$$

Потрібно показати, що

$$\mathrm{mes}\, \tau_i(\gamma) \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty \quad \text{рівномірно по} \quad z_*. \tag{22}$$

Для цього скористаємось співвідношенням

$$\gamma\, \mathrm{mes}\, \tau_i(\gamma) \leq \int\limits_{[0,1]^{r_*}} \left|F^{\varepsilon_*}_{\zeta_i}(*, t) - F_{\zeta}(*, t)\right| dt. \tag{23}$$

Візьмемо довільне додатне $\sigma < \varepsilon_* r^* / \gamma$. Із збіжності ζ_i до ζ у метриці $\rho^{\#}_{(a)}$ випливає існування номера $K = K(\sigma)$ такого, що

$$\sum_{r \geq 1} \frac{1}{a^r} \sup_{z \in J^r} \int\limits_{[0,1]^r} \left|F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(r; z, t) - F_{\zeta}(r; z, t)\right| dt < \frac{\gamma\sigma}{a^{r_*}} \quad \text{при} \quad i > K.$$

Звідси, у свою чергу, випливає, що при будь-якому $z \in I^{r_*}$

$$\int\limits_{[0,1]^{r_*}} \left|F^{\varepsilon_*}_{\zeta_i}(r_*; z, t) - F_{\zeta}(r_*; z, t)\right| dt < \gamma\sigma \quad \text{при} \quad i > K. \tag{24}$$

З (23) і (24) виводимо

$$\mathrm{mes}\, \tau_i(\gamma) < \sigma \quad \text{при} \quad i > K(\sigma),$$

що і доводить (22).

2. Зафіксуємо $\gamma > 0$. Візьмемо довільне $\sigma > 0$ і покладемо

$$\tau^{\varepsilon}_i(\gamma) = \left\{t \in [0,1]: \left|F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(*, t) - F_{\zeta}(*, t)\right| \geq \gamma\right\}.$$

Маємо такі нерівності:

$$\gamma\, \mathrm{mes}\, \tau^{\varepsilon}_i(\gamma) \leq \int\limits_{[0,1]^{r_*}} \left|F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(*, t) - F_{\zeta}(*, t)\right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{[0,1]^{r_*}} \left|F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(*, t) - F^{\varepsilon}_{\zeta}(*, t)\right| dt + \int\limits_{[0,1]^{r_*}} \left|F^{\varepsilon}_{\zeta}(*, t) - F_{\zeta}(*, t)\right| dt. \tag{25}$$

Оцінимо окремо кожен із доданків у правій частині (25), позначивши їх відповідно A_1 і A_2.

Покладемо $\varepsilon_1 = \gamma\sigma / 2a^{r_*}$. Із збіжності послідовності ζ_i до ζ у метриці $\rho^{\#}_{(a)}$ випливає існування номера $K = K(\sigma)$ такого, що

$$\frac{1}{a^{r_*}} A_1 \leq \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad \varepsilon > \varepsilon_1, \quad i > K,$$

і, отже,

$$A_1 \leq \frac{\gamma\sigma}{2} \quad \text{при} \quad \varepsilon > \varepsilon_1, \quad i > K. \tag{26}$$

Щоб оцінити доданок A_2, розіб'ємо його на два доданки:

$$A_2' = \int\limits_{[0,1]^{r_*}} \left| F_\zeta^\varepsilon(*,t) - F_\zeta^{1/n(\varepsilon)}(*,t) \right| dt, \qquad A_2'' = \int\limits_{[0,1]^{r_*}} \left| F_\zeta^{1/n(\varepsilon)}(*,t) - F_\zeta(*,t) \right| dt,$$

де $n(\varepsilon)$ — ціла частина числа $1/\varepsilon$, і скористаємось властивостями b) та c). На підставі властивості b) знайдеться $\varepsilon' = \varepsilon'(\sigma) > 0$, для якого

$$A_2' < \frac{\gamma\sigma}{4} \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon'. \tag{27}$$

З властивості c) випливає, що послідовність вимірних функцій $F_\zeta^{1/n(\varepsilon)}(*,t)$ збігається при $\varepsilon \to 0$ до вимірної функції $F_\zeta(*,t)$ майже скрізь. Тому за теоремою Єгорова [6] існує множина $E_\sigma \subset [0,1]^{r_*}$ така, що

$$\operatorname{mes} E_\sigma > 1 - \frac{\gamma\sigma}{8},$$

на E_σ послідовність $F_\zeta^{1/n(\varepsilon)}(*,t)$ збігається при $\varepsilon \to 0$ до $F_\zeta(*,t)$ рівномірно.

Тоді знайдеться $\varepsilon'' = \varepsilon''(\sigma) > 0$, для якого

$$\int\limits_{E_\sigma} \left| F_\zeta^{1/n(\varepsilon)}(*,t) - F_\zeta(*,t) \right| dt < \frac{\gamma\sigma}{8} \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon''.$$

Отже,

$$A_2'' \le \int\limits_{E_\sigma} \left| F_\zeta^{1/n(\varepsilon)}(*,t) - F_\zeta(\varepsilon)(*,t) \right| dt + \int\limits_{[0,1]^{r_*} \setminus E_\sigma} dt < \frac{\gamma\sigma}{4} \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon''. \tag{28}$$

Поклавши $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$, з (26) – (28) одержимо

$$A_1 + A_2 < \gamma\sigma \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 < \varepsilon \le \varepsilon_2.$$

Тому внаслідок (25)

$$\operatorname{mes} \tau_i^\varepsilon(\gamma) \le \sigma \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 < \varepsilon \le \varepsilon_2, \quad i > K,$$

що і доводить другий пункт твердження 2.

На завершення цього пункту з'ясуємо, як співвідноситься збіжність у просторі $\Re([0,1], I)$ із збіжністю у вихідному просторі $C([0,1], I)$. Позначимо через $C_{ns}([0,1], I)$ множину несингулярних початкових функцій $\varphi \in C([0,1], I)$ (тобто функцій φ, для яких із $\operatorname{mes} B = 0$ випливає $\operatorname{mes} \varphi^{-1}(B) = 0$). Нам буде потрібна наступна лема.

Лема 1. *Нехай* $\varphi, \varphi_i \in C_{ns}([0,1], I)$, $i = 1, 2, \ldots$. *Якщо*

$$\|\varphi_i - \varphi\|_{C^0} \to 0 \quad \textit{при} \quad i \to \infty, \tag{29}$$

то для кожного $\varepsilon_* \in (0,1)$ *і будь-якого* $\sigma \in (0, \varepsilon_*)$ *існує номер* $K = K(\sigma)$ *такий, що*

$$\left| F_{\varphi_i}^\varepsilon(r; z, t) - F_\varphi^\varepsilon(r; z, t) \right| < \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^r \quad \textit{при} \quad i > K, \tag{30}$$

якщо $\varepsilon > \varepsilon_*$.

Доведення. Виберемо довільне $z \in I$ і покладемо $A_z = \varphi^{-1}(z)$, $A_{z,\delta}$ — δ-окіл множини A_z. Доведення леми базується на таких двох фактах:

i) для будь-якого $\delta > 0$ існує $c = c(\delta) > 0$ таке, що

$$|\varphi(t) - z| \ge c \quad \text{при} \quad t \notin A_{z,\delta}, \quad z \in I; \tag{31}$$

ii) для будь-якого $\sigma > 0$ існує $\delta = \delta(\sigma) > 0$ таке, що

$$\operatorname{mes} A_{z,\delta} < \sigma, \quad z \in I. \tag{32}$$

Для доведення твердження i) припустимо, що (31) не виконується. Тоді знайдуться дві монотонні, а отже, і збіжні послідовності $z_k \in I$ і $t_k \in [0,1] \setminus A_{z,\delta}$, для яких

$$|\varphi(t_k) - z_k| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{33}$$

Нехай $\lim_{k\to\infty} z_k = z_*$ і $\lim_{k\to\infty} t_k = t_*$; з огляду на (33) і неперервність $\varphi(t)$ маємо $\varphi(t_*) = z_*$. Для визначеності вважатимемо послідовність t_k монотонно зростаючою. Тоді знайдеться $k_* > 0$ таке, що при $k > k_*$ всі точки t_k належать множині $V_\delta = (t_* - \delta, t_*]$. Покладемо $M = \sup_{t\in V_\delta} \varphi(t)$ і $m = \inf_{t\in V_\delta} \varphi(t)$. З несингулярності $\varphi(t)$ випливає, що рівність $M = m$ неможлива, і, отже, $M > > m$. Оскільки $z_* \in (m, M)$, то $z_k \in (m, M)$ починаючи з деякого $k = k_{**} \geq k_*$. Для кожного такого z_k внаслідок неперервності $\varphi(t)$ знайдеться $t_k^* \in V_\delta$ таке, що $\varphi(t_k^*) = z_k$. Таким чином, $t_k^* \in A_{z_k}$ і при цьому $\left|t_k^* - t_k\right| < \delta$. Отже, $t_k \in A_{z_k,\delta}$, що неможливо, і це доводить твердження i).

Доведемо твердження ii). Знову припустимо, що (32) не виконується. Тоді існують послідовність $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to 0$ і збіжна послідовність $z_k \in I$ такі, що

$$\operatorname{mes} A_{z_k,\delta_k} \geq \sigma, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Покладемо $A = \limsup A_{z_k,\delta_k}$. З (34) одержимо

$$\operatorname{mes} A \geq \limsup_{k\to\infty} \operatorname{mes} A_{z_k,\delta_k} \geq \sigma. \tag{35}$$

Покажемо, що співвідношення (35) не виконується. Справді, якщо $t_* \in A$, то знайдеться підпослідовність $k_i \to \infty$, для якої $t_* \in A_{z_{k_i},\delta_{k_i}}$. Тоді для кожного $i = 1, 2, \ldots$ існує точка $t_i \in A_{z_{k_i}}$ така, що $|t_* - t_i| < \delta_{k_i}$. Отже, $t_i \to t_*$ при $i \to \infty$. Оскільки $\varphi(t_i) = z_{k_i}$ і функція $\varphi(t)$ неперервна, то $\varphi(t_*) = z_*$, де $z_* = \lim_{k\to\infty} z_k$. Таким чином, $t_* \in A_{z_*}$ і, отже, $A_{z_*} \supseteq A$, звідки, у свою чергу, випливає, що

$$\operatorname{mes} A \leq \operatorname{mes} A_{z_*} = 0. \tag{36}$$

Рівність у (36) має місце завдяки несингулярності $\varphi(t)$. Співвідношення (35) і (36) суперечать одне одному, що і доводить твердження ii).

Перейдемо до доведення леми. Виберемо довільні $\varepsilon_* \in (0,1)$ і $\sigma \in (0, 2\varepsilon_*)$. Згідно з твердженнями i) та ii) існують $\delta = \delta(\sigma) > 0$ та $c = c(\sigma) > 0$, для яких (31) і (32) мають місце. За умови (29) знайдеться номер $K = K(\sigma)$ такий, що

$$|\varphi_i(t) - \varphi(t)| < c/2 \quad \text{при} \quad i > K, \quad t \in [0, 1].$$

Звідси, беручи до уваги (31), виводимо, що $\varphi(t) \neq z$ при $i > K$, $t \in [0,1] \setminus A_z$, і тому

$$F_{\varphi_i}(z,t) = F_\varphi(z,t) \quad \text{при} \quad i > K, \quad t \in [0,1] \setminus A_{z,\delta}. \tag{37}$$

Оскільки внаслідок (32) міра кожної з компонент зв'язності множин $A_{z,\delta}$, $z \in I$, не перевищує $\sigma < \varepsilon_*$, то для будь-яких $t \in [0, 1]$ і $z \in I$

$$V_\varepsilon(t) \not\subset A_{z,\delta} \quad \text{і} \quad \operatorname{mes}(V_\varepsilon(t) \cap A_{z,\delta}) < \delta \quad \text{при} \quad \varepsilon > \varepsilon_*.$$

Тому при $\varepsilon > \varepsilon_*$ та $i > K$ з (37) маємо

$$\left| F^\varepsilon_{\varphi_i}(z,t) - F^\varepsilon_\varphi(z,t) \right| \le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{V_\varepsilon(t)} \left| F_{\varphi_i}(z,\tau) - F_\varphi(z,\tau) \right| d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{V_\varepsilon(t) \cap A_{z,\delta}} \left| F_{\varphi_i}(z,\tau) - F_\varphi(z,\tau) \right| d\tau < \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Далі, оскільки для детермінованих функцій r-вимірна функція розподілу є добутком r відповідних одновимірних функцій розподілу, аналогічно попередньому знаходимо

$$\left| F^\varepsilon_{\varphi_i}(t_1, \ldots, t_r, z_1, \ldots, z_r) - F^\varepsilon_\varphi(t_1, \ldots, t_r, z_1, \ldots, z_r) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{(2\varepsilon)^r} \prod_{i=1}^r \int\limits_{V_\varepsilon(t_i) \cap A_{\delta, z_i}} d\tau_i < \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^r \quad \text{при} \quad \varepsilon > \varepsilon_*, \quad i > K,$$

що і завершує доведення леми.

Твердження 3. *Якщо послідовність* $\varphi_i \in C_{ns}([0,1], I)$, $i = 1, 2, \ldots$, *збігається до* $\varphi \in C_{ns}([0,1], I)$ *у* C^0*-метриці, то вона збігається до* φ *і у метриці* $\rho^\#_{(a)}$.

Доведення. Нехай φ, $\varphi_i \in C_{ns}([0,1], I)$, $i = 1, 2, \ldots$, та $\|\varphi_i - \varphi\|_{C^0} \to 0$ при $i \to \infty$. Покажемо, що

$$\rho^\#_{(a)}(\varphi_i, \varphi) \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{38}$$

Виберемо довільне $\varrho \in (0, 1)$. Згідно з лемою 1, якщо покласти $\varepsilon_* = \varrho$, $\sigma = \varrho^2$, то можна знайти $K = K(\varrho)$ таке, що

$$\left| F^\varepsilon_{\varphi_i}(r; z, t) - F^\varepsilon_\varphi(r; z, t) \right| < \varrho \quad \text{при} \quad i > K, \quad \varepsilon \ge \varrho. \tag{39}$$

Позначимо через $\Sigma_i(\varepsilon)$ суму в правій частині (11), де ζ_1 і ζ_2 замінено відповідно на φ_i і φ. З (39) випливає, що $\Sigma_i(\varepsilon) < \varrho$ при $\varepsilon > \varrho$ та $i > K$. Таким чином,

$$\rho^\#_{(a)}(\varphi_i, \varphi) = \max \left\{ \sup_{0 < \varepsilon < \varrho} \min\{\varepsilon, \Sigma_i(\varepsilon)\}, \ \sup_{\varepsilon \ge \varrho} \min\{\varepsilon, \varrho\} \right\} < \varrho \quad \text{при} \quad i > K(\sigma).$$

Отже, (38) виконується.

Твердження доведено.

3. Розширена динамічна система. Тепер, метризувавши простір $\mathfrak{R}([0,1], I)$, можемо повернутися до вихідної динамічної системи. Розглянемо замість ДС (4) динамічну систему

$$\left\{ C_{ns}([0,1], I), \mathbb{Z}^+, S \right\}, \quad S[\varphi] = f \circ \varphi \quad \text{при} \quad \varphi \in C_{ns}([0,1], I). \tag{40}$$

Звичайно, такий перехід є коректним лише за умови, що f — несингулярне відображення, зокрема несингулярне кусково-монотонне. Тут ми обмежимося саме цим останнім припущенням відносно f.

Отже, нехай відображення f має m гілок монотонності. Позначимо через $C^\#([0,1], I)$ поповнення простору $C_{ns}([0,1], I)$ функціями з простору

$\Re([0,1], I)$ у метриці $\rho^{\#}_{(2m+1)}$, яку далі позначатимемо просто $\rho^{\#}$, і перейдемо, поки що формально, до розширеної динамічної системи

$$\left\{C^{\#}([0,1], I),\ \mathbb{Z}^{+},\ S\right\}, \quad S[\zeta] = f \circ \zeta \quad \text{при} \quad \zeta \in C^{\#}([0,1], I). \tag{41}$$

Під композицією $f \circ \zeta$ будемо розуміти функцію, визначену скінченновимірними функціями розподілу

$$F_{f\circ\zeta}(z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r) = \mathcal{F}_{\zeta}\left(f^{-1}(B_{z_1}), \ldots, f^{-1}(B_{z_r}), t_1, \ldots, t_r\right),$$
$$B_z = (-\infty, z] \bigcap J. \tag{42}$$

Належність множини $f^{-1}(B)$ до σ-поля борелевих множин $\mathcal{B}$ забезпечується неперервністю f, що, у свою чергу, забезпечує вимірність функцій розподілу, які фігурують у (42). Перевірка виконання умов узгодження Колмогорова для $F_{f\circ\zeta}(t_1, \ldots, t_r, z_1, \ldots, z_r)$ є тривіальною. Отже, композиція $f \circ \zeta$ функцій f і ζ з простору $\Re([0,1], I)$ знову є функцією з простору $\Re([0,1], I)$.

Твердження 4. *Простір* $C_{ns}([0,1], I)$ *вкладено у простір* $C^{\#}([0,1], I)$ *в тому сенсі, що із збіжності послідовності у просторі* $C_{ns}([0,1], I)$ *випливає її збіжність до тієї ж самої границі й у просторі* $C^{\#}([0,1], I)$.

Твердження 4 є безпосереднім наслідком твердження 3. Покажемо, що (41) дійсно є динамічною системою. Для цього потрібна така лема.

Лема 2. *Якщо* $\zeta = \mathcal{L}\mathrm{im}_{i\to\infty}\zeta_i$, $\zeta_i \in C^{\#}([0,1], I)$, *то* $f \circ \zeta = \mathcal{L}\mathrm{im}_{i\to\infty} f \circ \zeta_i$.

Доведення. Потрібно показати, що

$$\rho^{\#}\left(f \circ \zeta_i,\ f \circ \zeta\right) \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Це виконується, якщо для будь-якого $\sigma > 0$ знайдеться номер K такий, що при $\varepsilon > \sigma$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^r} \sup_{z \in J^r} \int_{[0,1]^r} \left| F^{\varepsilon}_{f\circ\zeta_i}(r; z, t) - F^{\varepsilon}_{f\circ\zeta}(r; z, t) \right| dt < \sigma, \quad i > K. \tag{43}$$

Виберемо довільне $z \in J$. Для $r = 1$ з формул (42) маємо

$$F_{f\circ\zeta_i}(z, t) = \mathcal{F}_{\zeta_i}\left(f^{-1}(B_z), t\right), \qquad F_{f\circ\zeta}(z, t) = \mathcal{F}_{\zeta}\left(f^{-1}(B_z), t\right). \tag{44}$$

Множина $f^{-1}(B_z)$ або порожня, або складається не більше ніж з m замкнених (можливо, вироджених) взаємно неперетинних інтервалів $[z'_j, z''_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n = n(z) \le m$. Тому з (44) і (43) виводимо

$$\left| F^{\varepsilon}_{f\circ\zeta_i}(z, t) - F^{\varepsilon}_{f\circ\zeta}(z, t) \right| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} \left(\left| F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(z'_j, t) - F^{\varepsilon}_{\zeta}(z'_j, t) \right| + \sum_{j=1}^{n} \left| F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(z''_j, t) - F^{\varepsilon}_{\zeta}(z''_j, t) \right| \right),$$

і, отже,

$$\sup_{z\in J} \int_0^1 \left| F^{\varepsilon}_{f\circ\zeta_i}(z, t) - F^{\varepsilon}_{f\circ\zeta}(z, t) \right| dt \le 2m \sup_{z\in J} \int_0^1 \left| F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(z, t) - F^{\varepsilon}_{\zeta}(z, t) \right| dt. \tag{45}$$

Аналогічно для $r \ge 2$ знаходимо

$$\sup_{z\in J^r}\int\limits_{[0,1]^r}\left|F^{\varepsilon}_{f\circ\zeta_i}(r;z,t)-F^{\varepsilon}_{f\circ\zeta}(r;z,t)\right|dt \;\le\; (2m)^r\sup_{z\in J^r}\int\limits_{[0,1]^r}\left|F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(r;z,t)-F^{\varepsilon}_{\zeta}(r;z,t)\right|dt. \tag{46}$$

З іншого боку,

$$\rho^{\#}(\zeta_i,\zeta)\to 0 \quad \text{при} \quad i\to\infty,$$

з чого випливає існування для будь-якого $\varrho > 0$ номера $K = K(\varrho)$ та числа $\gamma = \gamma(\varrho) > 0$ таких, що

$$\left|F^{\varepsilon}_{\zeta_i}(r;z,t)-F^{\varepsilon}_{\zeta}(r;z,t)\right| < \gamma \quad \text{при} \quad \varepsilon > \varrho, \quad i > K \tag{47}$$

і

$$\gamma\to 0 \quad \text{при} \quad \varrho\to 0.$$

Виберемо $\varrho < \sigma$ настільки малим, що $\gamma < \sigma/2m$. Тоді з (46) випливає, що при $\varepsilon < \sigma$ має місце оцінка (43).

Лему доведено.

Твердження 5. *Формули* (41) *та* (42) *визначають динамічну систему на просторі* $C^{\#}([0,1],I)$.

Доведення. Потрібно показати, що $f: C^{\#}([0,1],I)\to C^{\#}([0,1],I)$. Виберемо будь-яку функцію $\zeta\in C^{\#}([0,1],I)$. Якщо $\zeta\in C_{ns}([0,1],I)$, тобто $\zeta(t)$ є несингулярною детермінованою неперервною функцією, то $f\circ\zeta\in C_{ns}([0,1],I)\subset$ $\subset C^{\#}([0,1],I)$.

Нехай $\zeta\in C^{\#}([0,1],I)\setminus C([0,1],I)$. Тоді функція ζ є граничною для деякої послідовності функцій $\varphi_i\in C_{ns}([0,1],I)$; при цьому $\zeta(t)$ може виявитись як детермінованою (але не неперервною), так і випадковою функцією. Згідно з лемою 2 функція $f\circ\zeta$ є граничною для послідовності $f\circ\varphi_i$. Отже, $f\circ\zeta\in$ $\in C^{\#}([0,1],I)$.

Твердження доведено.

Резюмуючи, виводимо, що *розширена динамічна система* (41) *є неперервним продовженням динамічної системи* (4).

4. ω-Граничні множини траєкторій. Перейдемо до основного питання даної роботи — опису асимптотичної поведінки траєкторій вихідної ДС (4) у випадку, коли відображення f є сенситивним (тоді міра розділювача $\mathcal{D}(f)$ є додатною), і, отже, як вже зазначалось, у фазовому просторі $C_{ns}([0,1],I)$ існує відкрита підмножина, яка породжує траєкторії, що мають в $C_{ns}([0,1],I)$ порожні ω-граничні множини. Ідея полягає у використанні для цієї мети ω-граничних множин траєкторій розширеної динамічної системи (41), які позначатимемо $\omega_{\#}[\cdot]$.

Означення 3. *Під* ω*-граничною множиною траєкторії ДС* (4), *що проходить через „точку”* $\varphi\in C_{ns}([0,1],I)$, *будемо розуміти множину* $\omega_{\#}[\varphi]$, *тобто* ω*-граничну множину траєкторії розширеної ДС* (41), *що проходить через ту ж саму „точку”* φ.

Звичайно, це означення є змістовним лише тоді, коли траєкторії розширеної ДС (41) мають непорожні ω-граничні множини. У всякому разі, означення 3 є коректним. Справді, якщо для деякого $\varphi_*\in C([0,1],I)$ відповідна траєкторія ДС (4) має у просторі $C([0,1],I)$, наділеному C^0-метрикою, непорожню ω-граничну множину $\omega_0[\varphi_*]$, то $\omega_0[\varphi_*]\subset\omega_{\#}[\varphi_*]$. Цей факт є безпосереднім наслідком того, що простір $C([0,1],I)$ вкладено у простір $C^{\#}([0,1],I)$ (твердження 4).

Отже, постає питання: нехай $\operatorname{mes}\mathcal{D}(f) > 0$ (тоді, як зазначалося, ДС (4) має „нерегулярні” траєкторії); при яких умовах траєкторії розширеної ДС, а отже, згідно з означенням 3 і вихідної ДС мають непорожні і, бажано, компактні ω-граничні множини ? Автоматично відповідь не одержимо, оскільки простір $\Re([0,1], I)$ не є компактним і, як наслідок, простір $C^{\#}([0,1], I)$ — фазовий простір розширеної ДС, також може бути некомпактним. Якщо $\operatorname{mes}\mathcal{D}(f) > 0$, то існує підмножина $\mathcal{D}_*(f) \subset \mathcal{D}(f)$ тієї ж міри, що і $\mathcal{D}(f)$, яка складається з замкнених інтервалів, що утворюють цикли інтервалів[3] відображення f, та інваріантних канторових множин додатної міри (кожен такий цикл і кожна така канторова множина містять скрізь щільну орбіту відображення f). На даний час можемо запропонувати шукані умови у випадку, коли $\mathcal{D}_*(f)$ складається лише із замкнених інтервалів.

Позначимо через $MC_{\mu,p}$ підмножину кусково-монотонних неперервних відображень $f: I \to I$ таких, що виконуються (SIM)-умови:

1) відображення f є сингулярним (відносно міри Лебега), тобто

$$\text{якщо} \quad \operatorname{mes} B = 0, \quad \text{то} \quad \operatorname{mes} f^{-1}(B) = 0;$$

2) на σ-полі $\mathcal{B}$ існує ймовірнісна гладка (тобто абсолютно неперервна відносно міри Лебега) міра μ, яка є інваріантною мірою відображення f, тобто

$$\mu(I) = 1; \quad \text{якщо} \quad \operatorname{mes} B = 0, \quad \text{то} \quad \mu(B) = 0; \; \mu\left(f^{-1}(B)\right) = \mu(B);$$

3) носій міри $\operatorname{supp}\mu$ є об’єднанням замкнених інтервалів, наприклад, E_0, $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$, які утворюють (транзитивний) цикл інтервалів періоду $p = p(\mu)$[4];

4) міра μ еквівалентна мірі Лебега на своєму носії, тобто

$$\text{якщо} \quad B \in \operatorname{supp}\mu, \quad \text{то} \quad \mu(B) = 0 \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad \operatorname{mes} B = 0;$$

5) відображення f^p є ймовірнісно перемішуючим на кожному з інтервалів E_i, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, зокрема

$$\mu(B_1 \cap f^{-pj}(B_2)) \to \mu(B_1)\mu(B_2) \quad \text{при} \quad j \to \infty, \quad B_1, B_2 \subset E_i;$$

6) $\operatorname{mes} E_* = 0$, де E^* — межа басейну міри μ при відображенні f, тобто межа множини

$$\mathcal{E}_f(\mu) = \bigcup_{i=0}^{p-1} \bigcup_{j \ge 0} \operatorname{int} f^{-j}(E_i). \tag{48}$$

Звичайно, всі множини, що фігурують в (SIM)-умовах, вважаються вимірними. Позначення (SIM) є скороченням від „smooth invariant measure”. Питання, наскільки загальними є (SIM)-умови, ми лише побіжно торкнемося в кінці статті (зауваження 2). Поки ж відмітимо, що ці умови виконуються [7], зокрема, коли f — унімодальне C^3-відображення з негативним шварціаном (клас таких відображень позначають SU), яке задовольняє співвідношення Коле – Екмана

$$\lim_{k \to \infty} \inf \frac{1}{k} \log \left| \frac{d}{dt} f^k(c) \right| > 0,$$

де c — точка екстремуму f.

---

[3] Об’єднання замкнених інтервалів $J_0, J_1, \ldots, J_{p-1} \subset I$ називають *циклом інтервалів* відображення f періоду p, якщо ці інтервали циклічно переставляються відображенням f і попарно не мають спільних внутрішніх точок; якщо ж, окрім того, $\bigcup_{s=0}^{p-1} J_s$ містить скрізь щільну орбіту відображення f, то цикл інтервалів називають *транзитивним*.

[4] Компоненти носія міри μ — інтервали $E_0, E_1, \ldots, E_{p-1}$ — можуть не бути компонентами зв’язності множини $\operatorname{supp}\mu$, оскільки можливі ситуації, коли деякі з цих інтервалів мають спільну межу.

Відображення f може, взагалі кажучи, мати не одну гладку інваріантну міру, що задовольняє (SIM)-умови. Характеристику структури множини таких мір дає наступне твердження.

Твердження 6. *Нехай дві ймовірнісні міри* μ_1 *і* μ_2, *визначені на* σ-*полі* $\mathcal{B}$, *задовольняють* (SIM)-*умови.*

Якщо $\operatorname{supp}\mu_1 \neq \operatorname{supp}\mu_2$, *то міри* μ_1, μ_2 *взаємно сингулярні.*

Якщо $\operatorname{supp}\mu_1 = \operatorname{supp}\mu_2$, *то* $\mu_1 = \mu_2$.

Доведення. Перше твердження є очевидним, оскільки з умови $\operatorname{supp}\mu_1 \neq \neq \operatorname{supp}\mu_2$ випливає, що носії $\operatorname{supp}\mu_1$, $\operatorname{supp}\mu_2$ не мають спільних внутрішніх точок. Розглянемо друге твердження. Нехай E — спільний носій мір μ_1, μ_2. Тоді $\mu_1(B) = \mu_2(B) = 0$ для будь-якої вимірної множини $B \subset I \setminus E$. З іншого боку, оскільки на E міра μ_2 абсолютно неперервна відносно міри μ_1 (результат (SIM)-умови 3), а міра μ_1 ергодична (результат (SIM)-умови 4), то, як відомо [8], $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ для будь-якої вимірної множини $B \subset E$. Отже[5], $\mu_1 = \mu_2$.

Твердження доведено.

Позначимо через $MC^*_{\mu,p}$ множину тих відображень, які задовольняють всі з (SIM)-умов, окрім останньої. Наведемо спочатку спрощену теорему про ω-граничні множини — теорему S, яка дозволяє відносно легко пояснити, чому і як інваріантна міра відображення f визначає асимптотичну поведінку траєкторій ДС (4).

Теорема S. *Нехай* $f \in MC^*_{\mu,1}$. *Якщо інтервал* $\varphi([0,1])$ *належить басейну міри* μ, *то* ω-*гранична множина* $\omega_\#[\varphi]$ *траєкторії* $S^n[\varphi]$ *динамічної системи* (4) *складається з однієї випадкової функції і є нерухомою точкою розширеної динамічної системи* (41). *Точніше,*

$$\omega_\#[\varphi] = \{f^\# \circ \varphi\}, \tag{49}$$

де $f^\# : \mathcal{E}_f(\mu) \to I$ — (*стаціонарний*) *випадковий процес з взаємно незалежними значеннями, заданий своєю функцією розподілу*

$$F_{f^\#}(z, x) = \mu\big(B_z \cap \operatorname{supp}\mu\big), \qquad B_z = (-\infty, z] \cap J. \tag{50}$$

Під композицією $\zeta \circ \varphi$ випадкової ζ та детермінованої φ функцій розуміємо, як звичайно, випадкову функцію, задану своїми скінченновимірними функціями розподілу

$$F_{\zeta\circ\varphi}(z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r) = F_\zeta\big(z_1, \ldots, z_r, \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_r)\big). \tag{51}$$

Нагадаємо, що випадковий процес $Y(w)$ називається *процесом з* (*взаємно*) *незалежними значеннями, якщо для будь-якої скінченної множини* $w_1, w_2, \ldots, w_r$ *значення* $Y(w_1), Y(w_2), \ldots$ взаємно незалежні, і, отже, всі скінченновимірні розподіли процесу $Y(w)$ однозначно визначаються його одновимірною функцією розподілу $F_Y(z, w)$. Тому за умов теореми S функція $f^\# \circ \varphi(t)$ є процесом з незалежними значеннями з функцією розподілу $F_{f^\#\circ\varphi}(z, t) = \mu(E \cap B_z)$, яка не залежить від φ.

Доведення проводиться у кілька етапів, деякі з яких містять леми. За умов теореми $\operatorname{supp}\mu$ складається з однієї компоненти, яку позначимо E, при цьому $f^{-1}(E) = E$.

I. *Побудова* ω-*граничної множини траєкторії* $S^n[\varphi]$. Знайдемо всі частинні границі послідовності функцій $S^n[\varphi](t) = f^n \circ \varphi(t)$ у просторі $C^\#([0,1], I)$.

[5] Твердження 6 залишається правильним, якщо від міри μ_2 вимагати лише гладкості й інваріантності відносно f.

Згідно з (11) потрібно дослідити збіжність послідовності усереднених функцій розподілу

$$F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z,t) = \frac{1}{\operatorname{mes} V_\varepsilon(t)} \int\limits_{V_\varepsilon(t)} \chi_{B_z}(f^n\circ\varphi(\tau))\,d\tau,$$

$$F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z_1,\ldots,z_r,t_1,\ldots,t_r) = \prod_{s=1}^{r} F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z_s,t_s);$$

нагадаємо, що $V_\varepsilon(t) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\bigcap[0,1]$ і $B_z = (-\infty, z]\bigcap J$.

А. Розглянемо спочатку одновимірну усереднену функцію розподілу. Її, очевидно, можна записати у вигляді

$$F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z,t) = \frac{1}{\operatorname{mes} V_\varepsilon(t)} \int\limits_{V_\varepsilon(t)} \chi_{G_z}(\varphi(\tau))\,d\tau, \qquad G_z = f^{-n}((-\infty,z)). \tag{52}$$

Покладемо

$$\mu_0^{\varepsilon,t}(B) = \frac{1}{V_\varepsilon(t)} \int\limits_{V_\varepsilon(t)} \chi_B(\varphi(\tau))\,d\tau, \quad B\in\mathcal{B}, \tag{53}$$

і

$$\mu_n^{\varepsilon,t}(B) = \mu_0^{\varepsilon,t}(f^{-n}(B)), \quad B\in\mathcal{B}. \tag{54}$$

Множина $B\in\mathcal{B}$ є вимірною (в сенсі міри Лебега), а функція множини $\mu_0^{\varepsilon,t}$, як неважко переконатись, є мірою над борелевим полем $\mathcal{B}$. Тоді $\mu_n^{\varepsilon,t}$ — зсув міри $\mu_{n-1}^{\varepsilon,t}$ під дією відображення f. З іншого боку, маємо

$$F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z,t) = \mu_n^{\varepsilon,t}((-\infty,z)). \tag{55}$$

Таким чином, приходимо до питання про збіжність послідовності мір $\mu_n^{\varepsilon,t}$, $n = 0, 1, \ldots$, заданих над σ-полем $\mathcal{B}$. Відповідь на це питання дають три наступні леми.

Лема 3.

$$\mu_n^{\varepsilon,t}(B) \to \mu(B) \quad \textit{при} \quad n\to\infty, \quad B\in\mathcal{B}. \tag{56}$$

Доведення. З (53) і (54) знаходимо

$$\mu_n^{\varepsilon,t}(B) = \frac{1}{\operatorname{mes} V_\varepsilon(t)} \int\limits_{V_\varepsilon(t)} \chi_B(f^n\circ\varphi(\tau))\,d\tau = \frac{1}{\operatorname{mes} V_\varepsilon(t)} \operatorname{mes}\left(V_\varepsilon(t)\cap\varphi^{-1}\circ f^{-n}(B)\right). \tag{57}$$

Оскільки $\varphi([0,1])$ належить басейну носія E міри μ, то знайдеться ціле $N > 0$ таке, що

$$f^n\circ\varphi([0,1]) \subset E \quad \text{при} \quad n > N.$$

Отже, $\mu_n^{\varepsilon,t}(B) = 0$, якщо $B\bigcap E = \varnothing$ і $n > N$. Тому (57) набирає вигляду

$$\mu_n^{\varepsilon,t}(B) = \frac{1}{\operatorname{mes} V_\varepsilon(t)} \operatorname{mes}\left(V_\varepsilon(t)\cap\varphi^{-1}\circ f^{-n}(B\textstyle\bigcap E)\right) \quad \text{при} \quad n > N. \tag{58}$$

Нехай $\mu(B) = 0$, тоді $\operatorname{mes}(B\bigcap E) = 0$ внаслідок еквівалентності міри μ мірі Лебега на $E = \operatorname{supp}\mu$; отже, $\operatorname{mes}(\varphi^{-1}\circ f^{-N}(B\bigcap E)) = 0$ внаслідок інваріантності μ та несингулярності φ; і нарешті, $\mu_N^{\varepsilon,t}(B) = 0$ з огляду на (58).

Останнє означає, що міра $\mu_N^{\varepsilon,t}$ є абсолютно неперервною відносно міри μ. Оскільки міри $\mu_n^{\varepsilon,t}$ при $n > N$ є зсувами міри $\mu_N^{\varepsilon,t}$ під дією автоморфізму $f|_E$, а відображення f є перемішуючим, то можемо застосувати відому теорему про релаксацію [8], з якої безпосередньо і випливає (56). Лему доведено.

Лема 4.

$$\mu_n^{\varepsilon,t}(B_z) \to \mu(B_z) \quad \textit{при} \quad n \to \infty \quad \textit{рівномірно по} \quad (z,t) \in J \times [0,1]. \qquad (59)$$

Доведення. Нагадаємо, що $B_z = (-\infty, z] \bigcap J$. Оскільки справедливість (59) гарантується лемою 3, залишається показати, що границя в (59) є рівномірною по $(z,t) \in J \times [0,1]$. Виберемо довільно мале $\delta > 0$.

1. Як відомо, з гладкості міри μ випливає абсолютна неперервність, а отже, і рівномірна неперервність функції $F(z) = \mu((-\infty, z))$ на інтервалі J. Тоді знайдеться $\sigma = \sigma(\delta) > 0$ таке, що

$$|F(z) - F(z')| < \delta/2, \qquad (60)$$

як тільки $|z - z'| \le \sigma$. Виходячи з цього, фіксуємо на J скінченну множину точок

$$z = a, \quad z_1 = a + \sigma, \quad z_2 = a + 2\sigma, \ \ldots, \ z_k = b, \quad [a,b] = I.$$

Виберемо будь-яке $z \in J$ і позначимо через $[z_{i-1}, z_i]$ інтервал, у який потрапляє точка z (якщо таких інтервалів два, то виберемо будь-який з них). Тоді, поклавши $F_n(z) = \mu_n^{\varepsilon,t}$, при фіксованих $\varepsilon > 0$ і $t \in [0, 1]$ отримаємо

1) $F_n(z_{i-1}) \le F_n(z) \le F_n(z_i)$.

До того ж з (60) та леми 3 випливають такі співвідношення:

2) $|F(z_{i-1}) - F(z)| < \delta/2, \quad |F(z_i) - F(z)| < \delta/2$;

3) існує номер $N = N(\delta)$, для якого

$$\left|F_n(z_j) - F(z_j)\right| < \delta/2, \quad 0 \le j \le k,$$

як тільки $n > N$.

Отже, при $n > N(\delta)$ одержимо

$$F_n(z) - F(z) \le F_n(z_i) - F(z) \le (F_n(z_i) - F(z_i)) + (F(z_i) - F(z)) < \delta,$$

$$F_n(z) - F(z) \ge F_n(z_{i-1}) - F(z) \ge -\delta.$$

Таким чином, $|F_n(z) - F(z)| < \delta$ при $n > N(\delta)$ і будь-якому $z \in J$. Звідси випливає, що послідовність $\mu_n^{\varepsilon,t}(B_z)$ збігається до $\mu(B_z)$ рівномірно по z (тут ми скористалися ще рівністю $\mu((-\infty, z)) = \mu(B_z)$, яка випливає з (SIM)-умов).

2. Тепер покажемо, що границя в (56) є рівномірною за сукупністю параметрів (z,t). Оскільки $V_\varepsilon(t) = V_1(t)$ при $\varepsilon \ge 1$, можемо вважати $\varepsilon \le 1$. З першої рівності в (57) виводимо, що для будь-якого номера $n > 0$ і кожного $B \in \mathcal{B}$

$$\left|\mu_n^{\varepsilon,t}(B) - \mu_n^{\varepsilon,t'}(B)\right| \le \frac{|t-t'|}{\varepsilon} \quad \text{при} \quad |t-t'| < 2\varepsilon,$$

і, отже,

$$\left|\mu_n^{\varepsilon,t}(B) - \mu_n^{\varepsilon,t'}(B)\right| \le \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad |t-t'| \le \varepsilon\delta/2. \qquad (61)$$

Виходячи з цього, фіксуємо на $[0, 1]$ скінченну кількість точок:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\varepsilon\delta}{2}, \quad t_2 = 2\frac{\varepsilon\delta}{2}, \ \ldots, \ t_s = 1. \qquad (62)$$

Із співвідношення (59) і його рівномірності по $z \in J$ випливає існування $N = N(\varepsilon, \delta) > 0$ такого, що

$$\left|\mu_n^{\varepsilon, t_j}(B_z) - \mu(B_z)\right| < \frac{\delta}{2}, \quad 0 \le j \le s, \quad z \in J, \quad \text{при} \quad n > N. \tag{63}$$

Виберемо довільно $(z, t) \in J \times [0,1]$ і з множини (62) точку t_i, найближчу до t. Тоді з (61) і (63) отримаємо

$$\left|\mu_n^{\varepsilon, t}(B_z) - \mu(B_z)\right| \le \left|\mu_n^{\varepsilon, t}(B_z) - \mu_n^{\varepsilon, t_i}(B_z)\right| + \left|\mu_n^{\varepsilon, t_i}(B_z) - \mu(B_z)\right| < \delta, \quad n > N(\varepsilon, \delta),$$

що і завершує доведення леми.

Лема 5.

$$\left|\mu_n^{\varepsilon_1, t}(B_z) - \mu_n^{\varepsilon_2, t}(B_z)\right| < \delta, \quad \text{якщо} \quad 1 < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} < 1 + \frac{\delta}{2}. \tag{64}$$

Доведення. Виберемо довільне $\delta > 0$ і будь-які $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, пов'язані співвідношенням $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1(1 + \delta/2)$. З (57) виводимо

$$\mu_n^{\varepsilon_2, t}(B) \ge \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\mu_n^{\varepsilon_1, t}(B) > \frac{2+\delta}{2}\mu_n^{\varepsilon_1, t}(B) > \mu_n^{\varepsilon_1, t}(B) - \delta$$

і

$$\mu_n^{\varepsilon_2, t}(B) \le \mu_n^{\varepsilon_1, t}(B) + \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} < \mu_n^{\varepsilon_1, t}(B) + \delta,$$

звідки безпосередньо випливає (64). Зауважимо, що послідовність нерівностей у першій з цих оцінок наведено для випадку, коли $\operatorname{mes} V_{\varepsilon_1}(t) = \operatorname{mes} V_{\varepsilon_2}(t) = 2\varepsilon$ (нагадаємо, що $V_\varepsilon(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap [0,1]$); в інших випадках остаточну оцінку $\mu_n^{\varepsilon_2, t}(B) > \mu_n^{\varepsilon_1, t}(B) - \delta$ одержуємо з аналогічних міркувань (які не наводимо, щоб не обтяжувати викладки).

Лему доведено.

Повернемось до доведення теореми S. З лем 3 та 4 випливає, що

$$F^{\varepsilon}_{f^n \circ \varphi}(z, t) \to \mu(B_z) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{рівномірно по} \quad (z, t) \in J \times [0,1]. \tag{65}$$

Тепер можна показати, що послідовність $f^n \circ \varphi$ має границю у просторі $C^{\#}([0,1], I)$ і цією границею є випадкова функція $f^{\#} \circ \varphi$.

Виберемо довільно мале $\delta > 0$ і покладемо

$$\delta_* = \delta/4, \quad \varepsilon_0 = \delta_*, \quad \varepsilon_1 = \delta_*(1 + \delta_*), \quad \varepsilon_2 = \delta_*(1 + \delta_*)^2, \ \ldots, \ \varepsilon_k = 1.$$

Згідно з (65) існує номер $N_*(\delta)$ такий, що

$$\left|F^{\varepsilon_i}_{f^n \circ \varphi}(z, t) - \mu(B_z)\right| < \delta_* \quad \text{при} \quad n > N_*(\delta). \tag{66}$$

Візьмемо довільне $\varepsilon > \delta_*$. Якщо $\varepsilon > 1$, то $F^{\varepsilon}_{f^n \circ \varphi}(z, t) = F^{1}_{f^n \circ \varphi}(z, t)$, і, отже, достатньо розглянути $\varepsilon \le 1$. Тоді ε попаде в один з інтервалів $(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i]$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Нехай це буде інтервал $(\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k]$ і тоді $\varepsilon_k / \varepsilon < 1 + \delta/4$. Внаслідок (66) і леми 6 маємо

$$\left|F^{\varepsilon}_{f^n \circ \varphi}(z, t) - \mu(B_z)\right| \le$$

$$\le \left|F^{\varepsilon}_{f^n \circ \varphi}(z, t) - F^{\varepsilon_k}_{f^n \circ \varphi}(z, t)\right| + \left|F^{\varepsilon_k}_{f^n \circ \varphi}(z, t) - \mu(B_z)\right| < 2\delta_* \ \text{при} \ n > N_*(\delta). \tag{67}$$

Оскільки, за означенням, $F^{\varepsilon_k}_{f^{\#}\circ\varphi}(z,t) = \mu(B_z)$, то (67) можемо записати у вигляді

$$\left|F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z,t) - F^{\varepsilon}_{f^{\#}\circ\varphi}(z,t)\right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad \varepsilon \geq \frac{\delta}{4}, \quad n > N_*(\delta). \tag{68}$$

B. Перейдемо до r-вимірних усереднених функцій розподілу

$$F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z_1,\dots,z_r,t_1,\dots,t_r) = \prod_{s=1}^{r} F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z_s,t_s).$$

З (68) виводимо

$$\left|F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(r;z,t) - F^{\varepsilon}_{f^{\#}\circ\varphi}(r;z,t)\right| < 2^r\frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad \varepsilon > \frac{\delta}{4}, \quad n > N_*(\delta). \tag{69}$$

Нагадаємо, що простір $C^{\#}([0,1],I)$ наділено метрикою $\rho^{\#} = \rho^{\#}_{2m+1}$, і зауважимо, що оцінки (68) і (69) є рівномірними по $(z,t)\in J^r\times[0,1]^r$. Тому в (11), де $a = 2m+1$, вираз під знаком суми не перевищує $\sum_{r\geq 1}(2/a)^r\delta/2 = \delta/(2m-1)$ при $\varepsilon > \delta/4$ і $n > N_*(\delta)$. Отже, вираз під знаком min при кожному $\varepsilon > 0$ (і будь-якому цілому $m \geq 1$) є меншим за δ, як тільки $n > N_*(\delta)$. Це означає, що

$$\lim_{n\to\infty}\rho^{\#}(f^n\circ\varphi, f^{\#}\circ\varphi) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{70}$$

Таким чином, $\omega_{\#}[\varphi] = \{f^{\#}\circ\varphi\}$.

II. *Властивості множини* $\omega_{\#}[\varphi]$. При $p = 1$ множина $\omega_{\#}[\varphi]$ складається з однієї „точки” — випадкового процесу $f^{\#}\circ\varphi$. Пересвідчимось, що ця „точка” є нерухомою точкою розширеної ДС (41), тобто покажемо, що

$$F_{f\circ f^{\#}\circ\varphi}(r;z,t) = F^{\varepsilon}_{f^{\#}\circ\varphi}(r;z,t), \qquad r = 1,2,\dots. \tag{71}$$

Оскільки для будь-якого цілого $r \geq 1$ маємо

$$F_{f^{\#}\circ\varphi}(z_1,\dots,z_r,t_1,\dots,t_r) = F_{f^{\#}}(z_1,\dots,z_r,\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_r)) = \prod_{s=1}^{r} F_{f^{\#}}(z_s,\varphi(t_s)),$$

то

$$F_{f^{\#}\circ\varphi}(t_1,\dots,t_r,z_1,\dots,z_r) = \prod_{s=1}^{r}\mu(B(z_s)),$$

звідки, зокрема, випливає, що $f^{\#}\circ\varphi$ є випадковим процесом з незалежними значеннями. Беручи до уваги інваріантність міри μ, виводимо

$$F_{f\circ f^{\#}\circ\varphi}(z_1,\dots,z_r,t_1,\dots,t_r) = \mathcal{F}_{f^{\#}\circ\varphi}\left(f^{-1}(B_{z_1}),\dots,f^{-1}(B_{z_r}),t_1,\dots,t_r\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{r}\mu\left(f^{-1}(B_{z_s})\right) = \prod_{s=1}^{r}\mu(B_{z_s}) = F_{f^{\#}\circ\varphi}(z_1,\dots,z_r,t_1,\dots,t_r),$$

тобто (71) виконується.

Теорему доведено.

Перейдемо до загального випадку, який описується наступною теоремою.

Теорема G. *Нехай* $f\in MC_{\mu,p}$. *Якщо інтервал* $\varphi([0,1])$ *належить замиканню басейну* $\overline{\mathcal{E}_f(\mu)}$ *міри* μ, *то* ω-*гранична множина* $\omega_{\#}[\varphi]$ *траєкторії* $S^n[\varphi]$ *динамічної системи* (4) *складається з випадкових функцій і є циклом періоду* p *розширеної динамічної системи* (41). *Точніше,*

$$\omega_\#[\varphi] = \left\{ f^\# \circ \varphi,\ f \circ f^\# \circ \varphi,\ \ldots,\ f^{p-1} \circ f^\# \circ \varphi \right\}, \tag{72}$$

де $f^\# : \mathcal{E}_f(\mu) \to I$ *— випадковий процес з незалежними значеннями, заданий своєю функцією розподілу*

$$F_{f^\#}(z, x) = p\mu(B_z \cap E_i) \quad \textit{при} \quad x \in \bigcup_{j \ge 0} \operatorname{int} f^{-jp}(E_i), \quad 0 \le i \le p-1, \tag{73}$$

$E_0, E_1, \ldots, E_{p-1}$ *— компоненти носія міри* μ.

Зауважимо, що в умовах теореми G кожна функція $\zeta_k \in \omega_\#[\varphi]$ є випадковим процесом з незалежними значеннями з функцією розподілу

$$F_{\zeta_k}(z, t) = p\mu(B_z \cap E_{(i+k) \bmod p}) \quad \text{при} \quad t \in \varphi^{-1}\left(\bigcup_{j \ge 0} \operatorname{int} f^{-jp}(E_i) \right), \quad 0 \le i \le p, \tag{74}$$

і, отже, випадкові функції $\zeta_k(t)$ визначено при всіх t з $[0, 1]$ за винятком нуль-множини $G_* = \varphi^{-1}(\overline{E_*})$. Зазначимо, що (74) випливає з рівностей

$$F_{\zeta_k}(z, t) = p\mu(f^{-k}(B_z) \cap E_i),$$

$$\mu(E_{(i+k) \bmod p} \cap B_z) = \mu(f^{-k}(B_z) \cap E_{(i+k) \bmod p}) = \mu(f^{-k}(B_z) \cap E_i),$$

перша з яких є наслідком (51) і (42), а друга — наслідком інваріантності міри μ.

Доведення. Носій міри μ складається з p компонент $E_0, E_1, \ldots, E_{p-1}$, причому $\mu(E_i) = 1/p$ (як випливає з нормованості й інваріантності μ). Тому відображення $g = f^p$ має p нормованих інваріантних (взаємно сингулярних) мір

$$\mu_i(B) = p\mu(B \cap E_i), \quad B \in \mathcal{B}, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{75}$$

і при цьому $\sup \mu_i = E_i$. Міри μ_i задовольняють (SIM)-умови і, отже, $g \in \bigcup_{i=0}^{p-1} MC_{\mu_i, 1}$.

1. Наведемо спочатку доведення (з огляду на його простоту) для випадку, коли $\varphi([0, 1]) \subset \mathcal{E}_f(\mu)$. Оскільки

$$\mathcal{E}_f(\mu) = \bigcup_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}_g(\mu_i) \quad \text{і} \quad \mathcal{E}_g(\mu_i) \cap \mathcal{E}_g(\mu_j) = \varnothing, \quad i \ne j, \tag{76}$$

то інтервал $\varphi([0, 1])$ належить одному з басейнів $\mathcal{E}_g(\mu_1), \mathcal{E}_g(\mu_2), \ldots, \mathcal{E}_g(\mu_{p-1})$, наприклад $\mathcal{E}_g(\mu_k)$. Тому за теоремою S

$$\rho^\#(g^n \circ \varphi,\ g_k^\# \circ \varphi) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{77}$$

де $g_k^\# : \mathcal{E}_g(\mu_k) \to I$ — випадковий процес з незалежними значеннями з функцією розподілу

$$F_{g_k^\#}(z, x) = p\mu_k(B_z \cap E_k), \quad B_z = (-\infty, z] \cap J. \tag{78}$$

Визначимо випадкову функцію $f^\# : \mathcal{E}_f(\mu) \to I$ таким чином:

$$f^\#(w) = g_i^\#(w), \quad w \in \mathcal{E}_g(\mu_i), \quad i = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{79}$$

З огляду на (76) це визначення є коректним: з нього випливає, що $f^\#$ — випадковий процес з незалежними значеннями з функцією розподілу (73). Тоді з (77), (79) і леми 3 маємо

$$\rho^{\#}(f^i \circ f^{np} \circ \varphi,\ f^i \circ f^{\#} \circ \varphi) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{80}$$

що еквівалентно (72).

2. Розглянемо загальний випадок, коли $\varphi([0,1]) \subset \overline{\mathscr{E}_f(\mu)}$. Інтервал $\varphi([0,1])$ розбивається точками нуль-множини $G_* = \varphi^{-1}(E_*)$ на p відкритих підмножин $C_i = \varphi^{-1}(\mathscr{E}_{f^p}(\mu_i))$, $i = 0, 2, \ldots, p-1$ (деякі з них можуть виявитись порожніми). Кожна множина C_i, у свою чергу, складається з не більше ніж зліченного числа відкритих інтервалів $C_{ij} = \varphi^{-1}(\operatorname{int} f^{-jp} E_i)$, $j = 0, 1, \ldots$, причому

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j \ge s} \operatorname{mes} G_{ij} = 0. \tag{81}$$

Для будь-якої функції $\zeta \in \mathfrak{R}([0,1], I)$ і довільної множини $G \subset [0,1]$ покладемо

$$\langle \zeta(t) \rangle_G = \begin{cases} \zeta(t) & \text{при} \quad t \in G, \\ 0 & \text{при} \quad t \notin G \end{cases}$$

і покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \rho^{\#}(\langle f^{np} \circ \varphi \rangle_{G_i},\ \langle f^{\#} \circ \varphi \rangle_{G_i}) = 0 \tag{82}$$

(якщо $G = \varnothing$ приймемо $\rho^{\#}(\langle f^{np} \circ \varphi \rangle_G, \langle f^{\#} \circ \varphi \rangle_G) = 0$). Для цього, діючи за схемою доведення теореми S, маємо дослідити збіжність при $n \to \infty$ послідовності усереднених функцій розподілу

$$F^{\varepsilon,i}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) = \frac{1}{\operatorname{mes} V^i_\varepsilon(t)} \int\limits_{V^i_\varepsilon(t)} \chi_{B_z}(f^{np}(\varphi(\tau)))\,d\tau,$$

$$(z,t) \in JG_i \times G_i, \qquad V^i_\varepsilon(t) = V_\varepsilon(t) \cap G_i. \tag{83}$$

Поклавши

$$V^{ij}_\varepsilon(t) = V_\varepsilon(t) \cap G_{ij} \quad \text{і} \quad F^{\varepsilon,ij}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) = \frac{1}{\operatorname{mes} V^{ij}_\varepsilon(t)} \int\limits_{V^{ij}_\varepsilon(t)} \chi_{B_z}(f^{np}(\varphi((\tau)))\,d\tau,$$

функцію (83) запишемо у вигляді

$$F^{\varepsilon,i}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) = \frac{1}{\operatorname{mes} V^i_\varepsilon(t)} \sum_{j\ge 0} \operatorname{mes} V^{ij}_\varepsilon(t)\, F^{\varepsilon,ij}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t). \tag{84}$$

При $V^{ij}_\varepsilon(t) \ne \varnothing$ так само, як і при доведенні теореми S, доводиться, що

$$\lim_{n\to\infty} F^{\varepsilon,ij}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) = \mu_i(B_z \cap E_i) \tag{85}$$

рівномірно по $(z,t) \in J \times G_i$, незалежно від j. Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} F^{\varepsilon,i}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) = \mu_i(B_z \cap E_i) \tag{86}$$

рівномірно по $(z,t) \in J \times G_i$. Справді, оскільки

$$\operatorname{mes} V^i_\varepsilon(t) = \sum_{j\ge 0} \operatorname{mes} V^{ij}_\varepsilon(t),$$

то, якщо сума у правій частині (84) є скінченною для деякої початкової функції

$\varphi(t)$, з (85) безпосередньо одержуємо (86). В іншому випадку крім (85) візьмемо до уваги співвідношення

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{j\geq s}\operatorname{mes}V_\varepsilon^{ij} = 0, \tag{87}$$

яке є наслідком (81). Тоді для будь-якого $\delta > 0$ знайдуться цілі $s_* = s_*(\delta) > 0$ і $n_* = n_*(\delta, s_*) > 0$ такі, що

$$\frac{1}{\operatorname{mes}V_\varepsilon^i(t)}\sum_{j\geq s_*}\operatorname{mes}V_\varepsilon^{ij}(t) < \frac{\delta}{4} \quad \text{і} \quad \left|F^{\varepsilon,ij}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) - \mu_i(B_z\cap E_i)\right| < \frac{\delta}{2}s_*$$

при $n > n_*$. Отже,

$$\left|F^{\varepsilon,i}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) - \mu_i(B_z\cap E_i)\right| \leq \frac{1}{\operatorname{mes}V_\varepsilon^i(t)}\sum_{j\geq 0}\operatorname{mes}V_\varepsilon^{ij}(t)\left|F^{\varepsilon,ij}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) - \mu_i(B_z\cap E_i)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{2}{\operatorname{mes}V_\varepsilon^i(t)}\sum_{j\geq s_*}\operatorname{mes}V_\varepsilon^{ij}(t)\right| + \sum_{j=0}^{j=s_*-1}\left|F^{\varepsilon,ij}_{f^{np}\circ\varphi}(z,t) - \mu_i(B_z\cap E_i)\right| < \delta,$$

що і доводить (86). За тими самими міркуваннями, що і при доведенні теореми S, з (86) виводимо (82).

Виходячи з означення метрики $\rho^\#$, маємо

$$\rho^\#(f^{np}\circ\varphi,\, f^\#\circ\varphi) \leq \sum_{i=0}^{p-1}\rho^\#(\langle f^{np}\circ\varphi\rangle_{G_i},\, \langle f^\#\circ\varphi\rangle_{G_i}). \tag{88}$$

З (88), (82) і леми 3 випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty}\rho^\#(f^i\circ f^{np}\circ\varphi,\, f^i\circ f^\#\circ\varphi) = 0,$$

з якої отримуємо (72). Перевірка того, що функції $f^i\circ f^\#\circ\varphi$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, утворюють цикл ДС (41), виконується так само, як у теоремі S.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Якщо $f\in MC_{\mu,p}$, то початкові функції $\varphi(t)$, для яких $\varphi([0,1])\subset\mathscr{E}_f(\mu)$, будемо називати μ-допустимими. З теореми G випливає, що при $p > 1$ різним μ-допустимим початковим функціям відповідають, взагалі кажучи, різні ω-граничні множини. Якщо ж $p = 1$, то маємо протилежну ситуацію: траєкторії всіх μ-допустимих початкових функцій мають одну й ту саму ω-граничну множину. Наприклад, відображення

$$h:\ x \to 4x(1-x), \qquad x\in[0,1], \tag{89}$$

належить до класу $MC_{\mu_*,1}$, де $\mu_*(dw) = \dfrac{dw}{\pi\sqrt{w(1-w)}}$, $w\in[0,1]$, і, отже, $\mathscr{E}_h(\mu_*) = (0,1)$. Тоді за теоремою S для ДС (4), де $f = h$, всі траєкторії притягуються (у метриці $\rho^\#$) до нерухомої точки $\{\zeta^\#\}$ розширеної ДС (41), де $\zeta^\#$ — випадковий процес з незалежними значеннями з функцією розподілу

$$F_{\zeta_*}(t,z) = \frac{1}{\pi}\int_0^z\frac{dw}{\sqrt{w(1-w)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{z}, \qquad t\in[0,1], \quad z\in[0,1].$$

***Зауваження* 2.** Явище автостохастичності в розглядуваних динамічних системах (а отже, і у відповідних різницевих рівняннях з неперервним часом) не є чимось екзотичним, оскільки (SIM)-умови мають досить загальний характер, у всякому разі, в класі унімодальних відображень. Нехай унімодальне відображення f залежить гладким чином від деякого параметра, наприклад, $\lambda \in [a, b]$. Тоді замість f пишемо f_λ. Виходячи з робіт [9 – 11], можна показати, що для досліджених там широких класів відображень f_λ (зокрема, із згаданого вище класу SU) множина

$$\left\{\lambda \in [a, b] : \exists \text{ міра } \mu_\lambda \text{ і ціле } p_\lambda > 0 \text{ такі, що } f_\lambda \in MC_{\mu\lambda, p\lambda}\right\}$$

матиме додатну міру Лебега. Тоді автостохастичність у ДС (4) буде фізично реалізовна — матиме місце на множині параметрів додатної міри.

***Зауваження* 3.** В [1] для ДС (4) в якості розширеного фазового простору використано простір напівнеперервних зверху функцій з метрикою Хаусдорфа для графіків і за окресленою у вступі схемою побудовано ω-граничні множини траєкторій $S[\varphi] = f^n \circ \varphi$. У випадку, коли $f \in MC_{\mu, p}$ і $\varphi([0,1]) \subset \overline{\mathscr{E}_f(\mu)}$, ці ω-граничні множини складаються з функцій, які кожному $t \in [0, 1]$ ставлять у відповідність певний (замкнений) інтервал, що визначає лише область можливих (допустимих) значень функції $f^n \circ \varphi(t)$ при великих значеннях n. Водночас використання розширеного фазового простору $\mathfrak{R}$ з метрикою $\rho^\#$ дозволяє одержати значно більшу інформацію про поведінку функції $f^n \circ \varphi(t)$, коли $n \to \infty$, а саме, не тільки відшукати інтервал допустимих значень функції, але і вказати (за допомогою твердження 2) розподіл імовірностей на цьому інтервалі.

1. *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu.* Difference equations and their applications // Ser. Math. and its Appl. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – Vol. 250. – 358 p.
2. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Ideal turbulence; attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1992. – **2**, № 1. – P. 31 – 36.
3. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* From one dimensional to infinite dimensional dynamical systems: Ideal turbulence // Ukr. Math. J. – 1996. – **48**, № 12. – P. 1817 – 1842.
4. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N.* Self-stochasticity in dynamical systems as a scenario for deterministic spatio-temporal chaos // Chaos and Nonlinear Mech. Ser. B. – 1995. – **4**. – P. 172 – 181.
5. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Difference equations and dynamical systems generated by some classes of boundary-value problems // Proc. Steklov Inst. Math. – 2004. – **244**. – P. 264 – 279.
6. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Мир, 1974. – 480 с.
7. *Keller G., Nowicki T.* Spectral theory, zeta functions and the distribution of periodic points for Collet – Eckmann maps. – Preprint, 1991.
8. *Корнфельд И. П., Синай Я. Т., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
9. *Jakobson M. V.* Absolutely continuous invariant measure for one-parameter families of one-dimensional maps // Communs Math. Phys. – 1981. – **81**. – P. 39 – 88.
10. *Lyubich M.* Almost any real quadratic map is either regular or stochastic // Ann. Math. – 2002. – **156**. – P. 1 – 78.
11. *Avila A., Lyubich M., de Melo W.* Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps // Invent. math. – 2003. – **154**. – P. 451 – 550.

Одержано 12.10.2005,
після доопрацювання — 02.03.2006