УДК 517.96

**Ю. В. Васильева, С. А. Плакса** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА НА СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

We expand classes of closed Jordan rectifiable curves and given functions in the theory of the piecewise-continuous Riemann boundary-value problem and a characteristic singular integral equation related to this problem and possessing the Cauchy kernel.

Розширено класи замкнених жорданових спрямлюваних кривих та заданих функцій в теорії кусково-неперервної крайової задачі Рімана та пов'язаного з нею характеристичного сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші.

Пусть $\gamma$ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $D^+$ и $D^-$ — соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные кривой $\gamma$, при этом $0 \in D^+$. Обозначим через $T := \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ фиксированный конечный набор точек кривой $\gamma$.

Пусть множество $\mathcal{H}_T^\pm$ включает в себя голоморфные в области $D^\pm$ функции $F$ (имеющие также предел в бесконечно удаленной точке в случае класса $\mathcal{H}_T^-$), которые непрерывно продолжаются на $\gamma \setminus T$ и допускают оценку

$$|F(z)| \le c \sum_{j=1}^{m} \left| z - a_j \right|^{-\nu_F} \quad \forall z \in D^\pm, \tag{1}$$

где постоянная $c$ не зависит от $z$, а $\nu_F$ — некоторое число из промежутка $(0; 1)$, зависящее от функции $F$.

Рассмотрим кусочно-непрерывную краевую задачу Римана об отыскании функций $\Phi^+ \in \mathcal{H}_T^+$ и $\Phi^- \in \mathcal{H}_T^-$, удовлетворяющих условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \tag{2}$$

где $G$ и $g$ — заданные функции. При $g(t) \not\equiv 0$ имеем неоднородную краевую задачу Римана, а при $g(t) \equiv 0$ — однородную краевую задачу Римана.

В монографиях [1, 2] развита классическая теория краевой задачи Римана с гельдеровскими и кусочно-гельдеровскими заданными функциями на гладкой кривой. Характерная особенность краевой задачи в этих случаях состоит в том, что ее главная характеристика — индекс — определяется исключительно свойствами аргумента коэффициента $G$. В работе [3] указанная теория распространена на случай произвольной замкнутой жордановой спрямляемой кривой и функций $G$, $g$, удовлетворяющих условию Дини.

В монографии [4] построены примеры, которые демонстрируют зависимость разрешимости однородной краевой задачи Римана от геометрических свойств кривой и от модуля коэффициента $G$. Зависимость разрешимости краевых задач от контура и модуля коэффициента $G$ исследовалась также в работе [5].

В работе [6] изучена краевая задача Римана с коэффициентом $G$, удовлетворяющим условию Дини на разомкнутой кривой, линейная мера порции которой в каждом круге с центром в точке кривой соизмерима с радиусом круга (кривые, имеющие указанное свойство, после выхода работы [7] называют регулярными). При этом установлены формулы индекса краевой задачи Римана, которые полностью описывают влияние кривой, а также модуля и аргумента функции $G$ на разрешимость задачи.

В работе [8] рассмотрена кусочно-непрерывная краевая задача Римана, логарифм коэффициента которой допускает разрывы колебательного типа на замкнутой кривой Ляпунова.

В [9] изучена однородная краевая задача Римана на разомкнутой регулярной кривой, а в [10] — кусочно-непрерывная краевая задача Римана на замкнутой регулярной кривой, при этом логарифм коэффициента $G$ так же, как и в [8], допускает особенности как первого, так и второго рода. На основе дальнейшего развития идей работ [6, 8] в [10] предложена формула индекса краевой задачи Римана, которая учитывает совместное влияние коэффициента и кривой на разрешимость задачи.

В работах [11, 12] рассмотрена неоднородная краевая задача Римана с осциллирующим коэффициентом на регулярной разомкнутой кривой.

В данной работе расширяются классы замкнутых жордановых спрямляемых кривых и заданных функций в теории кусочно-непрерывной краевой задачи Римана и связанного с ней характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.

**1. Однородная задача.** Прежде чем сформулировать теорему, описывающую разрешимость кусочно-непрерывной однородной краевой задачи Римана на произвольной замкнутой жордановой спрямляемой кривой, введем необходимые обозначения.

Для множества $E$ комплексной плоскости введем подмножество $E_\varepsilon(X) := \bigcup_{x\in X}\{t\in E\colon |t-x|\le\varepsilon\}$, где $\varepsilon>0$ и $X\subset\mathbb{C}$. Если $X=\{x\}$, то множество $E_\varepsilon(X)$ будем обозначать через $E_\varepsilon(x)$.

Все интегралы по кривой $\gamma$ будем понимать в смысле их главного значения, т. е.

$$\int_\gamma \varphi(t)\,dt := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(X)}\varphi(t)\,dt,$$

где $X$ — конечное множество точек разрыва функции $\varphi$.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\tilde p(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{p(t)}{t-z}\,dt, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma. \tag{3}$$

Если функция $p$ суммируема на $\gamma$ или $p\in\mathcal{H}_T := \mathcal{H}_T^+ + \mathcal{H}_T^-$, то функция $\tilde p$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

При решении однородной краевой задачи Римана предполагаем, что функция $G$ имеет вид $G(t)=\exp(p(t))$, где $p\in\mathcal{H}_T$.

В каждой точке $a_j\in T$ определим числа

$$\Delta_p(a_j) := \liminf_{z\to a_j,\, z\in\mathbb{C}\setminus\gamma}\frac{\operatorname{Re}\tilde p(z)}{\ln|z-a_j|},$$

$$\Delta^p(a_j) := \liminf_{r\to 0}\frac{1}{\ln r}\inf_{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma\colon |z-a_j|=r}\operatorname{Re}\tilde p(z)$$

и, кроме того, предположим, что выполняется соотношение

$$\Delta^p(a_j) \le \Delta_p(a_j) + c \quad \forall\, a_j\in T, \tag{4}$$

где $c$ — некоторая постоянная.

Соотношение (4) означает, что в каждой точке $a_j\in T$ либо $\Delta^p(a_j) =$

$= \Delta_p(a_j) = +\infty$, либо $\Delta^p(a_j) = \Delta_p(a_j) = -\infty$, либо числа $\Delta^p(a_j)$ и $\Delta_p(a_j)$ конечны.

Определим *индекс* $\kappa$ кусочно-непрерывной краевой задачи Римана следующим образом. Если числа $\Delta^p(a_j)$ и $\Delta_p(a_j)$ конечны для всех $a_j \in T$, то полагаем

$$\kappa := \sum_{j=1}^{m} \kappa_j, \tag{5}$$

где

$$\kappa_j := \begin{cases} \Delta_p(a_j), & \text{если } \Delta_p(a_j) \text{ целое,} \\ [\Delta_p(a_j)] + 1, & \text{если } \Delta_p(a_j) \text{ нецелое.} \end{cases}$$

В случае, если среди значений $\Delta_p(a_j)$ есть $+\infty$, но нет $-\infty$, полагаем $\kappa = +\infty$. Наконец, в случае, если среди значений $\Delta_p(a_j)$ есть $-\infty$, полагаем $\kappa = -\infty$.

Следующая теорема доказывается по схеме, изложенной в [8, с. 46], и является обобщением теоремы 1 из [10].

**Теорема 1.** *Пусть* $\gamma$ — *замкнутая жорданова спрямляемая кривая и функция* $G$ *имеет вид* $G(t) = \exp(p(t))$, *где* $p \in \mathcal{H}_T$ *и, кроме того, выполняется соотношение* (4). *Тогда*:

1) *если* $-\infty \le \kappa < 0$, *то однородная краевая задача Римана не имеет нетривиальных решений*;

2) *если* $\kappa = +\infty$, *то однородная краевая задача Римана имеет бесконечное множество линейно независимых решений*;

3) *если* $0 \le \kappa < \infty$, *то однородная краевая задача Римана имеет* $\kappa + 1$ *линейно независимых решений и ее общее решение определяется формулой*

$$\Phi^{\pm}(z) = \exp(\tilde{p}(t)) P_\kappa(z) \prod_{j=1}^{m} (z - a_j)^{-\kappa_j}, \quad z \in D^{\pm},$$

*где* $P_\kappa$ — *произвольный полином степени не выше* $\kappa$.

**2. Неоднородная задача.** Рассмотрим неоднородную краевую задачу Римана в случае конечного индекса при дополнительном предположении о том, что при всех $a_j \in T$ конечны числа

$$\Delta_p^*(a_j) := \limsup_{z \to a_j,\, z \in \mathbb{C} \setminus \gamma} \frac{\operatorname{Re} \tilde{p}(z)}{\ln|z - a_j|}.$$

Будем использовать следующую метрическую характеристику (см. [13]) кривой $\gamma$:

$$\theta(\varepsilon) := \sup_{z \in \gamma} \theta_z(\varepsilon),$$

где $\theta_z(\varepsilon) := \operatorname{mes}\{t \in \gamma : |t - z| \le \varepsilon\}$, а $\operatorname{mes}$ обозначает линейную меру Лебега на $\gamma$.

Введем также в рассмотрение модуль непрерывности

$$\omega(f, E, \varepsilon) := \sup_{t_1, t_2 \in E, |t_1 - t_2| \le \varepsilon} |f(t_1) - f(t_2)|$$

функции $f$ на множестве $E \subset \mathbb{C}$.

Для функции $q$, заданной на $\gamma\setminus T$, и точки $x \in \gamma\setminus T$ введем локальный центрированный модуль гладкости первого порядка:

$$\Omega_x(q,\gamma,\varepsilon) \;:=\; \begin{cases} \sup\limits_{t\in\gamma:|t-x|=\varepsilon} |q(t)-q(x)|, & \text{если } \{t\in\gamma: |t-x| = \varepsilon\} \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \{t\in\gamma: |t-x| = \varepsilon\} = \varnothing, \end{cases}$$

который в отличие от модуля непрерывности не является монотонной функцией от $\varepsilon$ и поэтому учитывает возможные колебания функции $q$. Заметим, что функция $q$ непрерывна в точке $x$ тогда и только тогда, когда $\Omega_x(q,\gamma,\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $\tilde{p}^+(x)$, $\tilde{p}^-(x)$ предельные значения в точке $x \in \gamma\setminus T$ функции (3) соответственно из областей $D^+$, $D^-$. Приведенный сингулярный интеграл Коши определяется равенством

$$(Sp)(x) \;:=\; \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{p(t)-p(x)}{t-x}\,dt \,+\, p(x), \quad x \in \gamma\setminus T.$$

При решении неоднородной краевой задачи Римана используются приводимые ниже леммы.

**Лемма 1.** *Пусть* $\gamma$ *— замкнутая жорданова спрямляемая кривая, функция* $F^+$ *голоморфна в* $D^+$ *и непрерывна на* $\overline{D^+}\setminus T$, *а функция* $q$ *непрерывна на* $\gamma\setminus T$ *и при всех* $\delta > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in\gamma\setminus\gamma_\delta(T)} \int\limits_{[0,\varepsilon]} \frac{\Omega_x(q,\gamma,\eta)}{\eta}\,d\theta_x(\eta) \;\to\; 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

*Если при этом функция* $h := F^+q$ *суммируема на* $\gamma$, *то интеграл* $\tilde{h}$ *имеет предельные значения на* $\gamma\setminus T$ *из областей* $D^+$, $D^-$ *и справедливы формулы Сохоцкого*

$$\tilde{h}^{\pm}(x) \;=\; \frac{1}{2}(Sh)(x) \pm \frac{1}{2}h(x) \quad \forall\, x \in \gamma\setminus T. \tag{7}$$

***Доказательство.*** Пусть $\gamma\setminus\gamma_\delta(T) \neq \varnothing$ и $x$ — произвольная точка множества $\gamma\setminus\gamma_\delta(T)$. При $\varepsilon \in (0;\delta/2]$ рассмотрим произвольную точку $z \in D^{\pm}$ такую, что $|z-x| \le \varepsilon/2$, и используем равенство

$$\tilde{h}(z) \mp \frac{1}{2}h(x) - \frac{1}{2}(Sh)(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon(x)} \frac{h(t)-h(x)}{t-z}\,dt \,-\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon(x)} \frac{h(t)-h(x)}{t-x}\,dt \,+$$

$$+\; \frac{z-x}{2\pi i}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(x)} \frac{h(t)-h(x)}{(t-z)(t-x)}\,dt \;=:\; I_1 - I_2 + I_3.$$

Оценим интеграл $I_1$. Для этого, обозначив через $x_z$ одну из точек $\gamma$, в которой $|z-x_z| = \min\limits_{t\in\gamma}|t-z|$, представим $I_1$ в виде

$$I_1 \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon(x)} \frac{F^+(t)(q(t)-q(x_z))}{t-z}\,dt + \frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon(x)} \frac{F^+(t)-F^+(x)}{t-z}\,dt \,+$$

$$+\; \frac{q(x_z)-q(x)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon(x)} \frac{F^+(t)}{t-z}\,dt \;=:\; I_1' + I_1'' + I_1'''.$$

Учитывая неравенство $|t - x_z| \le 2|t - z|$, которое выполняется при всех $t \in \gamma$, оцениваем интеграл $I_1'$:

$$|I_1'| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\varepsilon(x)} \frac{|F^+(t)||q(t) - q(x_z)|}{|t - z|} |dt| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \max_{t \in \gamma_\varepsilon(x)} |F^+(t)| \int\limits_{\gamma_\varepsilon(x)} \frac{|q(t) - q(x_z)|}{|t - x_z|} |dt| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \max_{\underline{t \in \gamma \setminus \gamma_{\delta/2}(T)}} |F^+(t)| \int\limits_{[0,2\varepsilon]} \frac{\Omega_{x_z}(q, \gamma, \eta)}{\eta} d\theta_{x_z}(\eta).$$

Для оценки слагаемого $I_1''$ введем в рассмотрение множество $D_\varepsilon^+ := \{\xi \in D^+ : |\xi - x| < \varepsilon\}$, ориентация границы $\partial D_\varepsilon^+$ которого индуцирована ориентацией кривой $\gamma$, и используем равенство

$$I_1'' = \frac{q(x)}{2\pi i} \left( \int\limits_{\partial D_\varepsilon^+} \frac{F^+(t) - F^+(x)}{t - z} dt - \int\limits_{\partial D_\varepsilon^+ \setminus \gamma_\varepsilon(x)} \frac{F^+(t) - F^+(x)}{t - z} dt \right).$$

Тогда в случае, если $z \in D^+$, с использованием формулы Коши получаем оценку

$$|I_1''| \le |q(x)| |F^+(z) - F^+(x)| + \frac{|q(x)|}{2\pi} \int\limits_{\partial D_\varepsilon^+ \setminus \gamma_\varepsilon(x)} \frac{|F^+(t) - F^+(x)|}{|t - z|} |dt| \le$$

$$\le 3 \max_{\underline{t \in \gamma \setminus \gamma_\delta(T)}} |q(t)| \, \omega\left(F^+, \overline{D^+ \setminus D_{\delta/2}^+(T)}, \varepsilon\right),$$

а в случае, если $z \in D^-$, используя теорему Коши, имеем

$$|I_1''| \le 2 \max_{\underline{t \in \gamma \setminus \gamma_\delta(T)}} |q(t)| \, \omega\left(F^+, \overline{D^+ \setminus D_{\delta/2}^+(T)}, \varepsilon\right).$$

Оценивая $I_1'''$ подобно слагаемому $I_1''$, получаем

$$|I_1'''| \le 3 \max_{\underline{t \in D^+ \setminus D_{\delta/2}^+(T)}} |F^+(t)| \, \omega\left(q, \gamma \setminus \gamma_{\delta/2}(T), \varepsilon\right).$$

Таким образом, из полученных оценок следует, что $I_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогично устанавливается, что $I_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для завершения доказательства остается использовать также то, что при каждом фиксированном $\varepsilon$ интеграл $I_3$ стремится к нулю при $z \to x$.

Аналогично лемме 1 доказывается следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть* $\gamma$ — *замкнутая жорданова спрямляемая кривая, функция* $F^-$ *голоморфна в* $D^-$ *и непрерывна на* $\overline{D^-} \setminus T$, *а функция* $q$ *непрерывна на* $\gamma \setminus T$ *и при всех* $\delta > 0$ *удовлетворяет условию* (6). *Если при этом функция* $h := F^- q$ *суммируема на* $\gamma$, *то интеграл* $\tilde{h}$ *имеет предельные значения на* $\gamma \setminus T$ *из областей* $D^+$, $D^-$ *и справедливы формулы Сохоцкого* (7).

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество действительных чисел. Обозначим также через $d := \sup\limits_{t_1,t_2\in\gamma} |t_1 - t_2|$ диаметр кривой $\gamma$ и $r_t := \frac{1}{4}\min\limits_{a_j\in T}|t-a_j|$, где $t\in\mathbb{C}$.

**Лемма 3.** *Пусть* $\gamma$ *— замкнутая жорданова спрямляемая кривая, удовлетворяющая условию*

$$\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\nu}), \quad \varepsilon\to 0, \tag{8}$$

*где* $0<\nu\le 1$, *функция* $F^{\pm}$ *голоморфна в* $D^{\pm}$, *непрерывна на* $\overline{D^{\pm}}\setminus T$ *и удодовлетворяет неравенству*

$$\left|F^{\pm}(z)\right| \le c\prod_{j=1}^{m}\left|z-a_j\right|^{\mu_j} \quad \forall z\in D^{\pm}, \quad \mu_j\in\mathbb{R}, \tag{9}$$

*а функция* $q$ *непрерывна на* $\gamma\setminus T$ *и удовлетворяет следующим оценкам*:

$$|q(t)| \le c\prod_{j=1}^{m}\left|t-a_j\right|^{\alpha_j} \quad \forall\, t\in\gamma\setminus T, \quad \alpha_j > -\mu_j-\nu, \tag{10}$$

$$\int\limits_{[0,r_t]}\frac{\Omega_t(q,\gamma,\eta)}{\eta}d\theta_t(\eta) \le c\prod_{j=1}^{m}\left|t-a_j\right|^{\beta_j} \quad \forall\, t\in\gamma\setminus T, \quad \beta_j\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

*где постоянная* $c$ *не зависит от* $t$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_{\gamma}\frac{q(t)\,F^{\pm}(t)}{t-z}dt\right| \le c\prod_{j=1}^{m}\max\left\{\left|z-a_j\right|^{\mu_j+\beta_j},\ V_{\alpha_j+\mu_j+\nu}\left(\left|z-a_j\right|\right)\right\} \quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\gamma, \tag{12}$$

*где*

$$V_{\alpha_j+\mu_j+\nu}(r) = \begin{cases} r^{\alpha_j+\mu_j+\nu-1}, & \text{если} \quad \alpha_j+\mu_j+\nu<1;\\ \ln\dfrac{d}{r}, & \text{если} \quad \alpha_j+\mu_j+\nu=1;\\ 1, & \text{если} \quad \alpha_j+\mu_j+\nu>1,\end{cases}$$

*и постоянная* $c$ *не зависит от* $z$.

***Доказательство.*** Докажем оценку (12) для интеграла $\tilde{h}$ в случае, когда $h := qF^{+}$ (в случае, если $h := qF^{-}$, оценка (12) доказывается аналогично).

Пусть $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma\colon |z-a_j| = r$. Представим $2\pi i\tilde{h}(z)$ в виде суммы трех интегралов:

$$2\pi i\tilde{h}(z) = \int\limits_{\gamma_{2r}(a_j)\setminus\gamma_{r/8}(z)}\frac{q(t)\,F^{+}(t)}{t-z}dt + \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{2r}(a_j)}\frac{q(t)\,F^{+}(t)}{t-z}dt +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_{r/8}(z)}\frac{q(t)\,F^{+}(t)}{t-z}dt =: I_4 + I_5 + I_6.$$

Учитывая неравенства (9), (10) и лемму 1 из [13], имеем

$$|I_4| \leq \frac{8}{r} \int\limits_{\gamma_{2r}(a_j)\setminus\gamma_{r/8}(z)} |q(t)|\left|F^+(t)\right||dt| \leq$$

$$\leq \frac{c}{r} \int\limits_{\gamma_{2r}(a_j)} \left|t-a_j\right|^{\alpha_j+\mu_j}|dt| = \frac{c}{r}\int\limits_0^{2r} \eta^{\alpha_j+\mu_j}\, d\theta_{a_j}(\eta),$$

где интеграл по мере $\theta_{a_j}(\eta)$ понимается как несобственный интеграл Римана – Стильтьеса. Здесь и далее в доказательстве через $c$ обозначены постоянные, значения которых не зависят от $r$ и $z$, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Теперь, оценивая несобственный интеграл Римана – Стильтьеса с учетом предложения 1 работы [14] (см. также доказательство теоремы 1 работы [15]), а также используя условие (8), находим

$$|I_4| \leq \frac{c}{r}\int\limits_0^{2r} \frac{\theta_{a_j}(\eta)}{\eta}\eta^{\alpha_j+\mu_j}\, d\eta \leq \frac{c}{r}\int\limits_0^{2r} \eta^{\alpha_j+\mu_j+\nu-1}\, d\eta \leq c\left|z-a_j\right|^{\alpha_j+\mu_j+\nu-1}.$$

Аналогично с учетом неравенства $\left|t-a_j\right| \leq 2|t-z|$, которое выполняется при всех $t\in\gamma\setminus\gamma_{2r}(a_j)$, получаем оценку интеграла $I_5$:

$$|I_5| \leq 2 \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{2r}(a_j)} \frac{\left|q(t)F^+(t)\right|}{\left|t-a_j\right|}|dt| \leq c\int\limits_{2r}^{d} \eta^{\alpha_j+\mu_j-1}\, d\theta_{a_j}(\eta) \leq$$

$$\leq c\int\limits_r^d \frac{\theta_{a_j}(\eta)}{\eta}\eta^{\alpha_j+\mu_j-1}\, d\eta = c\int\limits_r^d \eta^{\alpha_j+\mu_j+\nu-2}\, d\eta \leq cV_{\alpha_j+\mu_j+\nu}(r).$$

При $\gamma_{r/8}(z) \neq \varnothing$ (в противном случае оценка для $I_6$ тривиальна), обозначая через $x_z$ одну из точек кривой $\gamma$, для которой $\left|z-x_z\right| = \min\limits_{t\in\gamma}|t-z|$, записываем интеграл $I_6$ в виде

$$I_6 = \int\limits_{\gamma_{r/8}(z)} \frac{F^+(t)(q(t)-q(x_z))}{t-z}dt + q(x_z)\int\limits_{\gamma_{r/8}(z)} \frac{F^+(t)}{t-z}dt = I_6' + I_6''.$$

Используя неравенства (9), (11) и оценивая $I_6'$ аналогично интегралу $I_1'$, получаем

$$|I_6'| \leq 2\max_{t\in\gamma_{r/8}(z)}\left|F^+(t)\right| \int\limits_{[0,r/4]} \frac{\Omega_{x_z}(q,\gamma,\eta)}{\eta}d\theta_{x_z}(\eta) \leq c\,r^{\mu_j+\beta_j}.$$

Для оценки слагаемого $I_6''$ введем в рассмотрение множество $D^+_{r/8} :=$ $:= \{\xi\in D^+ : |\xi-z| < r/8\}$, ориентация границы $\partial D^+_{r/8}$ которого индуцирована ориентацией кривой $\gamma$, и представим $I_6''$ в виде

$$I_6'' = q(x_z)\left(\int\limits_{\partial D^+_{r/8}} \frac{F^+(t)}{t-z}dt - \int\limits_{\partial D^+_{r/8}\setminus\gamma_{r/8}(z)} \frac{F^+(t)}{t-z}dt\right).$$

Тогда, оценивая $I_6''$ таким же способом, как и $I_1''$, получаем

$$|I_6''| \le c r^{\mu_j + \alpha_j}.$$

Следствием полученных оценок является неравенство (12).

Лемма доказана.

Следующая теорема описывает разрешимость неоднородной краевой задачи Римана с конечным индексом при минимальных предположениях о коэффициенте $G$ задачи.

**Теорема 2.** *Пусть* $\gamma$ *— замкнутая жорданова спрямляемая кривая, удовлетворяющая условию* (8), *где* $0 < \nu \le 1$; *функция* $G$ *представима в виде* $G(t) = \exp(p(t))$, *где функция* $p \in \mathcal{H}_T$, *и для всех* $a_j \in T$ *конечны числа* $\Delta_p(a_j)$, $\Delta_p^*(a_j)$; *функция* $g$ *представима в виде* $g = g^+ + g^-$, *где* $g^+ \in \mathcal{H}_T^+$, *а функция* $g^-$ *голоморфна в* $D^-$, *непрерывна на* $\overline{D^-} \setminus T$, *удовлетворяет условию вида* (6) *и оценкам*

$$\left|g^-(t)\right| \le c \prod_{j=1}^{m} \left|t - a_j\right|^{\alpha_j} \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \quad \alpha_j > \Delta_p^* - \Delta_p - \nu, \tag{13}$$

$$\int\limits_{[0, r_t]} \frac{\Omega_t(g^-, \gamma, \eta)}{\eta} d\theta_t(\eta) \le c \prod_{j=1}^{m} \left|t - a_j\right|^{\beta_j} \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \quad \beta_j > \Delta_p^* - \Delta_p - 1, \tag{14}$$

*где постоянная* $c$ *не зависит от* $t$.

*Тогда при* $\kappa \ge -1$ *неоднородная краевая задача Римана разрешима, а при* $\kappa < -1$ *для ее разрешимости необходимо и достаточно выпонение* $-\kappa - 1$ *условий*

$$\int\limits_{\gamma} \frac{g(t)}{\exp(\tilde{p}^+(t))} \prod_{j=1}^{m} (t - a_j)^{\kappa_j} t^{s-1} dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, -\kappa - 1. \tag{15}$$

*Общее решение неоднородной краевой задачи Римана определяется формулой*

$$\Phi^{\pm}(z) = \Phi_0(z) + \exp(\tilde{p}(z)) P_\kappa(z) \prod_{j=1}^{m} (z - a_j)^{-\kappa_j}, \quad z \in D^{\pm}, \tag{16}$$

*где*

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} g^+(z) + \hat{\Phi}(z), & \text{если } z \in D^+, \\ \hat{\Phi}(z), & \text{если } z \in D^-, \end{cases}$$

$$\hat{\Phi}(z) = \prod_{j=1}^{m} (z - a_j)^{-\kappa_j} \exp(\tilde{p}(z)) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g^-(t)}{\exp(\tilde{p}^+(t)) \prod_{j=1}^{m} (t - a_j)^{-\kappa_j}} \frac{dt}{t - z},$$

*а* $P_\kappa$ *— произвольный полином степени не выше* $\kappa$, *если* $\kappa \ge 0$, *и* $P_\kappa(z) \equiv 0$, *если* $\kappa < 0$.

***Доказательство.*** С учетом равенств $g(t) = g^+(t) + g^-(t)$ и $G(t) = \exp(\tilde{p}^+(t) - \tilde{p}^-(t))$, которые выполняются при всех $t \in \gamma \setminus T$, перепишем краевое условие (2) в виде

$$\frac{(\Phi^+(t) - g^+(t)) \prod_{j=1}^{m} (t - a_j)^{\kappa_j}}{\exp(\tilde{p}^+(t))} = \frac{\Phi^-(t) \prod_{j=1}^{m} (t - a_j)^{\kappa_j}}{\exp(\tilde{p}^-(t))} + \frac{g^-(t) \prod_{j=1}^{m} (t - a_j)^{\kappa_j}}{\exp(\tilde{p}^+(t))}.$$

Обозначим

$$F^+(t) := \exp(-\tilde{p}^+(t))\prod_{j=1}^{m}(t-a_j)^{\kappa_j}.$$

При $\varepsilon > 0$ и всех $t \in \gamma \setminus T$, достаточно близких к $a_j \in T$, функция $F^+$ удовлетворяет неравенству

$$\left|F^+(t)\right| \le c\left|t-a_j\right|^{\kappa_j - \Delta_p^*(a_j)-\varepsilon}, \tag{17}$$

следствием которого с учетом неравенства (13) является оценка

$$\left|g^-(t)F^+(t)\right| \le c\left|t-a_j\right|^{\alpha_j+\kappa_j-\Delta_p^*(a_j)-\varepsilon},$$

где через $c$ обозначены различные постоянные, не зависящие от $t$. Кроме того, при достаточно малом $\varepsilon$ выполняется неравенство $\alpha_j + \kappa_j - \Delta_p^*(a_j) - \varepsilon > -\nu$ и, следовательно, функция $h(t) := g^-(t)\,F^+(t)$ является суммируемой на $\gamma$. Тогда согласно лемме 1, где $q \equiv g^-$, интеграл $\tilde{h}$ имеет предельные значения на $\gamma \setminus T$ из областей $D^+$, $D^-$, и поэтому функция $\Phi_0$ удовлетворяет условию граничного сопряжения (2).

Оценим теперь $\Phi_0(z)$ в окрестности точки $a_j$. С этой целью заметим, что при $\varepsilon > 0$ в достаточно малой окрестности этой точки справедлива оценка

$$\left|\exp(\tilde{p}(t))\right|\prod_{j=1}^{m}\left|z-a_j\right|^{-\kappa_j} \le c\left|z-a_j\right|^{\Delta_p(a_j)-\kappa_j-\varepsilon}, \tag{18}$$

где постоянная $c$ не зависит от $z$. Воспользуемся также леммой 3, где на основании неравенства (17) примем $\mu_j := \kappa_j - \Delta_p^*(a_j) - \varepsilon$ и $q \equiv g^-$. В результате с учетом оценок (12), (18), а также неравенств

$$\alpha_j + \Delta_p(a_j) - \Delta_p^*(a_j) + \nu - 1 - 2\varepsilon > -1, \qquad \beta_j + \Delta_p(a_j) - \Delta_p^*(a_j) - 2\varepsilon > -1,$$

выполняющихся при достаточно малом $\varepsilon$, приходим к заключению, что функция $\Phi_0$ удовлетворяет неравенству вида (1).

Итак, $\Phi_0$ является частным решением неоднородной краевой задачи Римана. При этом отметим, что в случае $\kappa < 0$ функция $\exp(\tilde{p}(z))\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{-\kappa_j}$ имеет полюс порядка $-\kappa$ в бесконечно удаленной точке и $\Phi_0$ является решением краевой задачи Римана лишь при выполнении $-\kappa - 1$ условий (15).

Для завершения доказательства остается заметить, что в формуле (16) общее решение неоднородной краевой задачи Римана представлено в виде суммы частного решения этой задачи и общего решения однородной задачи.

Заметим, что в соответствующих результатах работ [6, 10, 11, 12] о разрешимости неоднородной краевой задачи Римана кривая $\gamma$ удовлетворяет условию (8) при $\nu = 1$. При этом в работах [6, 11, 12] сделаны также дополнительные предположения о модулях непрерывности функции $G$ и о гельдеровости функции $g$ вне каждой окрестности концов разомкнутой кривой.

В следующей теореме снимается условие (14) теоремы 2 за счет дополнительных предположений о функции $G$.

**Теорема 3.** *Пусть* $\gamma$ — *замкнутая жорданова спрямляемая кривая, удовлетворяющая условию* (8), *где* $0 < \nu \le 1$; *функция* $G$ *представима в виде* $G(t) = \exp(p(t))$, *где* $p \in \mathcal{H}_T$, *и удовлетворяет условию вида* (6) *и оценкам*

$$|G(t)| \ge c\prod_{j=1}^{m}\left|t-a_j\right|^{n_j} \quad \forall\, t \in \gamma\setminus T, \quad n_j \ge 0, \tag{19}$$

$$\int\limits_{[0,r_t]} \frac{\Omega_t(G,\gamma,\eta)}{\eta}\,d\theta_t(\eta) \le c\prod_{j=1}^{m}\left|t-a_j\right|^{m_j} \quad \forall\, t \in \gamma\setminus T, \quad m_j \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

*в которых постоянная* $c$ *не зависит от* $t$, *и, кроме того, при всех* $j = \overline{1,m}$ *конечны числа* $\Delta_p(a_j)$, $\Delta_p^*(a_j)$; *функция* $g$ *представима в виде* $g = g^+ + g^-$, *где* $g^+ \in \mathcal{H}_T^+$, *а функция* $g^-$ *голоморфна в* $D^-$, *непрерывна на* $\overline{D^-}\setminus T$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\left|g^-(z)\right| \le c\prod_{j=1}^{m}\left|z-a_j\right|^{k_j} \quad \forall\, z \in D^-, \tag{21}$$

$$k_j > \Delta_p^*(a_j) - \Delta_p(a_j) + n_j + \max\{n_j - m_j - 1; -\nu\},$$

*где постоянная* $c$ *не зависит от* $z$.

*Тогда при* $\kappa \ge -1$ *неоднородная краевая задача Римана разрешима, а при* $\kappa < -1$ *для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение* $-\kappa - 1$ *условий* (15). *Общее решение неоднородной краевой задачи Римана определяется формулой* (16).

***Доказательство.*** Используя равенства $g(t) = g^+(t) + g^-(t)$ и $\exp(\tilde{p}^+(t)) = G(t)\exp(\tilde{p}^-(t))$, которые выполняются при всех $t \in \gamma\setminus T$, преобразовываем краевое условие (2) к виду

$$\frac{(\Phi^+(t) - g^+(t))\prod_{j=1}^{m}(t-a_j)^{\kappa_j}}{\exp(\tilde{p}^+(t))} = \frac{\Phi^-(t)\prod_{j=1}^{m}(t-a_j)^{\kappa_j}}{\exp(\tilde{p}^-(t))} + \frac{g^-(t)\prod_{j=1}^{m}(t-a_j)^{\kappa_j}}{G(t)\exp(\tilde{p}^-(t))}.$$

Обозначим

$$F^-(t) := \exp(-\tilde{p}^-(t))\,g^-(t)\prod_{j=1}^{m}(t-a_j)^{\kappa_j}.$$

С использованием неравенства (21) аналогично оценке (17) устанавливается, что при $\varepsilon > 0$ и всех $z \in D^-$, достаточно близких к $a_j \in T$, выполняется неравенство

$$\left|F^-(z)\right| \le c\left|z-a_j\right|^{k_j+\kappa_j-\Delta_p^*(a_j)-\varepsilon}. \tag{22}$$

Из неравенств (19), (22) следует, что при всех $t \in \gamma\setminus T$, достаточно близких к $a_j$, справедлива оценка

$$\left|\frac{F^-(t)}{G(t)}\right| \le c\left|t-a_j\right|^{k_j+\kappa_j-n_j-\Delta_p^*(a_j)-\varepsilon},$$

где через $c$ обозначены различные постоянные, не зависящие от $t$. Кроме того, при достаточно малом $\varepsilon$ выполняется неравенство $k_j + \kappa_j - n_j - \Delta_p^*(a_j) - \varepsilon >$ $> -\nu$ и, следовательно, функция $h(t) := (G(t))^{-1} F^-(t)$ является суммируемой на $\gamma$. Тогда согласно лемме 2 интеграл $\tilde{h}$ имеет предельные значения на $\gamma \setminus T$ из областей $D^+$, $D^-$, и поэтому функция $\Phi_0$ удовлетворяет условию граничного сопряжения (2).

Для оценки $\Phi_0(z)$ в окрестности точки $a_j$ используем лемму 3, где полагаем $q(t) := (G(t))^{-1}$ и на основании неравенства (22) принимаем $\mu_j := k_j + \kappa_j -$ $- \Delta_p^*(a_j) - \varepsilon$, а, кроме того, с использованием неравенств (19) и (20) устанавливаем, что $\beta_j = m_j - 2n_j$. Учитывая оценку (12), а также оценку (18) и неравенства

$$k_j + \Delta_p(a_j) - \Delta_p^*(a_j) + m_j - 2n_j - 2\varepsilon > -1,$$

$$k_j + \Delta_p(a_j) - \Delta_p^*(a_j) - n_j + \nu - 1 - 2\varepsilon > -1,$$

которые выполняются при достаточно малом $\varepsilon$, заключаем, что функция $\Phi_0$ удовлетворяет неравенству вида (1).

Теперь справедливость утверждения теоремы устанавливается так же, как и при доказательстве теоремы 2 после получения аналогичной оценки для функции $\Phi_0$.

**3. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение.** Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) = f(t) \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T \tag{23}$$

в случае, когда функции $a$, $b$, $f$ допускают разрывы как первого, так и второго рода в точках набора $T$ и выполняются соотношения

$$0 < c_1 \le \left| a^2(t) - b^2(t) \right| \le c_2 < \infty \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T. \tag{24}$$

Решение $\varphi$ уравнения (23) предполагаем принадлежащим классу $\mathcal{H}_{T,0} :=$ $:= \mathcal{H}_T^+ + \mathcal{H}_{T,0}^-$, где через $\mathcal{H}_{T,0}^-$ обозначено множество функций $F \in \mathcal{H}_T^-$, равных нулю в бесконечно удаленной точке.

Будем предполагать, что во всех точках $a_j \in T$ выполняются соотношения

$$-\infty < \Delta_p(a_j) = \Delta_p^*(a_j) < \infty, \tag{25}$$

где

$$p(t) := \ln \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$$

понимаем как произвольную непрерывную на $\gamma \setminus T$ ветвь этой функции.

*Индекс* $\kappa$ уравнения (23) определяется формулой (5).

**Теорема 4.** *Пусть* $\gamma$ *— замкнутая жорданова спрямляемая кривая, удовлетворяющая условию* (8), *где* $1/2 < \nu \le 1$; *функция* $f$ *представима в виде* $f(t) := f^+(t) + f^-(t)$, *где* $f^+ \in \mathcal{H}_T^+$, $f^- \in \mathcal{H}_{T,0}^-$, *и при этом выполняется неравенство*

$$\left| f^{\pm}(z) \right| \le c \prod_{j=1}^{m} \left| z - a_j \right|^{\mu_j} \quad \forall\, z \in D^{\pm}, \quad 1 - 2\nu < \mu_j < 0, \tag{26}$$

*в котором постоянная* $c$ *не зависит от* $z$; *функции* $a$ *и* $b$ *удовлетворяют условиям вида* (6), *а также оценкам вида* (11), *в которых*

$$\beta_j > \max\left\{-(\nu+\mu_j);\ -\frac{1+\mu_j}{2}\right\}, \tag{27}$$

*и, кроме того, выполняются соотношение* (24) *и соотношения* (25) *при всех* $a_j \in T$.

*Тогда при* $\kappa \geq 0$ *характеристическое уравнение* (23) *разрешимо в классе* $\mathcal{H}_{T,0}$, *а при* $\kappa < 0$ *для его разрешимости необходимо и достаточно выполнения* $-\kappa$ *условий*

$$\int_\gamma \frac{f(t)}{Z(t)} t^{s-1}\, dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, -\kappa,$$

*где*

$$Z(t) := (a(t)-b(t))\prod_{j=1}^{m}(t-a_j)^{-\kappa_j}\exp(\tilde{p}^-(t)).$$

*Общее решение уравнения* (23) *в классе* $\mathcal{H}_{T,0}$ *имеет вид*

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^2(t)-b^2(t)}\Big(a(t)f(t) - b(t)Z(t)(S\psi_f)(t) + b(t)Z(t)P_{\kappa-1}(t)\Big),$$

*где* $\psi_f(t) := f(t)/Z(t)$, *а* $P_{\kappa-1}$ — *произвольный полином степени не выше* $\kappa - 1$ *при* $\kappa > 0$ *и* $P_{\kappa-1}(z) \equiv 0$ *при* $\kappa \leq 0$.

***Доказательство.*** Используем классический метод [1, 2] сведения характеристического уравнения (23) к неоднородной краевой задаче Римана (2), коэффициент $G$ и свободный член $g$ которой задаются равенствами

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}. \tag{28}$$

Для функции $G$ выполняется условие вида (6), а также оценки (19), (20) при $n_j = 0$ и $m_j = \beta_j$. Это следует из соотношения (24), а также аналогичных условий и оценок для функций $a$ и $b$.

Покажем, что для функции $g$ также выполняются условия теоремы 3. Следствием оценок (24), (26) и условия (8) является суммируемость на $\gamma$ функции $h := qF^{\pm}$, где $q(t) = (a(t)+b(t))^{-1}$ и $F^{\pm} \equiv f^{\pm}$. Функция $q$ так же, как и функция $G$, удовлетворяет условию (6). Поэтому согласно лемме 1 или 2 интеграл $\tilde{h}$ имеет предельные значения на $\gamma \setminus T$ из областей $D^+$, $D^-$ и справедливы формулы Сохоцкого (7). Следовательно, при всех $t \in \gamma \setminus T$ выполняется равенство $g(t) = \tilde{g}^+(t) - \tilde{g}^-(t)$.

Кроме того, согласно лемме 3 справедлива оценка (12), при этом $\alpha_j = 0$ и выполняется неравенство $\mu_j + \nu < 1$. Следовательно, функции $\tilde{g}^{\pm}$ удовлетворяют оценке

$$\left|\tilde{g}^{\pm}(z)\right| \leq c\prod_{j=1}^{m}\left|z-a_j\right|^{k_j} \qquad \forall z \in D^{\pm},$$

где $k_j := \min\{\mu_j + \beta_j,\ \mu_j + \nu - 1\}$ и постоянная $c$ не зависит от $z$. Поэтому, принимая во внимание неравенство $k_j > \max\{-\beta_j - 1,\ -\nu\}$, которое следует из неравенств $\mu_j > 1 - 2\nu$ и (27), заключаем, что $\tilde{g}^+ \in \mathcal{H}_T$ и функция $\tilde{g}^-$ удовлетворяет оценке вида (21).

Таким образом, выполняются все условия теоремы 3. Теперь для завершения доказательства остается применить теорему 3 к краевой задаче Римана (2) в случае, когда функции $G$ и $g$ заданы равенствами (28), и воспользоваться формулой $\varphi = \Phi^+ - \Phi^-$, выражающей решение характеристического уравнения (23) через решение указанной задачи.

В заключение отметим, что в теореме 6 из [16] описана разрешимость уравнения (23) для более широких классов кривых $\gamma$ и функций $f$, но при дополнительном предположении о том, что его коэффициенты $a$, $b$ непрерывны на $\gamma$ и удовлетворяют условию Дини.


1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. *Бабаев А. А., Салаев В. В.* Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // Мат. заметки. – 1982. – **31**, № 4. – С. 571 – 580.
4. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 239 с.
5. *Данилов Е. А.* Зависимость числа решений однородной задачи Римана от контура и модуля коэффициента // Докл. АН СССР. – 1982. – **264**, № 6. – С. 1305 – 1308.
6. *Сейфуллаев Р. К.* Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой // Мат. сб. – 1980. – **112**, № 2. – С. 147 – 161.
7. *David G.* Operateurs intégraux sur certaines courbes du plan complexe // Ann. sci. Ecole supér. Ser. 4. – 1984. – **14**, № 1. – P. 157 – 189.
8. *Кац Б. А.* Об исключительном случае задачи Римана с осциллирующим коэффициентом // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 12. – С. 41 – 50.
9. *Gonzalez B., Bory J.* The homogeneous Riemann boundary value problem on rectifiable open Jordan curves // Cienc. Mat. Havana. – 1988. – **9**, № 2. – P. 3 – 9.
10. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с осциллирующим коэффициентом и сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 116 – 121.
11. *Kutlu K.* On Riemann boundary value problem // An. Univ. Timişoara: Ser. mat.-inform. – 2000. – **38**, № 1. – P. 89 – 96.
12. *Pena D., Bory J.* Riemann boundary value problem on a regular open curve // J. Natur. Geom. – 2002. – **22**, № 1. – P. 1 – 17.
13. *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 365 – 380.
14. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на спиралеобразном контуре. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1509 – 1517.
15. *Герус О. Ф.* Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Там же. – 1978. – **30**, № 5. – С. 594 – 601.
16. *Плакса С. А.* Полунетеровы операторы в неполных пространствах и сингулярные интегральные уравнения // Допов. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 27 – 34.


Получено 11.03.2005