УДК 517.9

О. Б. Чернобай (Нац. акад. ДПС України, Ірпінь)

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

The theorem on the smoothness of generalized solutions of differential equations with operational coefficients is proved.

Доведено теорему про гладкість узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами.

У першій частині статті розглядаються більш прості узагальнені розв'язки операторного рівняння $\mathcal{L}^+ u = 0$, коли гільбертовий простір, який містить значення вектор-функцій, є фіксованим. У другій частині будемо розглядати оснащення цього простору. Отримані результати можна узагальнити на випадок більш загальних лінійних диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами, в яких існує фундаментальний розв'язок з властивостями, подібними до властивостей 1 – 4, що наведені нижче. Результати цієї роботи пов'язані з результатами [1 – 5].

1. Нехай H — повний, сепарабельний, комплексний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$, $L(H)$ — сукупність усіх обмежених операторів у просторі H. Позначимо $I = (a, b)$, $\tilde{I}$ — його замикання.

Розглянемо $L^2(H, I) = L^2(I) \otimes H$, де $L^2(I)$ — простір L^2, побудований за мірою Лебега dx на інтервалі I (див. [6], гл. 1, § 3).

Для довільного $k = 0, 1, \ldots$ візьмемо відоме (див. [7]) гільбертове оснащення простору $L^2(I)$ соболевськими просторами

$$W_2^{-k}(I) \supset L^2(I) \supset W_2^k(I)$$

і побудуємо тензорні добутки таких просторів:

$$W_2^{-k}(I) \otimes H = W_2^{-k}(H, I), \qquad W_2^k(I) \otimes H = W_2^k(H, I).$$

Отримаємо гільбертове оснащення простору $L^2(H, I)$:

$$W_2^{-k}(H, I) \supset L^2(H, I) \supset W_2^k(H, I).$$

У просторі H розглянемо довільний обмежений оператор $A : H \mapsto H$, A^* — його спряження. Побудуємо диференціальний вираз

$$(\mathcal{L}u)(x) = \frac{du}{dx} + Au, \quad u \in W_2^k(H, I). \tag{1}$$

Формально спряжений диференціальний вираз відносно простору $L^2(H, I)$ має вигляд

$$(\mathcal{L}^+ u)(x) = -\frac{du}{dx} + A^* u, \quad u \in W_2^k(H, I). \tag{2}$$

Множину фінітних на I векторнозначних функцій з $W_2^k(H, I)$ позначимо через $W_{2,0}^k(H, I)$, множину всіх неперервних векторнозначних функцій $\tilde{I} \ni x \mapsto f(x) \in H$ — через $C(H, \tilde{I})$, а множину фінітних на I, k разів неперервно диференційовних функцій з $C(H, \tilde{I})$ — через $C_0^k(H, I)$, $k = 0, 1, \ldots, \infty$.

Векторнозначну функцію $\varphi(x) \in W_2^{-l}(H, I)$, $l = 1, 2, \ldots$, назвемо узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}^+ u = 0$ всередині інтервалу I, якщо

© О. Б. ЧЕРНОБАЙ, 2006

$$(\varphi, \mathcal{L} v)_{L^2(H,I)} = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(H, I). \tag{3}$$

Під фундаментальним розв'язком будемо розуміти (див. [7]) операторнозначну функцію

$$\tilde{I} \times \tilde{I} \ni (x, \xi) \mapsto E(x, \xi) \in L(H),$$

що має такі властивості:

1) при кожному фіксованому $\xi \in \tilde{I}$, $x \neq \xi$ існують частинні похідні $(D_x E)(x, \xi)$ як завгодно високого порядку, неперервні по (x, ξ) в кожному з трикутників

$$\{(x, \xi) \in \tilde{I} \times \tilde{I} \mid x \leq \xi\}, \quad \{(x, \xi) \in \tilde{I} \times \tilde{I} \mid x \geq \xi\}; \tag{4}$$

2) при $\xi \in I$

$$E(\xi + 0, \xi) - E(\xi - 0, \xi) = 1;$$

3) справджується рівність

$$\mathcal{L}\left(\int_I E(x, \xi) f(\xi) d\xi \right) = f(x),$$

де $x \in \tilde{I}$, $f(x)$ — векторнозначна функція з простору $C(H, I)$;

4) фундаментальний розв'язок завжди існує, і його можна записати у вигляді

$$E(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{A(\xi - x)}, & \xi < x, \\ -\frac{1}{2} e^{A(x - \xi)}, & \xi > x. \end{cases}$$

Теорема 1. *Будь-який узагальнений розв'язок* $\varphi(x) \in W_2^{-l}(H, I)$, $l = 1, 2, \ldots$, *рівняння* $\mathcal{L}^+ u = 0$ *в дійсності входить у* $W_2^p(H, I)$ *для будь-якого* $p = 1, 2, \ldots$.

Доведення (узагальнює на диференціальні вирази з операторними коефіцієнтами відповідне доведення з [7] гл. 16, § 6, п. 1)). Спочатку покажемо, що для кожної точки $x_0 \in I$ існує окіл $U(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$ такий, що $\varphi(x) \in W_{2,\mathrm{loc}}^p(H, U(x_0))$, де індекс loc означає локальне входження у простір.

Зафіксуємо $x_0 \in I$ і виберемо $\varepsilon > 0$ досить малим так, щоб $(x_0 - 3\varepsilon, x_0 + 3\varepsilon) \subseteq I$.

Нехай $k(t) \in C^\infty(R)$ анулюється при $|t| \geq \varepsilon$ і дорівнює одиниці в деякому околі нуля. За векторнозначною функцією $\omega \in C_0^\infty(H, U(x_0))$ побудуємо векторнозначну функцію на I:

$$v(x) = \int_I k(x - \xi) E(x, \xi) \omega(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{U(x_0)} [k(x - \xi) - 1] E(x, \xi) \omega(\xi) d\xi + \int_{U(x_0)} E(x, \xi) \omega(\xi) d\xi, \quad x \in I. \tag{5}$$

Ця векторнозначна функція анулюється при $|x - x_0| \geq 2\varepsilon$, тому є фінітною відносно I. Вона гладка — входить у $C_0^\infty(H, I)$ (це випливає з диференціювання під знаком інтеграла та наявності похідних $(D_x E)(x, \xi)$ при $x \neq \xi$ довільного порядку) і неперервна в обох трикутниках (4). (Зауважимо, що таку ж гладкість мають два інтеграли рівності (5).) Отже, функцію $v(x)$ можна підставити у рівність (3).

Враховуючи третю властивість фундаментального розв'язку, маємо

$$(\mathcal{L}v)(x) = \int\limits_{U(x_0)} \mathcal{L}_x([k(x-\xi)-1]E(x,\xi))\omega(\xi)d\xi + \omega(x), \quad x \in \tilde{I}. \tag{6}$$

Розглянемо ядро $K(x,\xi) = \mathcal{L}_x([k(x-\xi)-1]E(x,\xi))$ $x, \xi \in \tilde{I}$. Враховуючи ануляцію множників $k(x-\xi)-1$ в околі діагоналі $x = \xi$ та наведені властивості фундаментального розв'язку, робимо висновок, що існують похідні довільного порядку $(D_x D_\xi K)(x,\xi)$ для всіх $x, \xi \in \tilde{I}$, причому неперервні по $(x,\xi) \in \in \tilde{I} \times \tilde{I}$.

У просторі $L^2(H,I)$ визначимо оператор

$$(Bu)(x) = \int\limits_I K(x,\xi)u(\xi)d\xi, \quad u \in L^2(H,I), \quad x \in \tilde{I}. \tag{7}$$

Зауважимо, що функція $(Bu)(x)$ нескінченне число разів диференційовна. Оператор (7) можна розширити по неперервності до оператора, що діє неперервно з простору $W_2^{-p}(H,I)$ у простір $W_2^p(H,I)$, де $p = 1, 2, \ldots$ — довільне фіксоване.

Для доведення зафіксуємо $\beta = 0, \ldots, p$ і введемо ядро

$$\mathrm{L}_\beta(x,\xi) = (D_x^\beta K)(x,\xi), \quad x, \xi \in \tilde{I}.$$

Таким чином,

$$(D^\beta Bu)(x) = \int\limits_I \mathrm{L}_\beta(x,\xi)u(\xi)d\xi, \quad u \in L^2(H,I), \quad x \in \tilde{I}.$$

Для $u \in L^2(H,I)$ і будь-якого $f \in H$ маємо

$$\left|\left(\left(D^\beta Bu\right)(x), f\right)_H\right| = \left|\int\limits_I \left(\mathrm{L}_\beta(x,\xi)u(\xi), f\right)_H d\xi\right| = \left|\int\limits_I \left(u(\xi), \mathrm{L}_\beta^*(x,\xi)f\right)_H d\xi\right| \le$$

$$\le \int\limits_I \left|\left(u(\xi), \mathrm{L}_\beta^*(x,\xi)f\right)_{L^2(H,I)}\right| d\xi \le (b-a)\|u\|_{W_2^{-p}(H,I)} \|\mathrm{L}_\beta^*(x,\cdot)\|_{W_2^p(H,I)}. \tag{8}$$

Оскільки $\mathrm{L}_\beta(x,\cdot)$ — гладке ядро, то і $\mathrm{L}_\beta^*(x,\xi) = (\mathrm{L}_\beta(x,\xi))^*$ буде таким. Тоді з деякою константою $c_\beta > 0$ будемо мати

$$\|\mathrm{L}_\beta^*(x,\cdot)f\|_{W_2^p(H,I)} \le c_\beta \|f\|_H.$$

Таким чином, з (8) для будь-якого $f \in H$ отримуємо

$$\left|\left(\left(D^\beta Bu\right)(x), f\right)_H\right| \le \|u\|_{W_2^{-p}(H,I)} c_\beta \|f\|_H, \quad x \in \tilde{I}.$$

Завдяки довільності $f \in H$ це означає, що

$$\left\|\left(D^\beta Bu\right)(x)\right\|_H \le c_\beta \|u\|_{W_2^{-p}(H,I)}, \quad x \in \tilde{I}. \tag{9}$$

Слід зазначити, що для нескінченно диференційовної векторнозначної функції $\tilde{I} \ni x \mapsto v(x) \in H$, очевидно, виконується нерівність

$$\|v\|_{W_2^p(H,I)} \leq c\sum_{\beta=0}^{p} \max_{x\in\tilde I} \|(D^\beta v)(x)\|_H, \tag{10}$$

де $c > c_\beta$ — деяка стала.

З нерівностей (9) і (10) випливає

$$\|Bu\|_{W_2^p(H,I)} \leq c\sum_{\beta=0}^{p} \max_{x\in\tilde I} \|(D^\beta Bu)(x)\|_H \leq d\|u\|_{W_2^{-p}(H,I)}, \quad d>0. \tag{11}$$

Нерівність (11) означає, що оператор B діє неперервно з простору $W_2^{-p}(H, I)$ у простір $W_2^p(H, I)$, що й потрібно було довести.

Але тоді спряжений відносно $L^2(H, I)$ оператор B^+ діє неперервно з простору $W_2^{-p}(H, I)$ у простір $W_2^p(H, I)$. Використовуючи рівності (7) та (6), маємо

$$Lv = B\omega + \omega, \qquad \omega \in C_0^\infty(H, U(x_0)).$$

Підставимо останню рівність у співвідношення (3):

$$0 = (\varphi, \mathcal{L}v)_{L^2(H,I)} = (\varphi, B\omega)_{L^2(H,I)} + (\varphi,\omega)_{L^2(H,I)} = (B^+\varphi,\omega)_{L^2(H,I)} + (\varphi,\omega)_{L^2(H,I)}.$$

Таким чином, для будь-якого $\omega \in C_0^\infty(H, U(x_0))$

$$(\varphi, \omega)_{L^2(H,I)} = (-B^+\varphi, \omega)_{L^2(H,I)},$$

де $-B^+\varphi \in W_2^p(H, I)$, а це означає, що

$$\varphi(x) \in W_{2,\mathrm{loc}}^p(H, I). \tag{12}$$

Позбудемось індексу loc у включенні (12). Згідно з теоремами про вкладення $W_{2,\mathrm{loc}}^p(H, I) \subset C(H, I)$, тому функція $\varphi(x)$ належить основному простору. Зафіксуємо $c \in (a, b)$ і позначимо через φ розв'язок ω задачі Коші на $\tilde I = (a, b)$:

$$(\mathcal{L}^+\omega)(x) = 0, \qquad x \in \tilde I, \quad \omega(c) = \varphi(c).$$

Згідно з класичними теоремами цей розв'язок існує і входить у $W_2^p(H, I)$. З іншого боку, функція $\varphi(x)$ також є розв'язком цієї задачі Коші в деякому околі точки c. Внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші $\varphi(x) = \omega(x)$, $x \in I$, отже, $\omega = \varphi \in W_2^p(H, I)$ і є розв'язком рівняння $(\mathcal{L}^+\varphi)(x) = 0$, $x \in \tilde I$.

***Зауваження* 1.** Оскільки $\varphi \in W_2^p(H, I)$ з як завгодно великим $p = 1, 2, \ldots$, то це означає, що $\varphi \in C^\infty(H, I)$.

***Зауваження* 2.** Неважко переконатися, що теорема 1 є правильною і для більш загальних лінійних диференціальних рівнянь на $\mathbb{R}^1$ з операторними коефіцієнтами і ненульовою правою частиною, для яких існує фундаментальний розв'язок $E(x, \xi)$ з властивостями, відповідними до властивостей 1 – 4.

2. Перейдемо до викладу результатів у більш загальному випадку. Замість простору H будемо розглядати його фіксоване оснащення

$$H_- \supset H \supset H_+ \tag{13}$$

і при $k = 0, 1, \ldots$ — ланцюжок просторів

$$W_2^{-k}(H_-, I) = W_2^{-k}(I) \otimes H_- \supset L^2(H, I) =$$
$$= L^2(I) \otimes H \supset W_2^k(I) \otimes H_+ = W_2^k(H_+, I). \qquad (14)$$

Припускаємо, що *звуження оператора* A *з* (1) *на* H_+ *діє у просторі* H_+ *і є обмеженим оператором.* Тоді всі результати з п. 1 зберігаються при заміні H на H_+ і A на $A \upharpoonright H_+$. Але нам потрібна відповідна теорема для іншого типу узагальненого розв'язку рівняння $\mathcal{L}^+ u = 0$, пов'язаного з ланцюжком (14).

А саме, векторнозначну функцію $\varphi(x) \in W_2^{-l}(H, I)$, $l = 1, 2, \ldots$, назвемо узагальненим розв'язком цього рівняння всередині інтервалу I, якщо для будь-якого $v \in C_0^\infty(H_+, I)$ виконується співвідношення

$$(\varphi, \mathcal{L} v)_{L^2(H,I)} = 0. \qquad (15)$$

Теорема 2. *При вказаному припущенні на оператор A будь-який узагальнений розв'язок у сенсі* (15) $\varphi(x) \in W_2^{-l}(H, I)$, $l = 1, 2, \ldots$, *рівняння* $\mathcal{L}^+ u = 0$ *в дійсності входить у* $W_2^p(H_-, I)$ *для будь-якого* $p = 1, 2, \ldots$.

Насамперед зауважимо, що покращання узагальненого розв'язку „в напрямку H" немає: він входить у $W_2^p(H_-, I)$, а не в $W_2^p(H_+, I)$, що є природним.

Доведення. Покажемо, як з теореми 1 при заміні H і A на H_+ і $A \upharpoonright H_+$ випливає теорема 2.

Розглянемо поряд з ланцюжками (13) і (14) такі два ланцюжки:

$$W_2^{-k}(I) \supset L^2(I) \supset W_2^k(I), \qquad (16)$$

$$W_2^{-k}(H_+, I) = W_2^{-k}(I) \otimes H_+ \supset L^2(H_+, I) =$$
$$= L^2(I) \otimes H_+ \supset W_2^k(I) \otimes H_+ = W_2^k(H_+, I), \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (17)$$

Нехай $\mathbb{I}$ — стандартний оператор, пов'язаний із ланцюжком (13), $\mathbb{I}_k$, $\mathbb{K}_k$, $\mathbb{L}_k$ — такі ж оператори, пов'язані відповідно з ланцюжками (16), (17), (14). Оскільки простори (17), (14) утворені як тензорні добутки, то маємо (див. [6])

$$\mathbb{K}_k = \mathbb{I}_k \otimes 1, \quad \mathbb{L}_k = \mathbb{I}_k \otimes \mathbb{I}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (18)$$

Використовуючи ланцюжки (14), (17), в яких позитивні простори однакові, і формули (18), для $\varphi \in W_2^{-k}(H_-, I)$ і $u \in W_2^k(H_+, I)$ отримуємо

$$(\varphi, u)_{L^2(H,I)} = (\mathbb{L}_k \varphi, u)_{W_2^k(H_+,I)} = (\mathbb{K}_k^{-1} \mathbb{L}_k \varphi, u)_{L^2(H,I)}. \qquad (19)$$

Але згідно з (18)

$$\mathbb{K}_k^{-1} \mathbb{L}_k = (\mathbb{I}_k \otimes 1)^{-1} (\mathbb{I}_k \otimes \mathbb{I}) = (\mathbb{I}_k^{-1} \otimes 1)(\mathbb{I}_k \otimes \mathbb{I}) = \mathbb{I}_k^{-1} \mathbb{I}_k \otimes \mathbb{I}, = 1 \otimes \mathbb{I},$$

тому (19) перейде у рівність

$$(\varphi, u)_{L^2(H,I)} = ((1 \otimes \mathbb{I})\varphi, u)_{L^2(H,I)}, \quad \varphi \in W_2^{-k}(H_-, I), \quad u \in W_2^k(H_+, I). \qquad (20)$$

Нехай тепер $\varphi(x) \in W_2^{-l}(H_-, I)$ є узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}^+ u = 0$ в сенсі (15). Тоді згідно з (20) $v \in C_0^\infty(H_+, I)$, оскільки

$$0 = (\varphi, \mathcal{L} v)_{L^2(H,I)} = ((1 \otimes \mathbb{I})\varphi, \mathcal{L} v)_{L^2(H,I)}.$$

Це означає, що $((1 \otimes \mathbb{I})\varphi$ є узагальненим розв'язком цього рівняння в сенсі (3), де H і A замінено на H_+ і $A \upharpoonright H_+$. Як вже зазначалося, згідно з теоремою 1

$\big((1 \otimes \mathbb{I})\varphi \in W_2^p(H_+, I) = W_2^p(I) \otimes H_+$, $p = 1, 2, \ldots$, тобто $\varphi \in W_2^p(I) \otimes H_- =$
$= W_2^p(H_-, I)$, $= 1, 2, \ldots$.

***Зауваження* 3.** Зауваження 2 є справедливим і для узагальнених розв'язків типу (15) при певних умовах на вираз $\mathcal{L}$.

1. *Горбачук М. Л.* О представлении положительно определенных операторных функций // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 2. – С. 29–46.
2. *Горбачук М. Л., Кашпировский А. И.* О слабых решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Там же. – 1981. – **33**, № 4. – С. 513–518.
3. *Кашпировский А. И.* Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1981. – 18 с.
4. *Чернобай О. Б.* Спектральне зображення для узагальнених операторнозначних ядер Тепліца // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 12. – С. 1698–1710.
5. *Berezansky Yu. M., Chernobai O. B.* On the theory of generalized Toeplitz kernels // Там же. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1458–1472.
6. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* Граничные задачи для дифференциальных операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1994. – 284 с.
7. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.

Одержано 06.06.2005