4. *Serre J.-P.* Corps locaux.— Paris.: Hermann, 1962.
5. *Андрийчук В. И.* Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями // Мат. сб.— 1979.— **110**, № 9.— С. 88—101.
6. *Ax J.* The elementary theory of finite fields // Ann. Math.— 1968.— **88**, N 2.— P. 239—271.
7. *Введенский О. Н.* Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем. I, II // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— **28**.— С. 1091—1112; 1966.— **30**.— С. 891—922.

Одержано 06.03.92

УДК 515.12

Л. Є. Базилевич, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Поповнені простори функцій на континуумах Пеано

Одержано опис топології пари $(\tilde{C}(\Pi, I), C(\Pi, I))$ для пеанівського континууму Π, де $\tilde{C}(\Pi, I)$ — замикання в гіперпросторі $\exp(\Pi \times I)$ образу простору неперервних функцій $C(\Pi, I)$ при природному вкладенні.

Получено описание топологии пары $(\tilde{C}(\Pi, I), C(\Pi, I))$ для пеановского континуума Π, где $C(\Pi, I)$ — замыкание в гиперпространстве $\exp(\Pi \times I)$ образа пространства непрерывных функций $C(\Pi, I)$ при естественном вложении.

Гіперпростір $\exp X = \{A \subset X | A \neq \varnothing$ — замкнена підмножина в $X\}$ метричного компакта (X, d) метризується метрикою Гаусдорфа $d_H: d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 | A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A),\ A, B \in \exp X\}$. Нехай Π — метричний континуум Пеано, $I = [-1, 1]$ — сегмент. Розглянемо простір $C(\Pi, I)$ неперервних функцій $f: \Pi \to I$ з метрикою, індукованою відображенням $\Gamma: C(\Pi, I) \to \exp(\Pi \times I)$, яке кожній функції $f \in C(\Pi, I)$ ставить у відповідність її графік $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \Pi \times I \mid y = f(x)\} \in \exp(\Pi \times I)$ (тут ми вважаємо, що на Π задана фіксована опукла метрика d_Π [1] і на $\Pi \times I$ метрика задається формулою $d_{\Pi \times I}((q', t'), (q'', t'')) = ((d_\Pi(q', q''))^2 + (t' - t'')^2)^{1/2}$; надалі часто опускаються індекси у позначеннях для метрик). Позначимо через $\vec{C}(\Pi, I)$ поповнення простору $C(\Pi, I)$ за вказаною метрикою. Метричні простори вигляду $C(\Pi, I)$ та $\tilde{C}(\Pi, I)$ розглядалися у працях [1—3]. Зокрема, В. В. Федорчук довів, що простір $\tilde{C}(\Pi, I)$ гомеоморфний гільбертовому кубу $Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1, 1]_i$ (цей результат фактично міститься в [3], хоча явно не сформульований).

Нагадаємо, що псевдовнутрішністю гільбертового куба $Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1, 1]$ називається підмножина $s = \prod_{i=1}^{\infty}(-1, 1)_i \subset Q$. Топологічна характеризація пари (Q, s) наведена в [4]: пара (Q, A) гомеоморфна (Q, s) тоді і лише тоді, коли $Q \setminus A$ — Z-скелетоїд в Q. При цьому множина $B \subset Q$ називається Z-скелетоїдом, якщо $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, де $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ — така послідовність Z-множин в Q, що для кожної Z-множини $A \subset Q$, кожного $\varepsilon > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ існує такий гомеоморфізм $h: Q \to Q$, що:

1) $h|(A \cap K_n) = \mathrm{id}$;
2) $h(A) \subset K_m$ для деякого $m \geqslant n$;
3) $d(h, \mathrm{id}_Q) < \varepsilon$

(замкнена підмножина $C \subset Q$ називається Z-множиною, якщо тотожне відображення Q апроксимується відображеннями Q в $Q \setminus C$ [5]).

Основним результатом даної праці є наступне твердження, яке анонсоване в [6].

Теорема. *Нехай* Π — *континуум Пеано, тоді пара* $(\tilde{C}(\Pi, I), C(\Pi, I))$ *гомеоморфна парі* (Q, s).

Доведення. Нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *і будь-якого компакту* $M \subset C(\Pi, I)$, $\operatorname{diam} M < \varepsilon$, M *стягується в точку по підмножині діаметру* $< 4\varepsilon$ *в* $C(\Pi, I)$.

Доведення. Нехай для кожного $f \in C(\Pi, I)$ і $\delta > 0$ $\sigma(f, \delta) = \max\{\xi > 0 \mid$ для кожного $x \in \Pi$ і кожних $x', x'' \in Q_\xi(x)$ маємо $|f(x') - f(x'')| \leqslant \delta\}$. Легко бачити, що для фіксованого $f \not\equiv 0$ функція $\sigma(f, \delta)$ монотонно спадає до нуля при $\delta \to 0$.

Нехай $g, g_0 \in C(\delta, I)$ такі, що $d(g, g_0) = \delta > 0$, і $h = \min\{\sigma(g, \delta), \sigma(g_0, \delta)\}$. Нехай S_h — довільна h-сітка континууму Π і $h' = \min\{\sigma(g, \delta/3), h/3\}$. Побудуємо функцію $g_1 \in C(\Pi, I)$:

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } d(x, S_h) \geqslant h', \\ \dfrac{d(x, S_h)}{h'} g(x) + \left(1 - \dfrac{d(x, S_h)}{h'}\right) g_0(x) & \text{при } 0 \leqslant d(x, S_h) \leqslant h'. \end{cases}$$

Нехай $\gamma_1(t) = g + t(g_1 - g)$, $\gamma_2(t) = g_1 + t(g_0 - g_1)$, $t \in [0, 1]$ (використовується природна афінна структура в просторі $C(\Pi, I)$). Означимо відображення $\Gamma_{g,g_0} : [0, 1] \to C(\Pi, I)$ формулою

$$\Gamma_{g,g_0}(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{якщо } t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{якщо } t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Неважко переконатись, що $\operatorname{diam} \Gamma_{g,g_0}([0, 1]) < 4\delta$.

Нехай тепер $g_0 \in M$ і $h = \inf\{\sigma(g, \varepsilon) \mid g \in M\}$. Оскільки M — компакт, то $h > 0$. Відображення $\Gamma_{g,g_0} : [0, 1] \to C(\Pi, I)$ будується, як описано вище. Нарешті, відображення $\Gamma : M \times [0, 1] \to C(\Pi, I)$, $\Gamma(g, t) = \Gamma_{g,g_0}(t)$, $g \in M$, $t \in [0, 1]$ є шуканим стягуванням компакта M.

Наслідок. *Кожен компакт* $K \subset \tilde{C}(\Pi, I) \setminus C(\Pi, I)$ *є* Z-*множиною в* $\tilde{C}(\Pi, I)$.

Доведення полягає в нескладній модифікації стандартних міркувань [7].

Справді, візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Існує $n \in \mathbb{N}$ і ретракція $r : \tilde{C}(\Pi, I) \to K$ на n-вимірний поліедр $K \subset \tilde{C}(\Pi, I)$, $K \cong I^n$, $d(r, \mathrm{id}) < \varepsilon/2$.

Нехай задана тріангуляція $\mathcal{T}$ поліедра K така, що $\operatorname{diam}(\sigma) < \dfrac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}$ для кожного симплексу σ. Нехай $x_0, \ldots, x_k$ — вершини тріангуляції $\mathcal{T}$. Оскільки $C(\Pi, I)$ скрізь щільний у $\tilde{C}(\Pi, I)$, то існують $y_0, \ldots, y_k \in C(\Pi, I)$ такі, що $d(x_i, y_i) < \dfrac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}$. Тоді якщо x_i, x_j — вершини одновимірного симплексу в $\mathcal{T}$, то $d(y_i, y_j) < \dfrac{1}{2^{2n+1}}$.

Покладемо $g(x_i) = y_i$. Індукцією по l означимо відображення $g : K^{(l)} \to C(\Pi, I)$ ($K^{(l)}$ — l-вимірний кістяк поліедра K). Нехай відображення g задане на $K^{(l-1)}$ і σ — l-вимірний симплекс. Тоді $g|_{\partial\sigma}$ задане і за лемою 1 можемо продовжити g на σ так, що $\operatorname{diam}(g(\sigma)) < 4 \operatorname{diam}(g(\partial\sigma))$. Тоді $d(g, \mathrm{id}) < \varepsilon/2$ і відображення $f = gr : \tilde{C}(\Pi, I) \to C(\Pi, I)$ є ε-зсув.

Для $0 < \varepsilon < 1$ позначимо через H_ε: $\tilde{C}(\Pi, I) \to \tilde{C}(\Pi, I)$ відображення, що діє за формулою $H_\varepsilon(A) = \{(x, (1-\varepsilon)y) \mid (x, y) \in A\}$, $A \in \tilde{C}(\Pi, I)$.

Нехай U_ε: $\tilde{C}(\Pi, I) \to \tilde{C}(\Pi, I)$ — відображення, яке переводить кожен елемент $A \in \tilde{C}(\Pi, I)$ в його замкнений ε-окіл $U_\varepsilon(A) = \{(x, y) \in \Pi \times I \mid$

$d((x, y), A) \leqslant \varepsilon\}$. З опуклості метрики на $\Pi \times I$ випливає, що відображення U_ε неперервне [1].

Нехай $A \in \bar{C}(\Pi, I)$, $A \subset \Pi \times I \subset \Pi \times \mathbb{R}$. Легко бачити, що $(\Pi \times \mathbb{R}) \setminus A = V_1 \cup V_2$, де V_1, V_2 — компоненти зв'язності множини $(\Pi \times R) \setminus A$. Припускаємо, що $\Pi \times \{2\} \subset V_1$. Нехай $B(A) = \mathrm{Bd}_{\Pi \times \mathbb{R}}(A) \cap \mathrm{Bd}_{\Pi \times \mathbb{R}}(V_1)$, $B'(A) = \mathrm{Bd}_{\Pi \times \mathbb{R}}(A) \cap \mathrm{Bd}_{\Pi \times \mathbb{R}}(V_2)$. Зрозуміло, що $B(A)$, $B'(A) \in \bar{C}(\Pi, I)$.

Будемо говорити, що $A \in \bar{C}(\Pi, I)$ задовольняє умову Ліпшиця з константою k над кулею $K \subset \Pi$, якщо k — мінімальне число, для якого виконується умова: для довільних $z', z'' \in A$, $z' = (x', y')$, $z'' = (x'', y'')$, $x', x'' \in \Pi \cap K$, $y', y'' \in I$, маємо $|y' - y''| < k\,|x' - x''|$. Якщо куля $K' \subset K$ і A задовольняє умову Ліпшиця з константою k над K, то A задовольняє умову Ліпшиця над K' з константою $k' \leqslant k$.

Означимо функцію $k_A : \Pi \to [0, +\infty]$, рівну в точці $x \in \Pi$ інфімуму всіх тих констант k, при яких A задовольняє умову Ліпшиця з константою k над деякою кулею $K \ni x$, і $k_A(x) = +\infty$, якщо таких констант k не існує. Нехай $D_A := \{x \in \Pi \mid k_A(x) \leqslant \frac{1}{4}\}$.

Лема 2. *Для всякого $\varepsilon > 0$ існує така куля K діаметра $< \varepsilon/10$, що $k_{B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))}(x) \leqslant \frac{1}{4}$ для $x \in K$.*

Доведення. Нехай точка $z_0 = (x_0, y_0) \in H_\varepsilon(A)$ така, що для всіх інших точок $z' = (x', y') \in H_\varepsilon(A)$ виконується $y_0 \geqslant y'$. Покажемо, що над кулею $K = K(x_0, \varepsilon/20) = \{x \in \Pi \mid d(x, x_0) < \varepsilon/10\}$ множина $B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $k < \frac{1}{4}$.

Нехай $z' = (x', y')$, $z'' = (x'', y'') \in B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A)) \cap K \times I$ — дві довільні точки. Припустимо, що $y' > y''$, і нехай $\alpha = \dfrac{y' - y''}{d(x', x'')}$.

Оскільки $z' \in B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))$, то існує t' така, що $d(t, z') = \varepsilon/2$. Легко бачити, що $t \in D \cap D'$, де $D = \{z \in \Pi \times I \mid d(z, z'') \geqslant d(z, z')\}$ і $D' = \{z = (x, y) \in \Pi \times I \mid y < y_0 - \varepsilon/2\}$. Тому має бути $d(z', D \cap D') < \varepsilon/2$. Оцінимо

$$d(z', D \cap D') = \inf\{\sqrt{(d_\Pi(x', x))^2 + (y' - y)^2} \mid z = (x, y) \in D \cap D'\} =$$

$$= \sqrt{\inf\left\{(d_\Pi(x, x'))^2 \mid z = \left(x, y_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \in D \cap D'\right\} + \left(y' - y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2}.$$

Нехай $z \in D \cap D'$. Тоді

$$\begin{gathered}(d_\Pi(x, x''))^2 + (y_0 - y'' - \varepsilon/2)^2 \geqslant (d_\Pi(x, x'))^2 + (y_0 - y' - \varepsilon/2)^2,\\ (d_\Pi(x, x''))^2 - (d_\Pi(x, x'))^2 \geqslant (y' - y'')(\varepsilon - (2y_0 - y' - y'')).\end{gathered} \tag{1}$$

Припустимо, що $(x', t_0) \in D \cap D'$. Тоді $d(z', D \cap D') = y' - t_0 < \varepsilon/2$ і звідси одержуємо

$$\begin{gathered}(d_\Pi(x', x''))^2 \geqslant (y' - y'')(\varepsilon - (2y_0 - y' - y'')) = \alpha d_\Pi(x', x'')(\varepsilon - (2y_0 - y' - y'')),\\ \alpha \leqslant d_\Pi(x', x'')(\varepsilon - (2y_0 - y' - y''))^{-1}.\end{gathered} \tag{2}$$

Нехай $(x', t_0) \notin D \cap D'$. Тоді $d_\Pi(x, x'') \leqslant d_\Pi(x'', x') + d_\Pi(x', x)$. Підставимо в (1)

$$d_\Pi(x', x) \geqslant \frac{(y' - y'')(\varepsilon - (2y_0 - y' - y'')) - (d_\Pi(x', x''))^2}{2d_\Pi(x', x'')}.$$

Оскільки $d(z, D \cap D') \leqslant \varepsilon/2$, то

$$\left(y' - y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{(y' - y'')(\varepsilon - (2y_0 - y' - y'')) - (d_\Pi(x', x''))^2}{2d_\Pi(x', x'')}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2,$$

оскільки $\pi_0(C_l) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (тут C_l^0 — підгрупа точок групи C_l, що редукуються в неособливі, $\pi_0(C_l) = C_l/C_l^0$). $H^i(\mathrm{Gal}(l/k), C_l^0) = 0$ тому, що всі фактори фільтрації $C_l^0 \supset \Gamma_l \supset \Gamma_l^2 \supset \ldots$ ізоморфні λ-адитивній групі поля лишків поля l. Отже, $H^i(\mathrm{Gal}(l/\tilde{k}), A_l) = 0$, і діаграма (r_2), записана для розширення $l/\tilde{k}$, показує, що добуток Тейта — Шафаревича невироджений зліва для кривої A над полем k. Аналогічні міркування показують, що цей добуток невироджений зліва для кривої A і над полем k.

Лема 6. *Нехай еліптична крива A типу (c_3) над k задовольняє умови леми 5 і l — поле розкладу многочлена $x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$. Над полем l крива A ізоморфна кривій B з невиродженою редукцією: $A \overset{\alpha}{\to} B$. Якщо B_l і $\Gamma(B_l)$ — відповідно група l-раціональних точок кривої B та ядро редукції групи B_l, то позначимо через B_l^α та $\Gamma(B_l^\alpha)$ $\mathfrak{g}$-модулі з наведеною за допомогою ізоморфізму α дією групи $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(l/k)$. Тоді $H^i(\mathfrak{g}, A_l) \cong$ $\cong H^i(\mathfrak{g}, \Gamma(B_l^\alpha))$.*

Доведення. Многочлен $x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ незвідний над k і поле розкладу l цього многочлена є простим циклічним розширенням Галуа поля k, $[l:k] = 3$. Якщо $\tilde{\Pi}$ — корінь многочлена $x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$, то $v_l(\Pi) = 2$. Зафіксуємо прості елементи π і Π полів k і l так, наприклад, щоб $\pi^2 = a_6$ і $\Pi = \pi^{-1}\tilde{\Pi}^2$.

Нехай m — номер останньої нетривіальної групи галуження розширення l/k, σ — твірна групи $\mathfrak{g}$. Тоді

$$\sigma\Pi = \Pi + \mu\Pi^{m+1}, \quad \sigma\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi} + 2\mu\Pi^{m+2} + \ldots, \quad \sigma^2\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi} + 4\mu\Pi^{m+2} + \ldots, \ \mu \in U_l,$$

і легко підрахувати, що $v_k(\Delta) = 2(m+2)$.

Над полем l рівняння кривої A можна записати у вигляді

$$y^2 = (x - \tilde{\Pi})(x - \tilde{\Pi} - 2\mu\Pi^{m+2} + \ldots)(x - \tilde{\Pi} - 4\mu\Pi^{m+2} + \ldots),$$

де $m + 2$ парне, тому що $4 \mid v_k(\Delta)$. Розглянемо ізоморфізм α над полем l кривої A і кривої B з рівнянням

$$v^2 = u(u - 2\mu + \ldots)(u - 4\mu + \ldots)$$

такий, що

$$\alpha(x, y) = \left(\frac{x - \tilde{\Pi}}{\Pi^{m+2}}, \ \frac{y}{\Pi^{\frac{3(m+2)}{2}}}\right) = (u, v).$$

Крива B є кривою з невиродженою редукцією над полем l. Запишемо для кривої B точну послідовність редукції

$$0 \to \Gamma(B_l^\alpha) \to B_l^\alpha \to B_\varkappa'^\alpha \to 0. \tag{9}$$

У цій послідовності $\Gamma(B_l^\alpha)$, B_l^α, $B_\varkappa'^\alpha$ — $\mathfrak{g}$-модулі з наведеною за допомогою ізоморфізму α дією групи $\mathfrak{g}$: для $\sigma \in \mathfrak{g}$

$$\sigma_\alpha(u, v) = \left(\left(\sigma(u) + \frac{\sigma\tilde{\Pi} - \tilde{\Pi}}{\sigma\Pi^{m+2}}\right)\left(\frac{\sigma\Pi}{\Pi}\right)^{m+2}, \quad \sigma(v)\left(\frac{\sigma\Pi}{\Pi}\right)^{\frac{3(m+2)}{2}}\right).$$

Дослідимо групи $H^i(\mathfrak{g}, B_l^\alpha) \cong H^i(\mathfrak{g}, A_l)$. Для цього обчислимо групи $H^i(\mathfrak{g}, B_\varkappa'^\alpha)$. Якщо $(u, v) \in B_\varkappa'$, то $\sigma_\alpha(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} + 2\bar{\mu}, \bar{v})$ і неважко показати, що $H^i(\mathfrak{g}, B_\varkappa'^\alpha) = 0$. Звідси і з точної послідовності когомологій, відповідної точній послідовності (9), випливає $H^i(\mathfrak{g}, A_l) \cong H^i(\mathfrak{g}, \Gamma(B_l^\alpha))$. Лема доведена.

Нехай $\Gamma(B_l) \supset \Gamma^2(B_l) \supset \ldots$ — стандартна фільтрація Лютц групи $\Gamma(B_l)$. Позначивши $\alpha^{-1}(\Gamma^i(B_l))$ через $\Gamma^i(A_l)$, маємо $H^i(\mathfrak{g}, A_l) \cong$ $\cong H^i(\mathfrak{g}, \Gamma(A_l))$.

$$(y_0-y')^2-\varepsilon(y_0-y')+\frac{1}{4}(\alpha(\varepsilon-(2y_0-y'-y''))-d_\Pi(x',x''))^2\leqslant 0, \quad (3)$$

$$\alpha\leqslant\frac{d_\Pi(x',x'')+2\sqrt{(y_0-y')(\varepsilon-(y_0-y'))}}{\varepsilon-(2y_0-y'-y'')}.$$

Оцінимо α. Оскільки $d_\Pi(x',x'')<\operatorname{diam}K<\varepsilon/10$, $y_0-y'\leqslant\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon}{20}\right)^2}=\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{\sqrt{99}}{10}\right)$, то в обох випадках (2) і (3) маємо

$$\alpha\leqslant\frac{10}{\varepsilon\cdot\sqrt{99}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{10}+2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{\sqrt{99}}{10}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\left(1+\frac{\sqrt{99}}{10}\right)}=\frac{2}{\sqrt{99}}<\frac{1}{4}.$$

Лема доведена.

З леми 2 випливає що множина $D_{B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))}$ для довільного $A\in\tilde{C}(\Pi,I)$ містить кулю $K\subset\Pi$ діаметра $\geqslant\varepsilon/10$. Означимо функцію $\psi_{A,\varepsilon}\in C(\Pi,I)$ формулою

$$\psi_{A,\varepsilon}(x)=\begin{cases}1 & \text{при } d(x,\Pi\setminus D_{B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))})\geqslant\frac{\varepsilon}{80},\\ \frac{80}{\varepsilon}\cdot d(x,\Pi\setminus D_{B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))}) & \text{при } 0<d(x,\Pi\setminus D_{B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))})\leqslant\frac{\varepsilon}{80},\\ 0 & \text{при } x\notin D_{B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))}.\end{cases}$$

Зафіксуємо довільне $\delta>0$. Індукцією по i неважко побудувати множину $\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\subset\Pi$ і таку послідовність натуральних чисел $N_0\leqslant N_1\leqslant\leqslant N_2\leqslant\ldots$, що $x_m\neq x_n$, $m,n\in\mathbb{N}$, і для кожного $i=0,1,2,\ldots$ множина $S_i=\{x_1,\ldots,x_{N_i}\}$ є $\delta/2^i$-сіткою в Π.

Нехай $\sigma_i=\min\{d(x_m,x_n)\mid 1\leqslant m\neq n\leqslant N_i\}\leqslant\delta/2^{i-1}$. Легко бачити, що $\sigma_i\to 0$ при $i\to\infty$. Візьмемо довільну строго монотонно зростаючу функцію $\sigma:[0,\delta]\to[0,1]$ таку, що $\sigma\left(\frac{\delta}{2^{i-1}}\right)\leqslant\sigma_i$ при $i=0,1,2,\ldots$. Для кожного ε, $0<\varepsilon\leqslant\delta$, означимо функцію $\theta_\varepsilon:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to[0,1]$ формулами

$$\theta_\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & \text{для } x\in S_0,\\ \left.\begin{array}{ll}0 & \text{при } \varepsilon\geqslant\frac{3\delta}{2^{i+1}}\\ 3-\frac{2^{i+1}\cdot\varepsilon}{\delta} & \text{при } \frac{\delta}{2^i}\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{3\delta}{2^{i+1}}\\ 1 & \text{при } \varepsilon\leqslant\frac{\delta}{2^i}\end{array}\right\} & \text{для } x\in S_i\setminus S_{i-1},\ i=1,2,\ldots\end{cases}$$

Для кожного $A\in\tilde{C}(\Pi,I)$ побудуємо допоміжну «генну» функцію $\Phi_{A,t}\in C(\Pi,I)$. Будемо розглядати простір $\tilde{C}(\Pi,I)$ як підпростір гільбертового куба $\{1\}\times\prod_{i=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{2^{i-1}}\right]$, отже кожному $A\in\tilde{C}(\Pi,I)$ відповідає при такому вкладенні послідовність $(x_A^i)_{i=0}^{\infty}$, де $x_A^0=1$ і $0\leqslant x_A^i\leqslant\frac{1}{2^{i-1}}$ при $i\geqslant 1$. Функція $\Phi_{A,t}$ задається формулою

$$\Phi_{A,t}(q)=\begin{cases}1 & \text{при } q\in S_{i_0},\\ x_A^i & \text{при } d(q,S_{i_0})=\frac{\sigma(t)}{4}\left(1-\frac{1}{2^i}\right),\quad i\in\mathbb{N}, \text{ де } i_0 - \text{таке, що}\\ & \delta/2^{i_0}\leqslant t<\delta/2^{i_0-1}.\end{cases}$$

Легко бачити, що функція $\Phi_{A,\delta}$ вибрана так, що знаючи її значення над довільною множиною $\Pi\cap K(x,r)$, $x\in\Pi$, $r\geqslant 2\delta$, можна відновити точку (x_A^i), а отже, і $A\in\tilde{C}(\Pi,I)$.

Тепер задамо неперервне відображення $h_\varepsilon:\tilde{C}(\Pi,I)\to\tilde{C}(\Pi,I)$ формулою

$$h_\varepsilon(A)=\cup\left\{\{x\}\left[y,y+\frac{\varepsilon}{4}\cdot\psi_{A,\varepsilon}(x)\,\Phi_{A,\varepsilon/40}(x)\,\theta_{\varepsilon/40}(x)\right]\mid(x,y)\in U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A)\right\}.$$

Для довільного $A\in\tilde{C}(\Pi,I)$ нехай $\omega(A)=\max\{y>0\mid[(x,y_0),(x,y_0+y)]\in A$ для деяких $x\in\Pi$, $y_0\in[-1,1-y]$. Зрозуміло, що $\omega(A)=0$ тоді і лише тоді, коли $A\in C(\Pi,I)$. Нехай $\mathcal{A}(l)=\{A\in\tilde{C}(\Pi,I)\mid\omega(A)=l\}$ і $\mathcal{A}_n=\cup\left\{\mathcal{A}(l)\mid l\geqslant\frac{1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$. Легко бачити, що всі $\mathcal{A}_n$ — компакти, і, значить, Z-множини в $\tilde{C}(\Pi,I)$ і $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2\subset\ldots$. Покажемо, що множина $\cup\{\mathcal{A}_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ є Z-скелетоїдом в $\tilde{C}(\Pi,I)$ [4]. Зафіксуємо $n\in\mathbb{N}$ і $\varepsilon_0>0$. Покладемо

$$h(A)=\begin{cases}h_{\varepsilon^*}(A) & \text{при } d(A,\mathcal{A}_n)\geqslant\varepsilon^*,\\ h_\varepsilon(A) & \text{при } 0<\varepsilon=d(A,\mathcal{A}_n)<\varepsilon^*,\\ A & \text{при } A\in\mathcal{A}_n,\end{cases}$$

де $\varepsilon^*=\min\left\{\varepsilon_0,\frac{1}{3n}\right\}$. Розглянемо відображення $h:\tilde{C}(\Pi,I)\to\mathcal{A}_m$, де $m>2n$. З означення відображення h безпосередньо випливає, що

1) $h\mid\mathcal{A}_n=\mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}$ і $h\mid\tilde{C}(\Pi,I)\setminus\mathcal{A}_n\subset\mathcal{A}_m\setminus\mathcal{A}_n$;

2) відображення h є ін'єктивним.

Дійсно, досить перевірити властивість (2) для $h\mid\tilde{C}(\Pi,I)\setminus\mathcal{A}_n$. Розглянемо довільний $C\in h(\tilde{C}(\Pi,I)\setminus\mathcal{A}_n)$ і покажемо, що існує єдине $A\in\tilde{C}(\Pi,I)\setminus\mathcal{A}_n$ таке, що $h(A)=C$.

Нехай підмножина $Y\subset\Pi\times I$ складається з таких відрізків $[(x,y),(x,y+\Delta y)]$, що існує відкрита множина V, для якої $V\cap C=((x,y),(x,y+\Delta y))$. Оскільки всякий ε-окіл будь-якої множини є об'єднання куль радіуса ε, то множина Y може бути відновлена за допомогою функції $\Phi_{A,\varepsilon}$. Позначимо через D проекцію множини Y на перший співмножник. Зрозуміло, що $D=D_{B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))}\cap\left\{x\in\Pi\mid d(x,S_{i_0})=\frac{\sigma(t)}{4}\left(1-\frac{1}{2^i}\right),\ i\in\mathbb{N}\right\}$. Нехай $x\in D$ і $f(x)=\max\{\Delta y\mid[(x,y),(x,y+\Delta y)]\in Y,\ y\in I\}$. Тоді $\max\{f(x)\mid x\in D\}=3/4$ і ми вже знаємо число $\varepsilon=d(A,\mathcal{A}_n)$. Очевидно, що точки $\{x_1,\ldots,x_k\}$, для яких максимум функції f досягається, належать множині S_{i_0}, де $\varepsilon\leqslant\delta/2^{i_0}$. Ми можемо знайти також всі точки $x_A^i: x_A^i=\frac{4}{3}\max\left\{f(x)\mid d(x,\{x_1,\ldots,x_k\})=\frac{\sigma(t)}{4}\left(1-\frac{1}{2^i}\right)\right\}$, оскільки $\sigma(t)$-окіл принаймні однієї точки x_i попадає в множину $\{q\in D_{B(U_{\varepsilon/2}H_\varepsilon(A))}\mid\psi_{A,\varepsilon}(q)=1\}$. Знаючи точку (x_A^i), можна однозначно визначити $A\in\tilde{C}(\Pi,i)\cong Q$. Отже, відображення $h:\tilde{C}(\Pi,I)\to h(\tilde{C}(\Pi,I))$ біективне. Легко бачити, що відображення h і h^{-1} неперервні. Тому h є гомеоморфізмом. Очевидно, що $d(h,\mathrm{id}_{\tilde{C}(\Pi,I)})\leqslant\varepsilon^*<\varepsilon_0$.

Нехай тепер $\mathcal{B} \subset \tilde{C}(\Pi, I)$ — довільна Z-множина. За теоремою 11.1 з [5] гомеоморфізм $h \mid \mathcal{A}_n \cup B : \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B} \to \mathcal{A}_n \cup h(\mathcal{B})$ можна продовжити до автогомеоморфізму $\bar{h} : \tilde{C}(\Pi, I) \to \tilde{C}(\Pi, I)$ так, щоб $d(\bar{h}, \mathrm{id}_{\tilde{C}(\Pi, I)}) < \varepsilon_0$. При цьому очевидно, що:

1) $\bar{h} \mid \mathcal{A}_n \cap \mathcal{B} = h \mid \mathcal{A}_n \cap \mathcal{B} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}}$;

2) $\bar{h}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}_m$;

3) $d(\bar{h}, \mathrm{id}_{\tilde{C}(\Pi, I)}) < \varepsilon_0$, тобто множина $\mathcal{A} = \bigcup \{\mathcal{A}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ є Z-скелетоїдом. Твердження теореми випливає тепер з наведеної вище характеризації пари (Q, s).

Ця теорема дає відповідь на питання, сформульоване В. В. Федорчуком на топологічному семінарі Московського університету.

1. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988.— 252 с.
2. *Федорчук В. В.* О метризуемости пополнений функциональных пространств // Simp. VI Tirasp. Topol. Gen. Apl.— Chisinău, 1991.— P. 86.
3. *Fedorchuk V. V.* Completions of functional spaces and multivalued mappings // Zb. rad fil. fak. Nisu. Sec. mat.— 1990.— 4.— C. 3—5.
4. *Bessaga Cz., Pelczynski A.* Selected topics in infinite-dimensional topology.— Warszawa: PWN, 1975.
5. *Чепмэн Т.* Лекции о Q-многообразиях.— М. : Мир, 1981.— 156 с.
6. *Базилевич Л. Е.* Пополнение пространства непрерывных функций на континуумах Пеано // Simp. VI Tirasp. Topol. Gen. Apl.— Chisinău, 1991.— P. 28.
7. *Kroonenberg N. S.* Characterization of finite-dimensional Z-sets // Proc. Amer. Math. Soc.— 1974.— 43, N 2.— P. 421—427.

Одержано 06.03.92