

УДК 517

А. І. Балінський, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Про дискретні моделі на одномірній решітці з заданою алгеброю Лі симетрії

З використанням найпростішого раціонального розв'язку класичного рівняння Янга—Бакстера, пуассонової реалізації алгебри Лі, відображення моменту і узагальнення L -операторів із конкретних прикладів побудовані пуассонові реалізації класичних $UBZF$ -алгебр. Для конкретних зображень груп і алгебр Лі встановлені достатні умови, які забезпечують виконання додаткових обмежень на образ відображення моменту.

С использованием простейшего рационального решения классического уравнения Янга—Бакстера, пуассоновой реализации алгебры Ли, отображения момента и обобщения L -операторов из конкретных примеров построены пуассоновы реализации классических $UBZF$ -алгебр. Для конкретных представлений групп и алгебр Ли установлены достаточные условия, обеспечивающие выполнение возникающих при этом ограничений на образ отображения момента.

r -Матричний метод, який виник у рамках методу оберненої задачі розсіювання, є найбільш сучасним і ефективним підходом до систем, які інтегруються [1]. Одержувані при цьому алгебраїчні структури (алгебри Янга—Бакстера—Замолодчикова—Фаддєєва, скорочено $UBZF$ -алгебри) лежать в основі класичних чи квантових інтегрованих систем. Ці алгебраїчні структури виявились у деякому розумінні всесущими. Вони з'являються і в квантовій теорії поля (теорія струн, конформні теорії поля, точно розв'язувані моделі статистичної фізики), і в теорії груп і алгебр Лі, і в топології (інваріанти вузлів і зчіплення, які одержуються за допомогою розв'язків рівнянь

Янга—Бакстера). На даний час розглянуто різні конкретні моделі як фізичні реалізації абстрактних $YBZF$ -алгебр [2, 3]. Тому природно розглянути і дослідити питання реалізації $YBZF$ -алгебр функціями на симплектичному многовиді, на якому задається модель. У даній роботі це питання розв'язується для дискретних моделей на одпомірній решітці з заданою алгеброю Лі симетрій.

1. r -Матричний метод і задача класифікації інтегровних дискретних систем. У застосуванні до одномірного дискретного випадку r -матричний метод полягає в наступному. Вводиться допоміжна лінійна задача, яка має вигляд різницевого матричного рівняння

$$\Phi_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda) \Phi_n(\lambda).$$

Матриця $L(\lambda)$, яка відповідає n -й частинці ($n = N_-, \dots, N_+$), діє в допоміжному векторному просторі V і є функціоналом динамічних змінних в n -му вузлі решітки і функцією спектрального параметра λ . Її називають дискретним L -оператором.

r -Матричний вигляд дужки Пуассона між матрицями $L_n(\lambda)$ означає, що існує матриця $r(\lambda)$, яка діє в просторі $V \otimes V$, не залежить від динамічних змінних, є розв'язком класичного рівняння Янга—Бакстера і така, що

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm}.$$

Матриця монодромії допоміжної лінійної задачі є впорядкованим добутком L -операторів

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda) \dots L_n(\lambda) \dots L_{-N}(\lambda)$$

і також задовольняє вказане вище співвідношення дужки Пуассона. За допомогою інваріантів матриці $T_N(\lambda)$, наприклад $\text{tr } T_N(\lambda)$, будується повний набір функціоналів на фазовому просторі системи, які інволютивні відносно заданої симплектичної структури.

На цьому шляху виникає задача класифікації інтегровних дискретних систем. В роботах [2, 3] описується наступний підхід до її розв'язання. r -Матричну дужку Пуассона з фіксованою r -матрицею пропонується розглядати як пуассонову структуру на множині \mathcal{M} матриць, які діють у просторі V і залежать від спектрального параметра λ . L -оператор дозволяє будувати пуассонове відображення із фазового простору в n -му вузлі решітки в множини \mathcal{M} , тобто пред'явити на цьому просторі набір функцій з пропонованою квадратичною від полів дужкою. Оскільки симплектичні листи в \mathcal{M} будуть мінімальними пуассоновими підмноговидами, то виникає задача опису інтегрального многовиду конкретних L -операторів з фіксованою залежністю від спектрального параметра для визначеної на множині \mathcal{M} дужки Пуассона. На даний час вказана задача повністю ще не розв'язана.

2. Про раціональні розв'язки класичних рівнянь Янга—Бакстера. Класичне рівняння Янга—Бакстера — це функціональне рівняння відносно матричнозначної мероморфної функції $r(\lambda) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$, яка залежить від змінної $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$[r_{12}(\lambda), r_{13}(\lambda + \mu)] + [r_{12}(\lambda), r_{23}(\mu)] + [r_{13}(\lambda + \mu), r_{23}(\mu)] = 0$$

для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тут $r_{ij}(\lambda) \in \text{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$, $V_1 = V_2 = V_3 = V$, означає ендоморфізм, який діє як $r(\lambda)$ на просторі $V_i \otimes V_j$ і тотожно на третьому просторі. Через те, що вказане рівняння записується в термінах дужки Лі, воно має сенс для $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ -значної функції $r(\lambda)$ з абстрактною алгеброю Лі \mathfrak{g} . $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ -значні розв'язки називаються «універсальними», бо з кожним таким розв'язком можна пов'язати розв'язок $(\rho \otimes \rho)r(\lambda) \in \text{End}(V \otimes V)$, де $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ — зображення алгебри Лі \mathfrak{g} .

Для скінченномірних комплексних простих алгебр Лі розв'язки класичних рівнянь Янга—Бакстера детально вивчені в роботі [4]. Вони класифіковані як раціональні, тригонометричні та еліптичні.

Розглянемо випадок напівпростих алгебр Лі і відповідні йому найпростіші «універсальні» розв'язки, які не мають полюсів на безмежності. Сформу-

люємо наступне твердження і опишемо основні моменти його доведення, які будуть потрібні надалі.

Твердження [4]. Нехай \mathfrak{g} — напівпроста алгебра Лі над \mathbb{C} , $\{X_i\}_{i=1}^n$ — її базис, $\{Y_i\}_{i=1}^n$ — двоїстий до нього базис відносно форми Кіллінга K на \mathfrak{g} . Тоді $r(\lambda) = t/\lambda$, де $t = \sum_{i=1}^n X_i \otimes Y_i \in$ «універсальний»

раціональний розв'язок класичного рівняння Янга—Бакстера.

Доведення. Встановимо спочатку G -інваріантність елемента t (G — зв'язна група Лі, для якої \mathfrak{g} є алгеброю Лі). Нехай $U(\mathfrak{g})$ — універсальна обгортуюча алгебра для алгебри Лі \mathfrak{g} і

$$\Delta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}), \quad \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad X \in \mathfrak{g},$$

— діагональний гомоморфізм. Розглянемо універсальний елемент Казіміра $c = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \in U(\mathfrak{g})$ і зобразимо елемент t у вигляді $t = \frac{1}{2}(\Delta(c) - c \otimes 1 - 1 \otimes c)$. Враховуючи належність елемента c центрові алгебри $U(\mathfrak{g})$, неважко переконатись, що t задовольняє інфінітезимальну версію співвідношення G -інваріантності

$$[\Delta(X), t] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Підставляючи тепер вираз $r(\lambda) = t/\lambda$ у ліву частину класичного рівняння Янга—Бакстера, одержуємо

$$(\lambda |t_{12} + t_{13}, t_{23}| + \mu |t_{12}, t_{13} + t_{23}|) / \lambda \mu (\lambda + \mu).$$

Вирази в квадратних дужках рівні нулеві внаслідок G -інваріантності елемента t .

3. Пуассонова реалізація абстрактної алгебри Лі і [5]. Нехай (M, Ω) — симплектичний многовид, а дія зв'язної групи Лі G на ньому пуассонівська. Така дія групи G задає гомоморфізм її алгебри Лі \mathfrak{g} в алгебру Лі функцій Гамільтона на M . Вона також визначає відображення моменту $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ (\mathfrak{g}^* — дуальний до векторного простору \mathfrak{g}), $\langle J(m), X \rangle = J_X(m)$, де J_X — функція Гамільтона фундаментального векторного поля, асоційованого з елементом $X \in \mathfrak{g}$.

Відображення J задовольняє таку умову еківаріантності:

$$J(gm) = \text{Ad}_{g^{-1}}^* J(m), \quad m \in M, \quad g \in G,$$

де Ad^* — копрієднана дія групи Лі G на \mathfrak{g}^* .

Нехай елементів X_i базису алгебри Лі \mathfrak{g} відповідає функція Гамільтона J_{X_i} . Тоді довільному елементу $X = x^i X_i \in \mathfrak{g}$ відповідає функція Гамільтона $J_X = x^i J_{X_i}$. При цьому $J = J_{X_i} X^i$, де $\{X^i\}_{i=1}^n$ — базис векторного простору \mathfrak{g}^* , дуальний до базису $\{X_i\}_{i=1}^n$ (тут мається на увазі сумування по індексах, які повторюються).

4. «Універсальний» інтегральний многовид елементарних G -інваріантних L -операторів. Припустимо, що зв'язна група Лі G напівпроста і діє зліва пуассоново на зв'язному симплектичному многовиді (M, Ω) , а $r(\lambda)$ — «універсальний» G -інваріантний раціональний розв'язок класичного рівняння Янга—Бакстера із п. 2.

Узагальнюючи L -оператори із конкретних прикладів [3], вибираємо елементарний L -оператор в «універсальному» вигляді

$$L(\lambda) = (\lambda I - S) / (\lambda - a),$$

де $a \in \mathbb{C}$,

$$S : M \rightarrow \mathfrak{g}, \quad S = K^\# J = J_{X_i} Y_i,$$

K — форма Кіллінга на \mathfrak{g} , $\{Y_i\}_{i=1}^n$ — базис в \mathfrak{g} , дуальний відносно форми Кіллінга до базису $\{X_i\}_{i=1}^n$. При цьому очевидно відображення S має властивість еківаріантності $S(gm) = \text{Ad}_{g^{-1}} S(m)$.

У запису L -операторів без індекса мається на увазі, що все відноситься до одного вузла решітки.

Визначимо тепер «універсальний» інтегральний многовид таких елементарних L -операторів для фіксованої розв'язком $r(\lambda) = \sum_{i=1}^n X_i \otimes Y_i / \lambda$ класичного рівняння Янга — Бакстера дискретної фундаментальної дужки Пуассона із п. 1.

За означенням для лівої сторони співвідношення дужки Пуассона маємо

$$(\lambda - a)(\mu - a) \{L(\lambda) \otimes L(\mu)\} = \{S \otimes S\} = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k J_{X_k} Y_i \otimes Y_j,$$

де c_{ij}^k — структурні константи алгебри $L(\mathfrak{g})$ відносно базису $\{X_i\}_{i=1}^n$.

Для правої сторони з використанням G -інваріантності елемента t маємо

$$(\lambda - a)(\mu - a) [r(\lambda - \mu), L(\lambda) \otimes L(\mu)] = -[t, 1 \otimes S] + \frac{1}{\lambda - \mu} [t, S \otimes S].$$

Неважко показати, що

$$-[t, 1 \otimes S] = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k J_{X_k} Y_i \otimes Y_j.$$

Отже, для виконання тотожності дужки Пуассона необхідно вимагати виконання додаткової умови

$$[t, S \otimes S] = 0. \quad (*)$$

Таким чином, шуканий «універсальний» інтегральний многовид одержується із елементарних L -операторів вигляду $L(\lambda) = (\lambda I - S)/(\lambda - a)$, які задовольняють умову (*).

Перехід від розглядуваних «універсальних» об'єктів до конкретних здійснюється шляхом вибору конкретних алгебр $L(\mathfrak{g})$ та їх зображень. Нехай, наприклад, $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ — незвідне зображення деякої алгебри $L(\mathfrak{g})$, однозначно продовжене до зображення її обгортуючої алгебри $U(\mathfrak{g})$. За тосування тензорного добутку зображень $\rho \otimes \rho$ до «універсальних» функцій $r(\lambda)$ і $L(\lambda)$ приводить при виконанні умови (*) до матрично-значних функцій, які задовольняють r -матричну фундаментальну дужку Пуассона для дискретних систем, і до конкретного інтегрального многовиду дужки.

Умова (*) для конкретного зображення ρ алгебри $L(\mathfrak{g})$ накладає певні обмеження на образ відображення моменту J , тобто виділяє множину копринеднаних орбіт в \mathfrak{g}^* , із яких повинен складатися цей допустимий образ. Повний аналіз одержуваного на цьому шляху допустимого образу відображення J являє собою нетривіальну задачу. Однак для конкретних прикладів [3] ефективним є наступне твердження.

Т е о р е м а. Нехай ρ — зображення напівпростої зв'язної групи $L(\mathfrak{g})$ її алгебри $L(\mathfrak{g})$. Якщо існують константи c_1 і c_2 (свої для кожної G -орбіти в M) такі, що

$$\rho(S(m)) = c_1 I + c_2 \rho(g(m)),$$

де $g(m)$ — деякий елемент групи G , що залежить від точки $m \in M$, то в зображенні ρ виконується умова (*).

Д о в е д е н н я. Із інфінітезимальної версії G -інваріантності елемента t (див. доведення твердження в п. 2) впливає $[t, \exp(X \otimes 1 + 1 \otimes X)] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Оскільки $\exp(X \otimes 1 + 1 \otimes X) = \exp(X) \otimes \exp(X)$, то елемент t комутує з елементом $g \otimes g$ для кожного $g \in G$. Отже, $[\rho(t), \rho(g) \otimes \rho(g)] = 0$. Виражаючи $\rho(g) = (\rho(S) - c_1 I)/c_2$ і підставляючи в останню рівність, після очевидних перетворень з використанням властивості G -інваріантності елемента t , одержуємо $[\rho(t), \rho(S) \otimes \rho(S)] = 0$.

Н а с л і д о к. Якщо на кожній орбіті в M виконується тотожність

$$a_0 (\rho(S))^2 + a_1 \rho(S) + a_2 I = 0,$$

де $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ — свої для кожної орбіти, то в зображенні ρ виконується умова (*).

Д о в е д е н я. Розклавши в ряд вираз $\exp(\rho(S))$ і з використанням даної тотожності виразивши всі члени вище першого степеня у вигляді лінійної комбінації матриць I та $\rho(S)$, можна застосувати теорему.

1. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.— М. : Наука, 1986.— 528 с.
2. Решетихин Н. Ю., Фаддеев Л. Д. Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля // Теорет. и мат. физика.— 1983.— 56, № 3.— С. 323—343.
3. Решетихин Н. Ю. Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля. II. Модели с $O(n)$ - и $Sp(2k)$ -симметрией на одномерной решетке // Там же.— 1985.— 63, № 2.— С. 197—203.
4. Белавин А. А., Дринфельд В. Г. О решениях классического уравнения Янга—Бакстера для простых алгебр Ли // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— 16, № 3.— С. 1—29.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1989.— 472 с.

Одержано 28.01.92