УДК 517.9

О. Є. Гентош (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

УЗГОДЖЕНО БІГАМІЛЬТОНОВІ СУПЕРКОНФОРМНІ АНАЛОГИ ІНТЕГРОВНИХ ЗА ЛАКСОМ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Compatibly bi-Hamiltonian superanalogs of the known Lax-integrable nonlinear dynamical systems are obtained by using the relationship for the Casimir functionals of central extensions of the Lie algebra of superconformal even vector fields and its joint semidirect sum.

За допомогою співвідношення для функціоналів Казіміра центральних розширень алгебри Лі суперконформних парних векторних полів та її приєднаної напівпрямої суми отримано узгоджено бігамільтонові супераналоги відомих інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем.

1. Вступ. В. Г. Дрінфельд та В. В. Соколов [1] досліджували зв'язок узгоджено бігамільтонової та інтегровної за Лаксом ієрархії рівнянь Кортевега – де Фріза на 2π-періодичному функціональному многовиді $M \subset C^{\infty}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R})$ з алгеброю Вірасоро як єдиним (з точністю до ізоморфізму) нетривіальним центральним розширенням 2-коциклом Гельфанда – Фукса алгебри Лі $\mathrm{Vect}(\mathbb{S})$ гладких векторних полів на колі $\mathbb{S}$. Зокрема, вони встановили, що коприєднана дія алгебри Вірасоро на її спряженому просторі генерує другу гамільтонову структуру для ієрархії Кортевега – де Фріза.

Д. А. Лейтес та Б. Л. Фейгін [2] довели, що існують три супераналоги алгебри Вірасоро у вигляді нетривіальних центральних розширень алгебри Лі суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|N} \simeq \left(\mathbb{S} \times \breve{\Lambda}_1^N\right)$, яке є супермноговидом з парною координатою $x \in \mathbb{S}$ та непарними координатами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$, при $N = 1, 2, 3$.

Використовуючи центральне розширення алгебри Лі $g := \mathrm{Vect}\left(\mathbb{S}^{1|1}\right)$ суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|1}$, П. П. Куліш [3] отримав узгоджено бігамільтоновий супераналог ієрархії Кортевега – де Фріза на 2π-періодичному функціональному супермноговиді $M^{1|1} \subset C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^{1|1}\right)$.

У п. 2 в межах $\mathcal{R}$-операторного методу [4, 5] показано, що рівняння для функціоналів Казіміра центрального розширення 2-коциклом Гельфанда – Фукса алгебри Лі $\tilde{g} := g \otimes \mathbb{C}(\lambda, \lambda^{-1})$ на орбітах поліноміального типу відповідної коприєднаної дії є еквівалентним рівнянню, яке породжує нескінченну послідовність градієнтів парних законів збереження для суперконформної ієрархії Кортевега – де Фріза [3] та її узагальнень за допомогою пари узгоджених суперімплектичних операторів.

В. Овсієнко та С. Роже [6] побудували тривимірне центральне розширення для приєднаної напівпрямої суми $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}) \ltimes C^{\infty}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R})$ алгебри Лі векторних полів, заданих на колі $\mathbb{S}$, за допомогою деякого узагальнення 2-коциклу Гельфанда – Фукса [2]. Неважко довести, що коприєднана дія алгебри Лі $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}) \ltimes C^{\infty}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R})$ на її спряженому просторі генерує другу гамільтонову структуру для ієрархії Каупа – Броера [7 – 9].

У п. 3 за допомогою $\mathcal{R}$-операторного методу показано, що рівняння для функціоналів Казіміра для тривимірного центрального розширення супераналогом 2-коциклу Овсієнка – Роже алгебри Лі $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} \otimes \mathbb{C}(\lambda, \lambda^{-1})$, де $\mathcal{U} :=$

$:= \mathrm{Vect}\left(\mathbb{S}^{1|1}\right) \ltimes C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^{1|1}\right)$ — приєднана напівпряма сума суперконформної алгебри Лі, на деякій орбіті поліноміального типу відповідної коприєднаної дії є еквівалентним рівнянню, яке породжує нескінченну послідовність градієнтів парних законів збереження для суперконформної ієрархії Каупа – Броера за допомогою пари узгоджених суперімплектичних операторів.

2. Суперконформна алгебра Лі та супераналоги ієрархій Кортевега – де Фріза та Бенні – Каупа. Суперконформну групу Лі утворюють гладкі перетворення суперкола $\mathbb{S}^{1|1} \simeq \left(\mathbb{S}^1 \times \breve{\Lambda}_1\right)$

$$\mathbb{S}^{1|1} \ni (x,\theta) \mapsto \left(\bar{x},\bar{\theta}\right),$$

які задовольняють умову

$$D_\theta \bar{x} = \bar{\theta}\left(D_\theta \bar{\theta}\right) \quad \text{або} \quad D_\theta = \left(D_\theta \bar{\theta}\right) D_{\bar{\theta}},$$

де $D_\theta := \partial/\partial\theta + \theta\partial/\partial x$ — непарна суперпохідна, така, що $D_\theta^2 = \partial/\partial x$, а відповідну суперконформну алгебру Лі $\mathcal{G}$ задають парні векторні поля на $\mathbb{S}^{1|1}$ у вигляді

$$\mathcal{G} := \Big\{ K_F = F\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(D_\theta F)D_\theta :$$
$$F := F(x,\theta) = f(x) + \theta\alpha(x),\ \pi(f) = 0,\ \pi(\alpha) = 1 \Big\},$$

комутатор яких визначають за правилом

$$\begin{gathered}[K_F, K_Q] = K_{[F,Q]}, \qquad K_F, K_Q \in \mathcal{G}, \\ [F,Q] = F\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}(D_\theta F)(D_\theta Q).\end{gathered} \tag{1}$$

Тобто суперконформна алгебра Лі $\mathcal{G}$ ізоморфна простору парних 2π-періодичних функцій $C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\breve{\Lambda}_1;\mathbb{R}^{1|0}\right)$ з комутатором (1), а спряжений простір $\mathcal{G}^*$ алгебри Лі $\mathcal{G}$ відносно скалярного добутку на $C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\breve{\Lambda}_1;\mathbb{R}^{1|1}\right)$

$$\langle l, F\rangle = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\, lF,$$

де $l \in \mathcal{G}^*$, $F \in \mathcal{G}$, ізоморфний простору непарних 2π-періодичних функцій $C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\breve{\Lambda}_1;\mathbb{R}^{0|1}\right)$.

Алгебра Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ розкладається у пряму суму двох підалгебр Лі $\tilde{\mathcal{G}} := \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$, де

$$\tilde{\mathcal{G}}_+ := \left\{ \tilde{F}(x,\theta;\lambda) = \sum_{k\geq 0}^{<<\infty} F_k(x,\theta)\lambda^k : F_k \in \mathcal{G},\ \lambda\in\mathbb{C} \right\},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_- := \left\{ \tilde{Q}(x,\theta;\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{N}} Q_j(x,\theta)\lambda^{-j} : Q_j \in \mathcal{G},\ \lambda\in\mathbb{C} \right\},$$

а тому крім комутатора (1) на ній можна ввести ще один комутатор у вигляді

$$\left[\tilde{F}, \tilde{Q}\right]_{\mathcal{R}} = \left[\mathcal{R}\tilde{F}, \tilde{Q}\right] + \left[\tilde{F}, \mathcal{R}\tilde{Q}\right], \qquad \tilde{F}, \tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{G}},$$

де $\mathcal{R} = \frac{1}{2}(P_+ - P_-)$, P_+, P_- — проектори відповідно на підалгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}_+$ та $\tilde{\mathcal{G}}_-$. Існує нескінченна множина спарювань

$$\left(\tilde{l}, \tilde{F}\right)_p = \mathrm{res}_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda^p \left\langle \tilde{l}, \tilde{F} \right\rangle, \qquad p \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

на $\tilde{\mathcal{G}}_0^* \times \tilde{\mathcal{G}}$, де $\tilde{\mathcal{G}}_0^*$ — спряжений простір до алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ відносно $(\cdot, \cdot)_0$, кожне з яких породжує суперкососиметричну білінійну форму

$$\omega_p\left(\tilde{F}, \tilde{Q}\right) := \left(\tilde{F}, D_\theta^5 \tilde{Q}\right)_p, \tag{3}$$

де $\omega_0(\cdot, \cdot)$ — 2-коцикл Гельфанда – Фукса. За допомогою 2-коциклів (3) побудуємо центральні розширення алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ до просторів $\hat{\mathcal{G}}_p := \tilde{\mathcal{G}} \oplus_p \mathbb{R} \simeq \hat{\mathcal{G}}_0$ з відповідними комутаторами [4]:

$$\mathrm{ad}_p \hat{F}(\hat{Q}) := \left[\hat{F}, \hat{Q}\right]_p = \begin{pmatrix} \left[\tilde{F}, \tilde{Q}\right] \\ \omega_p\left(\tilde{F}, \tilde{Q}\right) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $\hat{F} := \left(\tilde{F}, a\right)^\tau$, $\hat{Q} := \left(\tilde{Q}, b\right)^\tau \in \hat{\mathcal{G}}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Комутатори, деформовані оператором $\mathcal{R}$, набирають вигляду

$$\mathrm{ad}_{p,\mathcal{R}} \hat{F}(\hat{Q}) := \left[\hat{F}, \hat{Q}\right]_{p,\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \left[\tilde{F}, \tilde{Q}\right]_{\mathcal{R}} \\ \omega_{p,\mathcal{R}}\left(\tilde{F}, \tilde{Q}\right) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де $\omega_{p,\mathcal{R}}\left(\tilde{F}, \tilde{Q}\right) = \omega_p\left(\mathcal{R}\tilde{F}, \tilde{Q}\right) + \omega_p\left(\tilde{F}, \mathcal{R}\tilde{Q}\right)$ для будь-якого $p \in \mathbb{Z}$. На спряженому просторі $\hat{\mathcal{G}}_0^*$ алгебри Лі $\hat{\mathcal{G}}_0$ за допомогою спарювань [4]

$$\left(\hat{l}, \hat{F}\right)_p = \left(\tilde{l}, \tilde{F}\right)_p + ca, \qquad c, a \in \mathbb{R},$$

де $\hat{l} = \left(\tilde{l}, c\right) \in \hat{\mathcal{G}}_0^*$, $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}_0^*$, комутатори (5) генерують ієрархію дужок Лі – Пуассона

$$\{\gamma, \mu\}_p\left(\tilde{l}\right) = \left(\tilde{l}, \left[\nabla_{l,p}\gamma\left(\tilde{l}\right), \nabla_{r,p}\mu\left(\tilde{l}\right)\right]_{\mathcal{R}}\right)_p + c\omega_p\left(\nabla_{l,p}\gamma\left(\tilde{l}\right), \nabla_{r,p}\mu\left(\tilde{l}\right)\right) =:$$

$$=: \left(\nabla_{l,0}\gamma\left(\tilde{l}\right), \vartheta_p \nabla_{r,0}\mu\left(\tilde{l}\right)\right)_0, \tag{6}$$

де $\mu, \gamma \in D\left(\tilde{\mathcal{G}}_0^*\right)$, $\nabla_{l,p}$ та $\nabla_{r,p}$ — оператори лівого та правого градієнта відносно спарювання (2) для кожного $p \in \mathbb{Z}$, а $\vartheta_p : \tilde{\mathcal{G}} \to \tilde{\mathcal{G}}_0^*$ — суперімплектичні оператори на $\tilde{\mathcal{G}}_0^*$.

Згідно з дослідженнями, проведеними у роботах [4, 5], функціонали Казіміра $\gamma \in I\left(\mathcal{G}_0^*\right)$, які для елемента $\hat{l} \in \mathcal{G}_0^*$ задовольняють рівняння

$$\mathrm{ad}_0^*\left(\nabla_{l,p}\gamma\left(\tilde{l}\right), a\right)\left(\hat{l}\right) = 0, \qquad p \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де ad_0^* — оператор коприєднаної дії алгебри Лі $\hat{\mathcal{G}}_0$ з комутатором (4) відносно спарювання $(\cdot,\cdot)_0$ на $\hat{\mathcal{G}}_0^* \times \hat{\mathcal{G}}_0$, перебувають в інволюції щодо дужок Лі – Пуассона (6) і задають гамільтонові потоки

$$\frac{d\hat{l}}{d\tau_p} = \mathrm{ad}_0^*\left(\mathcal{R}\nabla_{l,p}\,\gamma(\tilde{l}), a\right)(\hat{l}) = \left(\left\{\tilde{l},\gamma\right\}_p(\tilde{l}), 0\right)$$

для будь-яких $p \in \mathbb{Z}$ й $a \in \mathbb{R}$. У випадку $p = -1$ та $c = -1/2$ рівняння (7) еквівалентне співвідношенню

$$\frac{1}{2}D_\theta^5\Phi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{l}\,\Phi\right) - \frac{1}{2}\tilde{l}\,\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \frac{1}{2}\left(D_\theta\tilde{l}\right)(D_\theta\Phi) = 0, \tag{8}$$

де $\Phi(\tilde{l}) := \nabla_{l,-1}\,\gamma(\tilde{l}) \in \lambda\tilde{\mathcal{G}}_-$.

Редукуємо співвідношення (8) на орбіти поліноміального типу коприєднаної дії $\mathrm{ad}_{-1,\mathcal{R}}^*$ алгебри $\hat{\mathcal{G}}_0$.

Якщо $\tilde{l} := \tilde{l}(x;\lambda) = \xi + \theta(u-\lambda)$, де $(u,\xi)^\tau \in \overline{M}^{1|1} \subset C^\infty\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^{1|1}\right)$, то співвідношення, які задають зв'язок лівого градієнта функціонала $\gamma \in I\left(\mathcal{G}_0^*\right)$ відносно спарювання $(\cdot,\cdot)_{-1}$ з лівим градієнтом функціонала

$$\bar{\gamma} := \gamma\big|_{\overline{M}^{1|1}} = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\,\bar{\gamma}[u,\xi;\lambda],$$

набирають вигляду

$$\delta\gamma(\tilde{l}) := \left(\delta\tilde{l}, \Phi(\tilde{l})\right)_{-1} = (\delta\xi + \theta\delta u, \Phi_0 + \theta\Phi_1) =$$
$$= \left(\left\langle (\delta u, \delta\xi)^\tau, \varphi(x;\lambda)\right\rangle\right),$$

де $\Phi(x,\theta;\lambda) = \Phi_0(x;\lambda) + \theta\Phi_1(x;\lambda)$, $\pi(\Phi_0) = 0$, $\pi(\Phi_1) = 1$, а $\varphi(x;\lambda) :=$ $:= \nabla_l\,\bar{\gamma}[u,\xi;\lambda] = (\Phi_0, -\Phi_1)^\tau \in T^*\left(\overline{M}^{1|1}\right)$ задовольняє рівняння

$$\bar{\vartheta}\varphi(x;\lambda) = \lambda\,\bar{\eta}\,\varphi(x;\lambda), \tag{9}$$

де $\varphi(x;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\varphi_j\lambda^{-j}$, при $|\lambda| \to \infty$, $\varphi_j = \nabla_l\,\bar{\gamma}_j[u,\xi]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, та $\varphi_0 \in \mathrm{Ker}\,\bar{\eta}$, з узгодженою парою суперімплектичних операторів $\bar{\eta}$, $\bar{\vartheta}$: $T^*\left(\overline{M}^{1|1}\right) \to T\left(\overline{M}^{1|1}\right)$:

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} -2\partial & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\vartheta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial^3 - (u\partial + \partial u) & -\left(\xi\partial + \frac{1}{2}\partial\xi\right) \\ -\left(\partial\xi + \frac{1}{2}\xi\partial\right) & \frac{1}{2}(u - \partial^2) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

З рівняння (9) отримуємо нескінченну множину градієнтів функціоналів $\bar{\gamma}_j \in D\left(\overline{M}^{1|1}\right)$, $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$\varphi_0 = (1,0)^\tau, \qquad \varphi_1 = \left(\frac{1}{2}u, -2\xi_x\right)^\tau,$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{3}{8}u^2 - \frac{1}{8}u_{xx} - \frac{3}{2}\xi\xi_x, -3u\xi_x - \frac{3}{2}u_x\xi + 2\xi_{xxx}\right)^\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Відповідна послідовність парних локальних функціоналів

$$\bar{\gamma}_0 = \int_0^{2\pi} u\,dx, \qquad \bar{\gamma}_1 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}u^2 - \xi\xi_x\right)dx,$$
$$\bar{\gamma}_2 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{8}u^3 + \frac{1}{16}u_x^2 - \frac{3}{2}u\xi\xi_x - \xi_x\xi_{xx}\right)dx, \tag{11}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

за допомогою пари суперімплектичних операторів (10) породжує нескінченну ієрархію узгоджено бігамільтонових нелінійних динамічних систем на 2π-періодичному функціональному супермноговиді $\overline{M}^{1|1}$:

$$\left(\frac{du}{dt_j}, \frac{d\xi}{dt_j}\right)^\tau = -\overline{\eta}\nabla_l\bar{\gamma}_{j+1}[u,\xi] = -\overline{\vartheta}\nabla_l\bar{\gamma}_j[u,\xi], \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

де $\nabla_l : \overline{M}^{1|1} \to T^*\left(\overline{M}^{1|1}\right)$ — оператор лівого градієнта на супермноговиді $\overline{M}^{1|1}$. При $j = 1$ співвідношення (12) задає супераналог рівняння Кортевега – де Фріза [1]

$$\frac{du}{dt_1} = -\frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x - 3\xi\xi_{xx},$$
$$\frac{d\xi}{dt_1} = -\xi_{xxx} + \frac{3}{2}u\xi_x + \frac{3}{4}u_x\xi.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Суперконформна ієрархія нелінійних динамічних систем Кортевега – де Фріза* (12) *на* 2π*-періодичному функціональному супермноговиді* $\overline{M}^{1|1} \subset C^\infty\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{1|1}\right)$ *має нескінченну послідовність парних законів збереження* (11), *інволютивних щодо дужок Лі – Пуассона* $\{\cdot,\cdot\}_{\overline{\eta}}$ *та* $\{\cdot,\cdot\}_{\overline{\vartheta}}$, *породжених узгодженими суперімплектичними операторами* $\overline{\eta} = \vartheta_0\big|_{\overline{M}^{1|1}}$ *та* $\overline{\vartheta} = \vartheta_{-1}\big|_{\overline{M}^{1|1}}$.

Для елемента $\tilde{l} := \tilde{l}(x;\lambda) = (\xi + \lambda\zeta) + \theta(u + \lambda v - \lambda^2)$, де $(u, v, \xi, \zeta)^\tau \in \breve{M}^{2|2} \subset C^\infty\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2|2}\right)$, зв'язок лівого градієнта функціонала $\gamma \in I\left(\mathcal{G}_0^*\right)$ відносно спарювання $(\cdot,\cdot)_{-1}$ з лівим градієнтом функціонала

$$\breve{\gamma} := \gamma\big|_{\breve{M}^{2|2}} = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\,\breve{\gamma}[u, v, \xi, \zeta; \lambda]$$

задається співвідношенням

$$\delta\gamma\left(\tilde{l}\right) := \left(\delta\tilde{l}, \Phi\left(\tilde{l}\right)\right)_{-1} = \left(\delta(\xi + \lambda\zeta) + \theta\delta(u + \lambda v), \Phi_0 + \theta\Phi_1\right) =$$
$$= \left(\left\langle(\delta u, \delta v, \delta\xi, \delta\zeta)^\tau, \varphi(x;\lambda)\right\rangle\right),$$

де $\Phi(x,\theta;\lambda)=\Phi_0(x;\lambda)+\theta\Phi_1(x;\lambda)$, $\pi(\Phi_0)=0$, $\pi(\Phi_1)=1$, а також $\varphi(x;\lambda):=$ $:=\nabla_l\breve{\gamma}[u,v,\xi,\zeta;\lambda]=(\Phi_0,\lambda\Phi_0,-\Phi_1,-\lambda\Phi_1)^\tau\in T^*\left(\breve{M}^{2|2}\right)$ задовольняє рівняння (9) з узгодженою парою суперімплектичних операторів $\breve{\eta}$, $\breve{\vartheta}:T^*\left(\breve{M}^{2|2}\right)\to$ $\to T\left(\breve{M}^{2|2}\right)$:

$$\breve{\eta}=\begin{pmatrix} v\partial+\partial v & -2\partial & \zeta\partial+\frac{1}{2}\partial\zeta & 0\\ -2\partial & 0 & 0 & 0\\ \partial\zeta+\frac{1}{2}\zeta\partial & 0 & -\frac{1}{2}v & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},$$
$$\breve{\vartheta}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial^3-(u\partial+\partial u) & 0 & -\left(\xi\partial+\frac{1}{2}\partial\xi\right) & 0\\ 0 & -2\partial & 0 & 0\\ -\left(\partial\xi+\frac{1}{2}\xi\partial\right) & 0 & -\frac{1}{2}(u-\partial^2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Враховуючи, що

$$\varphi(x;\lambda)\simeq\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\varphi_j\lambda^{-j},\qquad \varphi_j=\nabla_l\breve{\gamma}_j[u,v,\xi,\zeta],$$

при $|\lambda|\to\infty$, з рівняння (9) знаходимо нескінченну множину градієнтів функціоналів $\breve{\gamma}_j\in D\left(\breve{M}^{2|2}\right)$, $j\in\mathbb{Z}_+$:

$$\varphi_0=(0,1,0,0)^\tau,\qquad \varphi_1=\left(1,\frac{1}{2}v,0,-2\zeta_x\right)^\tau,$$
$$\varphi_2=\left(\frac{1}{2}v,\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}v^2-\frac{3}{2}\zeta\zeta_x,-2\zeta_x,-3v\zeta_x-\frac{3}{2}v_x\zeta-2\xi_x\right)^\tau,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

з відповідною послідовністю парних локальних функціоналів

$$\breve{\gamma}_0=\int_0^{2\pi}v\,dx,\qquad \breve{\gamma}_1=\int_0^{2\pi}\left(u+\frac{1}{4}v^2-\zeta\zeta_x\right)dx,$$
$$\breve{\gamma}_2=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}uv+\frac{1}{8}v^3-\frac{3}{2}v\zeta\zeta_x-\xi\zeta_x+\xi_x\zeta\right)dx, \tag{14}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

яка за допомогою пари суперімплектичних операторів (13) породжує нескінченну ієрархію узгоджено бігамільтонових нелінійних динамічних систем на 2π-періодичному функціональному супермноговиді $\breve{M}^{2|2}$:

$$\left(\frac{du}{dt_j},\frac{dv}{dt_j},\frac{d\xi}{dt_j},\frac{d\zeta}{dt_j}\right)^\tau=-\breve{\eta}\nabla_l\breve{\gamma}_{j+1}[u,v,\xi,\zeta]=-\breve{\vartheta}\nabla_l\breve{\gamma}_j[u,v,\xi,\zeta],\quad j\in\mathbb{Z}_+, \tag{15}$$

де $\nabla_l : \breve{M}^{2|2} \to T^*(\breve{M}^{2|2})$ — оператор лівого градієнта на супермноговиді $\breve{M}^{2|2}$. При $j = 2$ маємо супераналог нелінійної динамічної системи Бенні – Каупа [7]

$$\frac{du}{dt_2} = -\frac{1}{4}v_{xxx} + \frac{1}{2}u_x v + uv_x - 3\xi\zeta_{xx} - \xi_x\zeta_x,$$

$$\frac{dv}{dt_2} = u_x + \frac{3}{2}vv_x - 3\zeta\zeta_{xx},$$

$$\frac{d\xi}{dt_2} = -\zeta_{xxx} + u\zeta_x + \frac{3}{4}v_x\xi + \frac{1}{2}v\xi_x,$$

$$\frac{d\zeta}{dt_2} = \xi_x + \frac{3}{2}v\zeta_x + \frac{3}{4}v_x\zeta.$$

Отже, має місце така теорема.

Теорема 2. *Суперконформна ієрархія нелінійних динамічних систем Бенні – Каупа* (15) *на* 2π*-періодичному функціональному супермноговиді* $\breve{M}^{2|2} \subset C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2|2})$ *має нескінченну послідовність парних законів збереження* (14), *інволютивних щодо дужок Лі – Пуассона* $\{\cdot,\cdot\}_{\breve{\eta}}$ *та* $\{\cdot,\cdot\}_{\breve{\vartheta}}$, *породжених узгодженими суперімплектичними операторами* $\breve{\eta} = \vartheta_0\big|_{\breve{M}^{2|2}}$ *та* $\breve{\vartheta} = \vartheta_{-1}\big|_{\breve{M}^{2|2}}$.

Таким чином, встановлено, що нескінченні послідовності інволютивних парних локальних законів збереження для супераналогів ієрархій нелінійних динамічних систем Кортевега – де Фріза (11) та Бенні – Каупа (14) є редукціями на орбіти коприєднаної дії алгебри Лі суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|1}$ відповідних функціоналів Казіміра та перебувають в інволюції щодо редукованих на ці орбіти дужок Лі – Пуассона (6).

Згідно з градієнтно-голономним методом [7], наслідком з теорем 1, 2 є існування зображення Лакса для суперконформних ієрархій Кортевега – де Фріза (12) та Бенні – Каупа (15). У роботі [3] показано, що спектральна задача з інваріантним відносно ієрархії Кортевега – де Фріза (12) параметром $\lambda \in \mathbb{R}$ у просторі функцій $y \in L_\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \breve{\Lambda}^1; \mathbb{C}^{1|1})$ набирає вигляду

$$\left(-D_\theta^3 + \tilde{l}\right)\bar{y} = 0, \tag{16}$$

де $\bar{y} := \bar{y}(x,\theta) = f(x) + \theta\psi(x)$.

Слід зазначити, що спектральний параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ у задачі (16) є інваріантним відносно усіх суперконформних ієрархій динамічних систем, асоційованих з елементами $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ вигляду

$$\tilde{l} = \left(\xi + \sum_{k=1}^{N-1}\xi_k\lambda^k\right) + \theta\left(u + \sum_{k=1}^{N-1}u_k\lambda^k - \lambda^N\right),$$

де $(u, u_k, \xi, \xi_k)^\tau \in M^{N|N} \subset C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{N|N})$, зокрема суперконформної ієрархії Бенні – Каупа (15).

3. Супераналог ієрархії Каупа – Броера, асоційованої з приєднаною напівпрямою сумою суперконформної алгебри Лі. Алгебру Лі $\mathcal{U}$ задають пари вигляду $(K(F), A)^{\tau} \in \mathcal{U}$, де $K(F) \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^{1|1})$ — парне суперконформне векторне поле на $\mathbb{S}^{1|1}$ для будь-яких $F \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \breve{\Lambda}_1; \mathbb{R}^{1|0}\right)$ та $A \in$ $\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \breve{\Lambda}_1; \mathbb{R}^{1|0}\right)$, комутатор яких визначають за правилом

$$\left[\begin{pmatrix} K(F) \\ A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K(Q) \\ B \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} K([F, Q]) \\ K(F)B - K(Q)A \end{pmatrix},$$

$$[F, Q] = F\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}(D_{\theta} F)(D_{\theta} Q),$$

$$K(F)B - K(Q)A = F\frac{\partial B}{\partial x} - Q\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{2}(D_{\theta} F)(D_{\theta} B) - \frac{1}{2}(D_{\theta} Q)(D_{\theta} A),$$

де $K_F, K_Q \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^{1|1})$, $A, B \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \breve{\Lambda}_1; \mathbb{R}^{1|0}\right)$. Тобто суперконформна алгебра Лі $\mathcal{U}$ ізоморфна простору парних 2π-періодичних функцій $C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \breve{\Lambda}_1; \mathbb{R}^{2|0}\right)$ з комутатором

$$[\mathcal{F}, \mathcal{Q}] = \begin{pmatrix} [F, Q] \\ K(F)B - K(Q)A \end{pmatrix}, \tag{17}$$

де $\mathcal{F} := (F, A)^{\tau}$, $\mathcal{Q} := (Q, A)^{\tau} \in \mathcal{U}$, а її спряжений простір $\mathcal{U}^*$ відносно скалярного добутку на $C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \breve{\Lambda}_1; \mathbb{R}^{2|2}\right)$:

$$\langle\langle \mathcal{L}, \mathcal{F} \rangle\rangle = \langle \ell, F \rangle + \langle m, A \rangle, \tag{18}$$

де $\mathcal{L} := (\ell, m) \in \mathcal{U}^*$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, ізоморфний простору непарних 2π-періодичних функцій $C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \breve{\Lambda}_1; \mathbb{R}^{0|2}\right)$.

Алгебра Лі $\tilde{\mathcal{U}}$ розкладається у пряму суму двох підалгебр Лі $\tilde{\mathcal{U}} := \tilde{\mathcal{U}}_+ \oplus$ $\oplus \tilde{\mathcal{U}}_-$, де

$$\tilde{\mathcal{U}}_+ := \left\{ \tilde{\mathcal{F}}(x, \theta; \lambda) = \sum_{k \geq 0}^{<<\infty} \mathcal{F}_k(x, \theta)\lambda^k : \mathcal{F}_k \in \mathcal{U}, \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_- := \left\{ \tilde{\mathcal{Q}}(x, \theta; \lambda) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_j(x, \theta)\lambda^{-j} : \mathcal{Q}_j \in \mathcal{U}, \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

а отже, крім комутатора (17) на ній можна ввести ще один комутатор у вигляді

$$[\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{Q}}]_{\mathcal{R}} = [\mathcal{R}\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{Q}}] + [\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{R}\tilde{\mathcal{Q}}],$$

де $\mathcal{R} = \frac{1}{2}(P_+ - P_-)$, P_+, P_- — проектори відповідно на підалгебри Лі $\tilde{\mathcal{U}}_+$ та $\tilde{\mathcal{U}}_-$. Існує нескінченна множина спарювань

$$\left(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{F}}\right)_p = \mathrm{res}_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda^p \left\langle\left\langle \tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{F}} \right\rangle\right\rangle, \quad p \in \mathbb{Z},$$

на $\tilde{\mathcal{U}}_0^* \times \tilde{\mathcal{U}}$, де $\tilde{\mathcal{U}}_0^*$ — спряжений простір до алгебри Лі $\tilde{\mathcal{U}}$ відносно $(\cdot,\cdot)_0$, кожне з яких породжує суперкососиметричну білінійну форму

$$\overline{\omega}_p\big(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big) \;:=\; \operatorname{res}_{\lambda\in\mathbb{C}}\lambda^p\,\overline{\omega}_0\big(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big), \tag{19}$$

де $\overline{\omega}_0 := \left(\overline{\omega}_{0,1}, \overline{\omega}_{0,2}, \overline{\omega}_{0,3}\right)^\tau$ — супераналог тривимірного 2-коциклу Овсієнка – Роже [6]:

$$\overline{\omega}_{0,1}\big(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big) \;:=\; \omega\big(\tilde{F},\tilde{Q}\big),$$

$$\overline{\omega}_{0,2}\big(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big) \;:=\; \big\langle \tilde{F}, D_\theta^3\tilde{B}\big\rangle - \big\langle \tilde{Q}, D_\theta^3\tilde{A}\big\rangle,$$

$$\overline{\omega}_{0,3}\big(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big) \;:=\; 2\big\langle \tilde{A}, D_\theta\tilde{B}\big\rangle.$$

Побудуємо центральні розширення алгебри Лі $\tilde{\mathcal{U}}$ до просторів

$$\hat{\mathcal{U}}_p := \tilde{\mathcal{U}} \oplus_p \mathbb{R}^3 \simeq \hat{\mathcal{U}}_0$$

з відповідними комутаторами [4]

$$\operatorname{ad}_p\hat{\mathcal{F}}\big(\hat{\mathcal{Q}}\big) \;:=\; \big[\hat{\mathcal{F}},\hat{\mathcal{Q}}\big]_p \;=\; \begin{pmatrix} \big[\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big] \\ \overline{\omega}_p\big(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big)\end{pmatrix}, \tag{20}$$

де $\hat{\mathcal{F}} := \big(\tilde{\mathcal{F}}, a\big)^\tau$, $\hat{\mathcal{Q}} := \big(\tilde{\mathcal{Q}}, b\big)^\tau \in \hat{\mathcal{U}}_0$, $a, b \in \mathbb{R}^3$, за допомогою тривимірних 2-коциклів (19). На алгебрі Лі $\hat{\mathcal{U}}_0$ комутатори, деформовані оператором $\mathcal{R}$, набирають вигляду

$$\operatorname{ad}_{p,\mathcal{R}}\hat{\mathcal{F}}\big(\hat{\mathcal{Q}}\big) \;:=\; \big[\hat{\mathcal{F}},\hat{\mathcal{Q}}\big]_{p,\mathcal{R}} \;=\; \begin{pmatrix} \big[\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big]_{\mathcal{R}} \\ \overline{\omega}_{p,\mathcal{R}}\big(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big)\end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

де $\overline{\omega}_{p,\mathcal{R}}\big(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big) = \overline{\omega}_p\big(\mathcal{R}\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{Q}}\big) + \overline{\omega}_p\big(\tilde{\mathcal{F}},\mathcal{R}\tilde{\mathcal{Q}}\big)$ для будь-якого $p \in \mathbb{Z}$. На спряженому просторі $\hat{\mathcal{U}}_0^*$ алгебри Лі $\hat{\mathcal{U}}_0$ за допомогою спарювань

$$\big(\hat{\mathcal{L}},\hat{\mathcal{F}}\big)_p \;=\; \big(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\mathcal{F}}\big)_p + c^\tau a, \quad c, a \in \mathbb{R}^3,$$

де $\hat{\mathcal{L}} = \big(\tilde{\mathcal{L}}, c^\tau\big) \in \hat{\mathcal{U}}_0^*$, $\tilde{\mathcal{L}} \in \tilde{\mathcal{U}}_0^*$, комутатори (21) генерують ієрархію дужок Лі – Пуассона

$$\{\gamma,\mu\}_p\big(\tilde{\mathcal{L}}\big) \;=\; \Big(\tilde{\mathcal{L}}, \big[\nabla_{l,p}\gamma\big(\tilde{\mathcal{L}}\big), \nabla_{r,p}\mu\big(\tilde{\mathcal{L}}\big)\big]_{\mathcal{R}}\Big)_p + c^\tau\,\overline{\omega}_p\big(\nabla_{l,p}\gamma\big(\tilde{\mathcal{L}}\big), \nabla_{r,p}\mu\big(\tilde{\mathcal{L}}\big)\big) \;=:$$

$$=:\; \big(\nabla_{l,0}\,\gamma\big(\tilde{\mathcal{L}}\big), \vartheta_p\nabla_{r,0}\big(\tilde{\mathcal{L}}\big)\big)_0, \tag{22}$$

де $\gamma, \mu \in D\big(\tilde{\mathcal{U}}_0^*\big)$, $\nabla_{l,p}$, $\nabla_{r,p}$ — оператори лівого та правого градієнта відносно спарювання (18) для кожного $p \in \mathbb{Z}$, а $\vartheta_p : \tilde{\mathcal{U}} \to \tilde{\mathcal{U}}_0^*$ — суперімплектичні оператори на $\tilde{\mathcal{U}}_0^*$.

За допомогою підходу, розвиненого у роботах [4, 5], можна довести, що функціонали Казіміра $\gamma \in I(\mathcal{U}_0^*)$, які для елемента $\mathcal{L} \in \mathcal{U}_0^*$ задовольняють рівняння

$$\mathrm{ad}_0^*\left(\nabla_{l,p}\gamma(\tilde{\mathcal{L}}), a\right)(\hat{\mathcal{L}}) = 0, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{R}^3, \tag{23}$$

де ad_0^* — оператор коприєднаної дії алгебри Лі $\hat{\mathcal{U}}_0$ з комутатором (20) відносно спарювання $(\cdot,\cdot)_0$ на $\hat{\mathcal{U}}_0^* \times \hat{\mathcal{U}}_0$, перебувають в інволюції щодо дужок Лі – Пуассона (22) і задають гамільтонові потоки

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{d\tau_p} = \mathrm{ad}_0^*\left(\mathcal{R}\,\nabla_{l,p}\gamma(\tilde{\mathcal{L}}), a\right)(\hat{\mathcal{L}}) = \left(\left\{\tilde{\ell}, \gamma\right\}_{\vartheta_p}(\tilde{\mathcal{L}}), \{\tilde{m}, \gamma\}_{\vartheta_p}(\tilde{\mathcal{L}}), 0\right)$$

для будь-яких $p \in \mathbb{Z}$ і $a \in \mathbb{R}^3$. У випадку $p = -1$ та $c = (0, -2, 1)^\tau$ рівняння (23) еквівалентне співвідношенням

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\ell}\tilde{\Phi}\right) - \frac{1}{2}\tilde{\ell}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Phi} - \frac{1}{2}\left(D_\theta\tilde{\ell}\right)\left(D_\theta\tilde{\Phi}\right) + 2D_\theta^3\tilde{A} - \\
- \frac{1}{2}\tilde{m}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{A} - \frac{1}{2}(D_\theta\tilde{m})\left(D_\theta\tilde{A}\right) = 0, \\
-2D_\theta^3\tilde{\Phi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{m}\tilde{\Phi}\right) + \frac{1}{2}\tilde{m}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Phi} - \frac{1}{2}(D_\theta\tilde{m})\left(D_\theta\tilde{\Phi}\right) - 2D_\theta\tilde{A} = 0,
\end{gathered} \tag{24}$$

де $\left(\tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{L}}), \tilde{A}(\tilde{\mathcal{L}})\right)^\tau := \nabla_{l,-1}\gamma(\tilde{\mathcal{L}}) \in \lambda\tilde{\mathcal{U}}_-$.

Покажемо, що на орбіті поліноміального типу коприєднаної дії $\mathrm{ad}_{-1,\mathcal{R}}^*$ співвідношення (24) редукуються до рівняння (9) для супераналога ієрархії нелінійної динамічної системи Каупа – Броера.

Якщо $\tilde{l} := \tilde{l}(x;\lambda) = \zeta + \theta v$ та $\tilde{m} := \tilde{m}(x;\lambda) = \xi + \theta(u - \lambda)$, де $(v, u, \zeta, \xi)^\tau \in \tilde{M}^{2|2} \subset C^\infty\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2|2}\right)$, то співвідношення, які задають зв'язок лівого градієнта функціонала $\gamma \in I(\mathcal{U}_0^*)$ відносно спарювання $(\cdot,\cdot)_{-1}$ з лівим градієнтом функціонала

$$\tilde{\gamma} := \gamma\big|_{\tilde{M}^{2|2}} = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\,\tilde{\gamma}[v, u, \zeta, \xi; \lambda],$$

набирають вигляду

$$\begin{gathered}
\delta\gamma(\tilde{\mathcal{L}}) := \left((\delta\tilde{\ell}, \delta\tilde{m}), \left(\Phi(\tilde{\mathcal{L}}), A(\tilde{\mathcal{L}})\right)^\tau\right) = \\
= \left((\delta(\zeta + \theta v), \delta(\xi + \theta u)), (\Phi_0 + \theta\Phi_1, A_0 + \theta A_1)^\tau\right) = \\
= \left(\left\langle(\delta v, \delta u, \delta\zeta, \delta\xi)^\tau, \varphi(x;\lambda)\right\rangle\right),
\end{gathered}$$

де $\Phi(x,\theta;\lambda) = \Phi_0(x;\lambda) + \theta\Phi_1(x;\lambda)$, $A(x,\theta;\lambda) = A_0(x;\lambda) + \theta A_1(x;\lambda)$, $\pi(\Phi_0) = 0$, $\pi(\Phi_1) = 1$, $\pi(A_0) = 0$, $\pi(A_1) = 1$, а також $\varphi(x;\lambda) := \nabla_l\tilde{\gamma}[v, u, \zeta, \xi; \lambda] = (\Phi_0, A_0, -\Phi_1, -A_1)^\tau \in T^*\left(\tilde{M}^{2|2}\right)$ задовольняє рівняння (9) з узгодженою парою суперімплектичних операторів $\tilde{\eta}, \tilde{\vartheta} : T^*\left(\tilde{M}^{2|2}\right) \to T\left(\tilde{M}^{2|2}\right)$:

$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial & 0 & 0 \\ -\partial & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\vartheta} = \begin{pmatrix} -(\upsilon\partial + \partial\upsilon) & -u\partial + 2\partial^2 & -\left(\zeta\partial + \frac{1}{2}\partial\zeta\right) & \frac{1}{2}\partial\xi - \xi\partial \\ -\partial u - 2\partial^2 & -2\partial & -\frac{1}{2}\partial\xi & 0 \\ -\left(\partial\zeta + \frac{1}{2}\zeta\partial\right) & -\frac{1}{2}\xi\partial & \frac{1}{2}\upsilon & \frac{1}{2}(u - 4\partial) \\ \frac{1}{2}\xi\partial - \partial\xi & 0 & \frac{1}{2}(u + 4\partial) & 2 \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Оскільки має місце розклад

$$\varphi(x;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \varphi_j \lambda^{-j}, \qquad \varphi_j = \nabla_l \tilde{\gamma}_j[\upsilon, u, \zeta, \xi],$$

при $|\lambda| \to \infty$, з рівняння (9) отримуємо нескінченну множину градієнтів функціоналів $\tilde{\gamma}_j \in D(\tilde{M}^{2|2})$, $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$\varphi_0 = \left(0, \frac{1}{4}, 0, 0\right)^\tau, \qquad \varphi_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)^\tau,$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}\upsilon, -\xi_x, -\zeta_x\right)^\tau,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}(u^2 + 2u_x + 2\upsilon - \xi\xi_x, 2u\upsilon - 2\upsilon_x + 3\xi_x\zeta - \zeta\xi_x,$$

$$-4u\xi_x - u_x\xi - 8\zeta_x - 8\xi_{xx}, -4u\zeta_x - 3u_x\xi - \upsilon_x\xi - 2\upsilon\xi_x + 8\zeta_{xx})^\tau,$$

. . . .

Відповідна послідовність парних локальних функціоналів

$$\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} u\,dx, \qquad \tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \upsilon\,dx, \qquad \tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (u\upsilon + 3\xi_x\zeta - \xi\zeta_x)\,dx,$$

$$\tilde{\gamma}_3 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(u^2\upsilon + u_x\upsilon - u\upsilon_x + \upsilon^2 - \upsilon\xi\xi_x + \frac{7}{3}u\xi_x\zeta -$$

$$- \frac{5}{3}u\xi\zeta_x - \frac{2}{3}u_x\xi\zeta + 4\xi_{xx}\zeta + 4\xi\zeta_{xx} - 4\zeta\zeta_x \Big)dx, \qquad (26)$$

. . . .

за допомогою пари суперімплектичних операторів (25) породжує нескінченну ієрархію узгоджено бігамільтонових нелінійних динамічних систем на 2π-періодичному функціональному супермноговиді $\tilde{M}^{2|2}$

$$\left(\frac{dv}{dt_j}, \frac{du}{dt_j}, \frac{d\zeta}{dt_j}, \frac{d\xi}{dt_j}\right)^{\tau} = -\tilde{\eta}\nabla_l\,\tilde{\gamma}_{j+1}[v, u, \zeta, \xi] = -\tilde{\vartheta}\nabla_l\,\tilde{\gamma}_j[v, u, \zeta, \xi], \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{27}$$

де $\nabla_l : \tilde{M}^{2|2} \to T^*\left(\tilde{M}^{2|2}\right)$ — оператор лівого градієнта на супермноговиді $\tilde{M}^{2|2}$. При $j = 2$ маємо супераналог рівняння Каупа – Броера

$$\frac{dv}{dt_2} = -v_{xx} + (uv)_x + \frac{3}{2}\xi_{xx}\zeta + \xi_x\zeta_x - \frac{1}{2}\xi\zeta_{xx},$$

$$\frac{du}{dt_2} = u_{xx} + uu_x + v_x - \frac{1}{2}\xi\xi_{xx},$$

$$\frac{d\zeta}{dt_2} = -2\zeta_{xx} + u\zeta_x + \frac{3}{4}u_x\zeta + \frac{1}{4}v_x\xi + \frac{1}{2}v\xi_x,$$

$$\frac{d\xi}{dt_2} = 2\xi_{xx} + u\xi_x + \frac{1}{4}u_x\xi + 2\zeta_x.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 3. *Суперконформна ієрархія нелінійних динамічних систем Каупа – Броера* (27) *на* 2π-*періодичному функціональному супермноговиді* $\tilde{M}^{2|2} \subset C^{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2|2}\right)$ *має нескінченну послідовність законів збереження* (26), *інволютивних щодо дужок Лі – Пуассона* $\{\cdot,\cdot\}_{\tilde{\eta}}$ *та* $\{\cdot,\cdot\}_{\tilde{\vartheta}}$, *породжених узгодженими суперімплектичними операторами* $\tilde{\eta} = \vartheta_0\big|_{\tilde{M}^{2|2}}$ *та* $\tilde{\vartheta} = \vartheta_{-1}\big|_{\tilde{M}^{2|2}}$.

При перетворенні Лі – Беклунда [7]

$$\tilde{l} = -\frac{1}{4}\tilde{\ell} - \frac{1}{4}\tilde{m}_x + \frac{1}{16}\tilde{m}(D_\theta\tilde{m}) \in \tilde{\mathcal{G}}^*, \tag{28}$$

де $\left(\tilde{\ell}, \tilde{m}\right) \in \tilde{\mathcal{U}}^*$, рівняння (9) для супераналога ієрархії Каупа – Броера (27) є рівносильним такому ж співвідношенню для суперконформної ієрархії Кортевега – де Фріза (12). Тому параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ у спектральній задачі (16) з потенціалом вигляду (28) інваріантний щодо суперконформної ієрархії Каупа – Броера (27). Отже, кожна система отриманої суперконформної ієрархії Каупа – Броера має зображення Лакса у вигляді умови сумісності двох лінійних матричних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dY}{dx} = AY, \tag{29}$$

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(u-\lambda) & 1 & \frac{1}{4}\xi \\ -\frac{1}{4}v + \frac{1}{8}\xi\zeta & \frac{1}{4}(u-\lambda) & \frac{1}{4}\zeta \\ -\frac{1}{4}\zeta & \frac{1}{4}\xi & 0 \end{pmatrix},$$

де $Y := (f, g, \phi)^{\tau} \in L_{\infty}\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{C}^{2|1}\right)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\phi = \psi + \frac{1}{4}\xi f$, та

$$\frac{dY}{dt_j} = (\lambda^{j+1}S)_+, \tag{30}$$

де $j \in \mathbb{Z}_+$, $S := S(x;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} S_j \lambda^{-j}$ — асимптотичний розклад суперматриці монодромії рівняння (29),

$$S_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

а нижній індекс „+" у формулі (31) позначає поліноміальну частину. Тобто має місце така теорема.

Теорема 4. *Суперконформна ієрархія Каупа – Броера* (27) *допускає матричну лінеаризацію типу Лакса у вигляді лінійних диференціальних рівнянь першого порядку* (29) *та* (30) *для кожного* $j \in \mathbb{Z}_+$.

Спектральний параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ у задачі (29) є інваріантним відносно усіх суперконформних ієрархій нелінійних динамічних систем, асоційованих з елементами $\tilde{\mathcal{L}} \in \tilde{\mathcal{U}}^*$, для яких

$$\tilde{\ell} := \left(\zeta + \sum_{k=1}^{N-1}\zeta_k\lambda^k\right) + \theta\left(v + \sum_{k=1}^{N-1}v_k\lambda^k\right),$$

$$\tilde{m} := \left(\xi + \sum_{k=1}^{N-1}\xi_k\lambda^k\right) + \theta\left(u + \sum_{k=1}^{N-1}u_k\lambda^k - \lambda^N\right),$$

де $(v, v_k, u, u_k, \zeta, \zeta_k, \xi, \xi_k)^\tau \in M^{2(N|N)} \subset C^\infty\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2(N|N)}\right)$.

4. Висновки. У статті запропоновано опис двох класів узгоджено бігамільтонових та інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем на 2π-періодичних функціональних супермноговидах на основі процедури редукування на відповідні орбіти поліноміального типу коприєднаної дії алгебри Лі суперконформних векторних полів рівняння для функціоналів Казіміра та за допомогою встановленого перетворення Лі – Беклунда доведено їх еквівалентність.

Наявність матричних зображень Лакса з інваріантним щодо еволюцій спектральним параметром дозволить розвинути для отриманих систем метод редукування на нелокальні інваріантні скінченновимірні суперпідпростори розв'язків типу Неймана та Баргмана [9 – 11] і звести пошук їх частинних розв'язків до інтегрування в квадратурах динамічних систем на скінченновимірних супермноговидах.

Автор вдячна проф. А. К. Прикарпатському за увагу до статті.

1. *Дринфельд В. Г., Соколов В. В.* Алгебра Ли и уравнения типа Кортевега – де Фриза // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. – М.: ВИНИТИ, 1984. – **15**. – С. 81 – 180.
2. *Лейтес Д. А., Фейгин Б. Л.* Новые супералгебры Ли струнных теорий // Теоретико-групповые методы в физике. – М.: Наука, 1983. – **1**. – С. 269 – 278.
3. *Кулиш П. П.* Аналог уравнения Кортевега – де Фриза для суперконформной алгебры // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **155**. – С. 142 – 148.
4. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
5. *Кулиш П. П., Рейман А. Г.* Гамильтонова структура полиномиальных пучков // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **161**. – С. 54 – 71.

6. *Овсиенко В., Роже С.* Расширение группы Вирасоро и алгебры Вирасоро с помощью модулей тензорных плотностей на S^1 // Функцион. анализ и его прил. – 1986. – **30**, № 2. – С. 86–88.
7. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 260 с.
8. *Blaszak M.* Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems. – New York: Springer, 1998. – 350 p.
9. *Прикарпатський Я. А., Притула М. М., Гентош О. Є.* Скінченновимірні редукції узагальненої динамічної системи Бюргерса та їх інтегровність // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 1. – С. 95–102.
10. *Prykarpatsky A., Hentosh O., Kopych M., Samuliak R.* Neumann – Bogoliubov – Rosochatius oscillatory dynamical systems and their integrability via dual moment maps. I // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**, № 2. – P. 98–113.
11. *Prykarpatsky A. K., Hentosh O. E., Blackmore D. L.* The finite-dimensional Moser type reductions of modified Boussinesq and super-Korteweg – de Vris Hamiltonian systems via the gradient-holonomic algorithm and the dual moment maps. I // Ibid. – 1997. – **4**, № 3 – 4. – P. 455–469.

Одержано 04.05.2005,
після доопрацювання — 13.09. 2005