УДК 517.938

В. В. Гафійчук, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів),
І. О. Лубашевський, канд. фіз.-мат. наук (Рос. відкр. ун-т, Москва)

Аналіз дисипативних структур на основі варіаційного принципу Гаусса

Для знаходження розв'язків дисипативних систем запропоновано варіаційний принцип Гаусса. На прикладі системи двох рівнянь реакції-дифузії знайдено наближені розв'язки у вигляді автосолітонів та періодичних дисипативних структур.

Для нахождения решений диссипативных систем предложен вариационный принцип Гаусса. На примере системы двух уравнений реакции-диффузии найдены приближенные решения в виде автосолитонов и периодических диссипативных структур.

1. Нехай на нескінченновимірному функціональному многовиді $M \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$, $p, m \in \mathbb{Z}_+$, задана нелінійна динамічна система $d\psi/dt = f[\psi]$, де $\psi \in M$, $f: M \to T(M)$ — гладкий за Фреше переріз дотичного розшарування $T(M)$ і $t \in \mathbb{R}$ — еволюційний параметр. Її можна зобразити у вигляді рівняння Ейлера — Лагранжа $-\operatorname{grad} \mathcal{L}[\psi, \psi_t] = 0$, тобто умови екстремальності функціонала $\mathcal{L} = \int\limits_{\mathbb{R}^p} dx \int\limits_0^t dt\, \mathcal{L}[\psi, \psi_t] : \delta\mathcal{L} = 0$. Тут за визначенням $\mathcal{L}[\psi, \psi_t] = \langle \varphi[\psi], \psi_t \rangle - H[\psi]$ — функція Лагранжа, причому елемент $\varphi[\psi] \in T^*(M)$ задовольняє рівняння типу Картана — Лакса $\varphi_t + f'^* \cdot \varphi = 0$, $H :\overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^p} dx H[\psi] = (\cdot, \cdot)$ — відповідний інваріант Гамільтона вихідної динамічної системи на M. Отже, якщо рівняння Картана — Лакса не має розв'язків, то динамічна система $d\psi/dt = f[\psi]$ не допускає зображення у вигляді рівняння Ейлера — Лагранжа.

Щоб обійти у випадку негамільтонових дисипативних динамічних систем цю проблему, скористаємось так званим модифікованим варіаційним принципом типу Гаусса. А саме, нехай задано функціонал $\mathcal{L}_\psi = \int\limits_{\mathbb{R}^p} dx \times (\dot\psi - f[\psi])^2$ над функціональним простором $T^*_\psi(M)$, параметризований елементами $\psi \in M$. Тоді очевидно, що умова $\delta\mathcal{L}_\psi = 0$ еквівалентна функціональному рівнянню $\dot\psi = f[\psi]$ на многовиді M. Тепер задача полягає в тому, щоб знайти таку однопараметричну півгрупу $\{\psi(t) \in M : t \in \mathbb{R}_+\}$, що $d\psi/dt|_{t=0} = f[\psi] \in T(M)$ задає векторне поле на M. Щоб цю задачу розв'язати, зауважимо, що безпосередній інтерес для нас мають лише такі функціональні підмноговиди даних Коші в M, які є інваріантними відносно векторного поля $d\psi/dt = f[\psi]$, $t \in \mathbb{R}_+$, і скінченновимірними. А саме, будемо вважати, що справджується наступна теорема [1] про центральний многовид.

Теорема 1. *Нехай M — банахів простір, що допускає норму всюди, окрім точки $0 \in M$, і $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ — напівпотік класу $C^{(0)}$, визначений в околі точки $0 \in M$. Крім того, $\psi(0) = 0$ і $\psi(t)$: $M \to M$ класу $C^{(k+1)}$ сумісно з $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, спектр лінійної півгрупи $\psi'_u(t): T(M) \to T(M)$ має вигляд $\exp\{t(\sigma_0 U \sigma_+)$, де $\exp(\sigma_0 t)$ лежить на одиничному колі, (тобто $\operatorname{Re}\sigma_0 = 0$), а $\exp(\sigma_+ t)$ лежить строго в середині одиничного кола для всіх $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ (тобто $\operatorname{Re}\sigma_+ < 0$). Нехай $M^n[0] \subset_\to T(M)$ — узагальнений власний півпростір, що відповідає частині спектра $\exp(t\sigma_0)$ на одиничному колі, і припустимо, що $\dim M^n[0] = n \in \mathbb{Z}_+$.*

Тоді існує окіл $M^n[\psi]$ точки $0 \in M$ і $C^{(k)}$-підмноговиду $M^n \subset M^n[\psi]$ розмірності $n \in \mathbb{Z}_+$, що містить точку $0 \in M$, дотикається до $M^n[0]$ і такий, що:

а) *якщо $u \in M$, $t \in \mathbb{R}_+$ і $\psi(t) \in M^n[\psi]$, то $\psi(t) \in M^n$;*

б) *якщо $t \in \mathbb{R}_+$ і $[\psi(t)]^m = \psi(mt)$ — визначене відображення і лежить в $M^n[\psi]$ для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$, то $\lim \psi(mt) \in M^n$.*

Таким чином, ми маємо можливість регулярним чином спроектувати нелінійну динамічну систему $d\psi/dt = f[\psi]$ на скінченновимірний інваріантний підмноговид $M^n \subset_\to M$, і тим самим одержати еквівалентну вихідній нелінійну динамічну систему на M^n, що вже задається системою звичайних диференціальних рівнянь для координат M^n.

Один із методів наближеної побудови цієї системи звичайних диференціальних рівнянь на M^n у випадку справедливості теореми 1 витікає із використання описаного вище модифікованого варіаційного принципу Гаусса, на якому ми зупинимось в п. 2.

В загальному випадку задача пошуку скінченновимірного многовиду [2, 3] зводиться до нелінійної системи звичайних функціонально-диференціальних рівнянь, що легко побачити з таких міркувань. Нехай многовид $M \approx J^{(\infty)}_{\text{top}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, тобто еквівалентний топологічному джет-многовиду, на якому задамо неявно скінченновимірний інваріантний підмноговид $M^n \subset_\to M$ у вигляді звичайного диференціального рівняння $M^n = \{\psi \in M : \varphi[\psi] = 0\}$. Оскільки підмноговид $M^n \subset_\to M$ інваріантний відносно векторного поля $d\psi/dt$ на M^n для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ то, очевидно, що повинно виконуватись тотожно співвідношення $L_{f(\varphi)}\varphi[\psi] = 0$ для всіх $\psi \in M^n$, де $f_{(\varphi)} = f|_{M^n}$ — проекція векторного поля $f: M \to T(M)$ на інваріантний підмноговид $M^n \subset_\to M$ і $L_{f(\varphi)}$ — відповідна похідна Лі [3, 4] вздовж цієї проекції.

Враховуючи явний вигляд похідної Лі, згідно з формулою Картана [4, 5] останню умову запишемо так: $\varphi'[\psi] \cdot f_{(\varphi)}[\psi] = 0$ для всіх $\psi \in M^n$, тобто коли $T^*(M) \ni \varphi[\psi] = 0$.

Враховуючи похідну Фреше з останньої рівності, знаходимо в явному вигляді вказану вище систему звичайних функціонально-диференціальних рівнянь для визначення елемента $\varphi[\psi] \in T^*(M)$ і тим самим скінченновимірного (apriori) інваріантного підмноговиду $M^n \subset_\to M$. Причому його розмірність $\dim M^n = n \in \mathbb{Z}_+$ визначається однозначно за мінімальним порядком $k(n) \in \mathbb{Z}_+$ джет-многовиду $J^{(k(n))}_{\text{tor}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset_\to J^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, в який вкладається елемент $\varphi[\psi] \in T^*(M)$. Отже, якщо в усіх точках інваріантного підмноговиду $M^n \subset_\to M$ виконані умови теореми 1 про спектр, то цей многовид буде центральним для векторного поля $d\psi/dt = f[\psi]$ на M і має назву атрактор. Зауважимо, що коли вихідна нелінійна динамічна система задана на гладкому функціональному многовиді M, то атрактор $M^n \subset_\to M$ може бути лише $C^{(k)}$-гладким.

2. Перейдемо тепер до аналізу описаної вище задачі в рамках варіаційного принципу типу Гаусса [5].

На відміну від інших методів цей метод є досить зручним для використання чисельно-аналітичних підходів дослідження поведінки траєкторій динамічної системи в околі атрактора при $t \to \infty$, що є суттєвим, враховуючи аналітичну складність задання вихідної динамічної системи на функціональному многовиді M.

Отже, нехай задана нелінійна динамічна система

$$d\psi/dt = f[\psi] \tag{1}$$

на гладкому функціональному многовиді M, що задає напівпотік $\psi(t) \in M$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$, причому в околі точки $\psi = \bar{\psi} \in M$ виконані умови теореми 1. Задамо функціонал типу Гаусса $\mathcal{L}_\psi \in D(T(M))$ за таким правилом:

$$\mathcal{L}_\psi = \int\limits_{\mathbb{R}^p} dx\,(\dot{\psi} - f[\psi])^2 : \quad T(M) \to \mathbb{R}. \tag{2}$$

Очевидно, що $\delta\mathcal{L}_\psi = 0 \Leftrightarrow \dot{\psi} = f[\psi]$ для всіх $\psi \in M$, де за умовою $\delta\dot{\psi} \neq 0$, $\delta\psi \equiv 0$. Необхідно тепер задати неявно інваріантний підмноговид $M^n \subset\!\!\to M$ за допомогою функціональних зображень. В цьому випадку поле $\psi(x)$ можна задати деяким класом функцій $\{\psi_j(x, u_1 \dots u_n)\}$, де $u_1 \dots u_n$ — набір незалежних параметрів, а подальша часова еволюція $\psi(x)$ визначається зміною за часом даних параметрів $u_1(t), \dots, u_n(t)$. Один із найпростіших способів задання інваріантного підмноговиду M^n можна визначити співвідношенням

$$\psi_j(x, t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(x)\, u_k(t), \quad n \geqslant m, \tag{3}$$

де $j = \overline{1, m}$, для всіх $x \in \mathbb{R}^p$ $\operatorname{rank}(\|\alpha_{jk}(x)\|_{j=\overline{1,m}}^{k=\overline{1,n}}) = n \in \mathbb{Z}_+$ і функції $u_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, є невизначеними для $t \in \mathbb{R}_+$ з даними Коші, що витікають із співвідношень (3). Оскільки число «вільних» параметрів в (3) рівне $(n - m) \in \mathbb{Z}_+$, то бачимо, що інваріантний многовид $M^n \subset\!\!\to M$ буде $(n - m)$-параметричним скінченновимірним підмноговидом в M.

Зауважимо також, що функції $\alpha_{jk}(x)$, $(j, k) = \overline{(1, m)} \times \overline{(1, n)}$, $x \in \mathbb{R}^p$, визначаються однозначно на основі теореми 1. Отже, підставляючи зображення (3) в (2), отримуємо на M^n еквівалентний функціонал $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{\psi \in M^n} \in D(T(M^n))$. З варіаційної умови Гаусса $\delta\mathcal{L}_\psi = 0$ знаходимо, що справедлива імплікація

$$\delta\mathcal{L}_{\psi \in M^n} = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{L}_u = 0, \tag{4}$$

де $\delta\dot{u} \neq 0$, $\delta u = 0$ для всіх $u \in M^n$, $u_t \in T(M^n)$. Щоб була виконана зворотна імплікація

$$\delta\mathcal{L}_u = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{L}_{\psi \in M^n} = 0, \tag{5}$$

необхідне виконання умов наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай $(m \times n)$-матриця $\|\alpha_{jk}\|$ є гладкою по $x \in \mathbb{R}^p$ і в* (5) *задовольняє такі умови на вектор $v(x) \in T^*(M^n)$:*

$$\left\{\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^p} dx\,(\alpha^*)_{kj}(x)\, v_j(x) = 0, \quad k = \overline{1, n}\right\} \Leftrightarrow \{v_j(x) = 0,\ j = \overline{1, m}\}. \tag{6}$$

Тоді підмноговид $M^n \subset\!\!\to M$, що задається виразом (5), *буде скінченновимірним інваріантним атрактором вихідної нелінійної динамічної системи* (1) *на M розмірності* $\dim M^n = n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення теореми 2 грунтується на тому, що коли виконана умова (6), то з рівності $\delta\mathcal{L}_u = \int\limits_{\mathbb{R}^p} dx\,\langle \alpha^*(x)\,\delta\mathcal{L}_\psi/\delta\dot{\psi}(x, t) \cdot \delta\dot{u}(t)\rangle$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, випливає рівність $\delta\mathcal{L}_\psi/\delta\dot{\psi}|_M = 0$, що еквівалентно умові $\delta\mathcal{L}_{\psi \in M^n} = 0$, тобто необхідній умові (5). Враховуючи, що виконані також необхідні умови на спектр в точці $\bar{\psi} \in M^n$ згідно з теоремою 1, переконуємось у справедливості твердження теореми 2.

Як наслідок теореми 2 справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 2. Тоді підмноговид $M^n \subset_{\to} M$ задається системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь вигляду*

$$du/dt = F(u), \quad u|_{t=0} = \bar{u} \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

де $u \in \mathbb{R}^n$ і $F: M^n \to T(M^n)$ — K-диференційоване векторне поле на M^n, $t \in \mathbb{R}_+$.

Доведення випливає з лінійності зображення (3) і справедливості імплікацій (4) і (5) згідно з теоремою 2. При цьому згідно з (3) многовид $M^n \subset_{\to} M$ буде $(n-m)$-параметричним. Саме векторне поле $F: M \to T(M^n)$ в (7) в явному вигляді випливає з (4) як рівняння Ейлера—Лагранжа, тобто $\delta\mathscr{L}_u / \delta\dot{u} = 0 \Leftrightarrow du/dt - F(u) = 0$ для всіх $u \in M^n$.

3. Запропонований вище алгоритм знаходження і опису атрактора нелінійної динамічної системи (1) можна ефективно застосувати у випадку дисипативної системи дифузійного типу:

$$d\psi/dt = D(\psi)\nabla_x^2 \psi + Q(\psi), \tag{8}$$

де $(m \times m)$-матриця $D(\psi)$ і вектор $Q(\psi) \in \mathbb{R}^m$ — гладкі функції своїх аргументів. Застосування варіаційного принципу типу Гаусса до (8) дає можливість описати її широкий спектр дисипативних структур (ДС), зокрема автосолітонних і періодичних по простору розв'язків, що мають важливе значення у їх застосуваннях [6—9].

Зупинимось на прикладі системи двох рівнянь реакції-дифузії, які для зручності перепишемо у вигляді

$$\partial\theta/\partial t = \tau_\theta^{-1} q(\theta, \eta, A) + D_\theta \nabla_x^2 \theta, \tag{9}$$

$$\partial\eta/\partial t = \tau_\eta^{-1} Q(\theta, \eta, A) + D_\eta \nabla_x^2 \eta. \tag{10}$$

Припустимо, що на границі такої системи виконані нейтральні граничні умови.

Розглянемо такі системи рівнянь, в яких при будь-яких значеннях параметрів існує лише один просторово однорідний розв'язок $\theta = \theta_h(A)$, $\eta = \eta_h(A)$, який знаходиться з рівнянь $q(\theta, \eta, A) = 0$, $Q(\theta, \eta, A) = 0$. Дисипативні структури в системі (9), (10) існують, коли за однією із змінних (θ) існує додатній зворотній зв'язок ($q'_\theta > 0$), а за другою — від'ємний ($Q'_\eta < 0$) і виконані умови $Q'_\theta q'_\eta > 0$), $D_\theta / D_\eta \ll 1$, тобто реалізується біфуркація Тьюрінга. У випадку, коли нуль-ізокліна $q(\theta, \eta, A) = 0$ має один екстремум (максимум чи мінімум), в системі можуть реалізовуватись так звані пічкові дисипативні структури. Якщо рівняння $q(\theta, \eta, A) = 0$ має два екстремуми, то дисипативні структури мають вигляд широких ДС [9]. Покажемо, як за допомогою варіаційного принципу Гаусса можна дослідити параметри таких ДС.

Для простоти розглянемо рівняння (9) і (10) з квадратичною і кубічною нелінійностями [8]. Нехай у першому випадку

$$q = \theta^2 - \eta, \quad Q = -\eta\gamma + \theta - A, \tag{11}$$

де параметр $\gamma \ll 1$. У випадку джерел (11) просторово однорідний розв'язок $\theta_h \approx A + A^2\gamma$, $\eta_h \approx A^2 + 2A^3\gamma$ втрачає стійкість при $A > 0$, внаслідок чого в системі спонтанно виникають періодичні розв'язки великої амплітуди за змінною θ. Характерний вигляд таких розв'язків системи (9), (10) можна встановити, виходячи з комп'ютерного моделювання чи якісного аналізу (див., наприклад, [9]).

Особливістю згаданих вище розв'язків є те, що змінна θ в деякій області локалізації порядку $l = \sqrt{D_\theta \tau_\theta}$ змінюється сильно, формуючи «пічок», а в області поза «пічком» змінюється плавно з характерною довжиною розподілу $L = \sqrt{D_\eta \tau_\eta}$. При цьому змінна η веде себе плавно у всій області локалізації структур за змінною θ. Тому природньо модельні розв'язки системи з нелінійностями (11) згідно з теоремою 2 записати в такому вигляді:

$$\theta = \theta_h + \frac{a}{\mathrm{ch}^2(x/l)} - \frac{b}{\mathrm{ch}^2(x/L)}, \tag{12}$$

$$\eta = \eta_h + \frac{d}{\mathrm{ch}^2(x/L)}.$$

Для знаходження параметрів $a \equiv u_1$, $b \equiv u_2$, $d \equiv u_3$ визначимо, чому дорівнює значення функціоналу

$$\widetilde{\mathscr{L}}_\phi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,[\dot\theta^2 - 2\dot\theta\,(l^2\nabla^2\theta + \theta^2 - \eta)\,\tau_\theta^{-1} + \dot\eta^2 -$$

$$- 2\dot\eta\,(L^2\nabla^2\eta - \gamma\eta + \theta - A)\,\tau_\eta^{-1}]. \tag{13}$$

З умов мінімальності функціоналу $\mathscr{L}_\phi$, враховуючи малість $\varepsilon = l/L \ll 1$, $\gamma \ll 1$, після тривіальних викладок одержуємо диференціальні рівняння для параметрів a, b, d:

$$\tau_\theta\left(\frac{2}{3}\dot a - \dot b\right) - \frac{8}{15}a^2 + a\left(\frac{8}{15} - \frac{4}{3}A - \frac{4}{3}b\right) - b^2 + 2Ab + d = 0,$$

$$\tau_\theta\left(\frac{2}{3}\dot b - \varepsilon\dot a\right) + \frac{2}{3}a^2\varepsilon + \frac{8}{15}b^2 - 2ab\varepsilon + 2aA\varepsilon -$$

$$-\frac{4}{3}Ab - \frac{2}{3}d = 0. \tag{14}$$

$$\tau_\eta\dot d + \frac{8}{15}d - a\varepsilon + \frac{2}{3}b = 0.$$

Система рівнянь (12)—(14) допускає стаціонарний розв'язок, який з точністю до малих величин $\varepsilon = l/L$ і γ має вигляд

$$a \approx 1 - \frac{5}{2}A, \quad b \approx \frac{3}{2}a\varepsilon - \frac{4}{5}d, \quad d \approx a^2\varepsilon\Big/\left(1 - \frac{5}{2}A\right). \tag{15}$$

Порівняння стаціонарних розв'язків (12), де a, b, d визначаються формулами (15), з результатами числового моделювання системи (9), (10) з нелінійностями (11), свідчить про хороший збіг одержаних результатів.

Важливим питанням є проблема стійкості просторово неоднорідних розв'язків (12). При застосуванні даного підходу немає необхідності розв'язувати складну спектральну задачу [9], а достатньо дослідити на стійкість систему (14). Не зупиняючись детально на аналізі стійкості, відзначимо, що оскільки по змінній θ в системі існує додатній зворотній зв'язок, а по змінних b і d — від'ємний, то існують такі значення параметрів $\tau_\theta/\tau_\eta < 1$, A, γ, при яких в системі реалізується граничний цикл. Детальний аналіз умов виникнення граничного циклу для системи (9), (10) з нелінійностями вигляду (11) показує, що періодичний режим реалізується на границі втрати стійкості стаціонарних структур, тому область локалізації такого режиму за параметром $\tau_\theta/\tau_\eta < 1$ досить вузька. Зменшення величини τ_θ/τ_η приводить до збільшення амплітуди пульсацій структур, і в кінцевому результаті система прямує до стійкого однорідного стану $\eta = \eta_h$, $\theta = \theta_h$. Цей факт підтверджується і числовим моделюванням [10].

Ми розглянули випадок, коли в системі реалізуються розв'язки типу автосолітонів [9]. При $A > A_c = 0$ можуть існувати періодичні пічкові ДС. Будемо вважати, що такі розв'язки мають період 2λ і запишемо модельні функції у вигляді

$$\theta = \frac{a}{\mathrm{ch}^2(x/l)} - b\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}x\right) + c, \tag{16}$$

$$\eta = d\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}x\right) + f. \tag{17}$$

У цьому випадку функціонал $\tilde{\mathscr{L}}_\phi$ (13) набуде вигляду

$$\tilde{\mathscr{L}}_\phi = \lambda\Big[\frac{2}{3}\dot{a}^2\tilde{\varepsilon} + \dot{b}^2/2 + \dot{c}^2 - 2\dot{a}\dot{b}\tilde{\varepsilon} + 2\dot{a}\dot{b}\tilde{\varepsilon} + \dot{d}^2/2 + \dot{f}^2 -$$

$$- 2\tau_\theta^{-1}\tilde{\varepsilon}\dot{a}\left(\frac{8}{15}a^2 - \frac{8}{15}a + b^2 + c^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{4}{3}ac - 2bc - d - f\right) +$$

$$+ 2\tau_\theta^{-1}\dot{b}\left(\frac{2}{3}a^2\tilde{\varepsilon} - 2ab\tilde{\varepsilon} + 2ac\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{2}bc - d/2\right) - 2\dot{c}\tau_\theta^{-1}\left(\frac{2}{3}a^2\tilde{\varepsilon} + c^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}b^2 - 2ab\tilde{\tilde{\varepsilon}} + 2ac\tilde{\varepsilon}\right) - 2\tau_\eta^{-1}\dot{d}\left(a\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{2}b - \right.$$

$$\left. - d\frac{\pi^2}{\lambda^2}L^2/2 - d\gamma/2\right) + 2\tau_\eta^{-1}\dot{f}\,(f\gamma - a\tilde{\varepsilon} - c + A)\Big], \tag{18}$$

де $\tilde{\varepsilon} = l/\lambda$.

З умов екстремальності (18) одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь. В більш простому випадку, який часто реалізується в такого роду системах, коли $b \equiv -c$, $d \equiv f$, стаціонарні розв'язки, на яких мінімізується функціонал (18), мають вигляд

$$a \approx 1, \quad b \approx \frac{2}{3}(2\tilde{\varepsilon} - A) - \pi^2L^2d/(3\lambda^2), \quad d \approx \frac{8}{3}\tilde{\varepsilon}. \tag{19}$$

У виразах (16)—(19) величина λ виступає як параметр. У цьому випадку можна знайти такі λ, при яких існують ДС вигляду (16), (17). В принципі можна вважати λ незалежним параметром і знайти оптимальні значення періоду ДС.

Коли нуль-ізокліна $q(\theta, \eta) = 0$ має два екстремуми, що характерно, наприклад, для нелінійностей $q = \theta - \theta^3 - \eta$, $\tau_\theta = \tau_\eta = 1$, $Q = -\eta\gamma + \theta - A$, аналіз розв'язків системи рівнянь (9), (10) є дещо більш громіздким, ніж наведений вище для квадратичної нелінійності. Як правило, системи звичайних диференціальних рівнянь, які одержують у цьому випадку, можна проаналізувати за допомогою числового моделювання. Тому наведемо результати для досить простого випадку, коли модельні функції вибираються у вигляді

$$\theta = \operatorname{th}\left(\frac{x - \xi}{l}\right) - \delta\,(x - \xi), \tag{20}$$

$$\eta = \mu\,(x - \xi)$$

і визначені на довжині $[0, \lambda]$. Вираховуючи функціонал (13) і мінімізуючи його, одержуємо рівняння руху для змінних ξ, μ, δ. Можна показати, що з точністю до малих величин $\varepsilon = l/L \ll 1$, $(\mu\mathscr{L})^2 \ll 1$, $\gamma \ll 1$ такі рівняння матимуть вигляд

$$\mu\dot{\xi}(2\lambda\xi - \lambda^2) + (\dot{\mu} + \delta)(\lambda^3/3 - \lambda^2\xi + \xi^2\lambda) - \xi^2 - (1 - A)(\lambda^2/2 - \lambda\xi) = 0,$$

$$\dot{\xi}(\lambda\xi - \lambda^2/2) + (\dot{\delta} + 2\delta - \mu)(\lambda^3/3 - \lambda^2\xi + \lambda\xi) = 0,$$

$$2\dot{\xi}/3l - (\dot{\delta}\delta + \mu\dot{\mu})(\lambda^2/2 - \lambda\xi) + \mu\lambda\left[1 - 2\xi/\lambda - A - \delta\lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{\lambda}\right)\right] = 0,$$

звідки визначається стаціонарний стан

$$\xi \approx \frac{1 - A}{2}\lambda, \quad \delta \approx \frac{(1 - A^2)\gamma}{(1/3 + A^2)\lambda}, \quad \mu \approx 2\delta. \tag{21}$$

Маючи значення δ, μ, ξ, ми визначаємо конкретний розв'язок (20), який реалізується при заданому параметрі A.

Якщо параметр біфуркації $A \leqslant -1/3$, то розв'язок у вигляді автосолітона будується наступним чином: вибирається довжина системи λ, яка згідно з тим, що розв'язок при $x = 0$ має виходити на однорідний стан $\eta = \eta_h$, $\theta = \theta_h$, тобто згідно з (21) $\lambda \approx \dfrac{(A^2 - 1)\, 2\xi\gamma}{\eta_h (1/3 + A^2)}$. Далі розв'язок (50) дзеркально відображається на відрізок $[\lambda, 2\lambda]$. В результаті автосолітон буде локалізований в околі точки $x = \lambda$ і його ширина дорівнює $2(\lambda - \xi)$. Якщо параметри системи такі, що $A \geqslant 1/\sqrt{3}$, то довжина системи вибирається так, щоб розв'язок при $x = \lambda$ виходив на однорідний стан: $\eta_{x=\lambda}| = \eta_h$, $\theta_{x=\lambda} = \theta_h$, тобто $\lambda \approx \xi + \eta_h/\mu$. В цьому випадку автосолітон будується дзеркальним відображенням розв'язку (20) відносно осі ординат. Ширина такого локалізованого в околі точки $x = 0$ автосолітона дорівнює 2ξ. Аналогічно можна сконструювати періодичні розв'язки типу ДС. Для цього потрібно врахувати, що необхідною умовою існування таких розв'язків є $|\theta(x = 0, \lambda)| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $|\eta(x = 0, \lambda)| < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, оскільки в противному випадку за рахунок нестійкості однорідного стану η_h і θ_h період структур буде іншим.

Таким чином, на конкретних прикладах показано, що за допомогою варіаційного принципу можна знаходити наближені розв'язки дисипативних систем, для яких точні аналітичні розв'язки, у всякому випадку на даний час, побудувати не вдається.

1. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.— 368 с.
2. *Генри Дж.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М.: Мир, 1985.— 376 с.
3. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем.— Киев: Наук. думка, 1991.— 375 с.
4. *Самойленко В. Г.* Квазивариантные деформации инвариантных подмногообразий гамильтоновых динамических систем и их эргодичность.— Киев, 1991.— 25 с.— (Препринт / АН Украины. Ин-т математики, 91.56).
5. *Vujanovic B. D., Jones S. E.* Variational methods in nonconservative phenomena.— London: Acad. press, 1989.— 370 p.
6. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах.— М. : Мир, 1979.— 512 с.
7. *Хакен Г.* Синергетика.— М. : Мир, 1980.— 404 с.
8. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическая биофизика.— М. : Наука, 1984.— 304 с.
9. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* Автосолитоны.— М. : Наука, 1991.— 180 с.
10. *Пульсирующие* автосолитоны в активных распределенных средах / В. В. Гафийчук, Б. С. Кернер, В. В. Осипов, И. И. Лазурчак // Микроэлектроника.— 1986.— 5, вып. 2.— С. 180—183.

Одержано 12.06.92