УДК 517.5

Ю. Н. Субботин (Ин-т математики и механики Урал. отд-ния РАН, Россия),
С. А. Теляковский (Ин-т математики РАН, Москва, Россия)

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. II*

An upper bound is obtained for the least value of the multiplier M for which the Kolmogorov widths $d_n(W^r_C,\, C)$ are equal to relative widths $K_n(W^r_C,\, MW^j_C,\, C)$ of the class of functions W^r_C with respect to the class MW^j_C provided that $j > r$. This estimate takes place also in the case where, instead of C, the space L is considered.

Одержано оцінку зверху для найменшого значення множника M, при якому рівні між собою колмогоровські поперечники $d_n(W^r_C,\, C)$ і відносні поперечники $K_n(W^r_C,\, MW^j_C,\, C)$ класу функцій W^r_C відносно класу MW^j_C при $j > r$. Ця оцінка є правильною і в тому випадку, коли замість C розглядається простір L.

Для центрально-симметричных множеств W и V в банаховом пространстве X относительным поперечником порядка n множества W относительно множества V называют величину

$$K_n(W,\, V,\, X) \ := \ \inf_{L_n} \sup_{f \in W} \inf_{g \in V \cap L_n} \| f - g \|_X ,$$

где L_n — подпространства размерности не выше n пространства X.

Понятие относительного поперечника было введено В. Н. Коноваловым [1]. Здесь в отличие от колмогоровских поперечников $d_n(W,\, X)$ берутся приближения только элементами из L_n, принадлежащими множеству V, а не произвольными элементами из L_n, как в определении $d_n(W,\, X)$. Таким образом,

$$d_n(W,\, X) \ = \ K_n(W,\, X,\, X).$$

Задача об относительных поперечниках вызвала значительный интерес среди специалистов, и к настоящему времени опубликовано много работ, посвященных этой задаче. Без преувеличения можно сказать, что изучение относительных поперечников множеств стало одним из популярных направлений исследований в теории приближений.

В настоящей работе рассматриваются классы MW^r_C, $r = 1, 2, \ldots$, 2π-периодических функций $f(x)$, производная порядка $r-1$ которых удовлетворяет условию Липшица первого порядка

$$\left| f^{(r-1)}(x') - f^{(r-1)}(x'') \right| \ \le \ M \left| x' - x'' \right| \quad \forall\, x',\, x''.$$

При $M = 1$ пишем W^r_C.

Эта работа продолжает работы авторов [2 – 4] о равенстве относительных поперечников класса функций W^r_C колмогоровским поперечникам $d_n(W^r_C,\, C)$.

В [2], как и в [1], рассматривались поперечники K_n класса W^r_C относительно класса W^r_C, т. е. функции из W^r_C приближались функциями, имеющи-

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00320 и 08-01-00598) и программы „Ведущие научные школы" (гранты НШ — 1071.2008.1 и НШ — 3810.2008.1).

ми ограниченные производные того же порядка. В работах [3, 4] предполагалось, что приближающие функции имеют меньшее число производных j при $j < r$.

В данной работе рассматривается случай, когда $j > r$, т. е. когда приближающие функции имеют бóльшую гладкость.

Точная постановка задачи такова. Требуется найти наименьшее значение $M_n(r, j)$ чисел M, при которых относительные поперечники $K_n(W_C^r, MW_C^j, C)$, где $j > r$, равны колмогоровским поперечникам $d_n(W_C^r, C)$.

Оценка величин $M_n(r, j)$ сверху будет получена с помощью приближения функций $f \in W_C^r$ средними Фавара

$$u_n(f, x, \lambda) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_k(r)}{k^r}\cos\left(k(x-t) - \frac{r\pi}{2}\right)df^{(r-1)}(t), \qquad (1)$$

где a_0 — нулевой коэффициент Фурье функции f, $m = [(n+1)/2]$ и при нечетных r

$$\lambda_k(r) := 1 - \sum_{s=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k}{2sm-k}\right)^r - \left(\frac{k}{2sm+k}\right)^r\right],$$

а при четных r

$$\lambda_k(r) := 1 - \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\left[\left(\frac{k}{2sm-k}\right)^r + \left(\frac{k}{2sm+k}\right)^r\right].$$

Известно, что колмогоровские поперечники $d_n(W_C^r, C)$ достигаются при приближении функций класса W_C^r средними Фавара (1). Поэтому величины $M_n(r, j)$ не превышают максимального значения норм производных порядка j полиномов $u_n(f, x, \lambda)$, когда $f \in W_C^r$.

Для производной порядка j полинома $u_n(f, x, \lambda)$ имеет место представление

$$u_n^{(j)}(f, x, \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}k^{j-r}\lambda_k(r)\cos\left(k(x-t) - \frac{r-j}{2}\pi\right)df^{(r-1)}(t).$$

Максимальное значение этой производной на классе W_C^r в метрике C не превышает интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{m-1}k^{j-r}\lambda_k(r)\cos\left(kt - \frac{r-j}{2}\pi\right)\right|dt, \qquad (2)$$

оценив который сверху, получим такое утверждение.

Теорема. *При $j > r$ для величин $M_n(r, j)$ справедлива оценка*

$$M_n(r, j) < cj^2 m^{j-r}, \qquad (3)$$

где c — некоторая абсолютная положительная постоянная и $m = [(n+1)/2]$.

Доказательство. Будем использовать следующие оценки L-норм тригонометрических полиномов: для четных полиномов

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}a_k\cos kt\right|dt \le c\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|a_k|}{m-k}+c\sum_{k=1}^{m-1}k\left|\Delta^2 a_{k-1}\right| \tag{4}$$

и для нечетных

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{m-1}b_k\sin kt\right|dt \le c\sum_{k=1}^{m-1}\frac{|b_k|}{m-k}+c\sum_{k=1}^{m-1}\frac{|b_k|}{k}+c\sum_{k=1}^{m-1}k\left|\Delta^2 b_{k-1}\right|, \tag{5}$$

где числа a_m, b_m и b_0 равны нулю, а c здесь и далее обозначает абсолютные положительные постоянные, в разных случаях различные.

Оценки (4) и (5) являются следствиями более сильных результатов, установленных А. В. Ефимовым [5, 6] (см. также [7], следствие 2).

Применим неравенства (4) и (5) для оценки интеграла (2).

Сначала рассмотрим нечетные r. Введем на отрезке $[0, m]$ функции

$$g_r(u) := u^{j-r}\left\{1-\sum_{s=1}^{\infty}\left[\left(\frac{u}{2sm-u}\right)^r-\left(\frac{u}{2sm+u}\right)^r\right]\right\}.$$

Тогда интеграл (2) можно записать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{m-1}g_r(k)\cos\left(kt-\frac{r-j}{2}\pi\right)\right|dt. \tag{6}$$

Нам нужны оценки интеграла (6) для случаев, когда разность $r-j$ четна и когда эта разность нечетна, т. е. когда полином под знаком интеграла является полиномом по косинусам или по синусам.

Чтобы воспользоваться оценками (4) и (5), найдем представление вторых разностей последовательности $\{g_r(k)\}$.

Согласно формуле конечных приращений для вторых разностей

$$\Delta^2 g_r(k-1) = g_r(k-1)-2g_r(k)+g_r(k+1) = g_r''(k+\theta),$$

где $|\theta|<1$. Вторая производная функции $g_r(u)$ имеет вид

$$\begin{aligned} g_r''(u) &= (j-r)(j-r-1)u^{j-r-2} - \\ &- \sum_{s=1}^{\infty}\left[j(j-1)u^{j-2}\left(\frac{1}{(2sm-u)^r}-\frac{1}{(2sm+u)^r}\right)+\right. \\ &+ 2jru^{j-1}\left(\frac{1}{(2sm-u)^{r+1}}+\frac{1}{(2sm+u)^{r+1}}\right)+ \\ &\left.+ r(r+1)u^j\left(\frac{1}{(2sm-u)^{r+2}}-\frac{1}{(2sm+u)^{r+2}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

При $r\ge 3$ используем оценку

$$\begin{aligned} \left|g_r''(k+\theta)\right| &< (j-r)(j-r-1)(k+1)^{j-r-2} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty}\left[j(j-1)(k+1)^{j-2}\frac{1}{(2sm-k-1)^r}+\right. \end{aligned}$$

$$+\ 4\,jr(k+1)^{j-1}\frac{1}{(2\,sm-k-1)^{r+1}}+r(r+1)\,(k+1)^{j}\,\frac{1}{(2\,sm-k-1)^{r+2}}\Bigg]. \quad (8)$$

Для $s \geq 1$ и $k \leq m-1$ имеем

$$2\,sm-k-1 \;\geq\; (2s-1)\,m\,.$$

Поэтому из (8) следует, что

$$\left|\Delta^2 g_r(k-1)\right| \;<\; (j-r)(j-r-1)\,(k+1)^{j-r-2} \;+$$

$$+\ \sum_{s=1}^{\infty}\Bigg[j(j-1)\,(k+1)^{j-2}\,\frac{1}{(2\,s-1)^r m^r}\;+$$

$$+\ 4\,jr(k+1)^{j-1}\,\frac{1}{(2\,s-1)^{r+1}m^{r+1}}+r(r+1)\,(k+1)^{j}\,\frac{1}{(2\,s-1)^{r+2}m^{r+2}}\Bigg].$$

Поскольку для $i = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{m-1}(k+1)^i \;<\; m^{i+1},$$

при $r \geq 3$

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\left|\Delta^2 g_r(k-1)\right| \;<\; (j-r)(j-r-1)\,m^{j-r} \;+$$

$$+\ \sum_{s=1}^{\infty}\Bigg[j(j-1)\,m^{j}\,\frac{1}{(2\,s-1)^r m^r}+4\,jrm^{j+1}\,\frac{1}{(2\,s-1)^{r+1}m^{r+1}}\;+$$

$$+\ r(r+1)m^{j+2}\,\frac{1}{(2\,s-1)^{r+2}m^{r+2}}\Bigg] \;<\; cj^2\,m^{j-r}.$$

Если же $r = 1$, то разность из (7)

$$\frac{1}{(2\,sm-u)^r}-\frac{1}{(2\,sm+u)^r}$$

представим в виде

$$\frac{1}{2\,sm-u}-\frac{1}{2\,sm+u} \;=\; \frac{2u}{4\,s^2m^2-u^2}$$

и воспользуемся тем, что при $u = k+1$ для полученной дроби справедлива оценка

$$\frac{2(k+1)}{4\,s^2m^2-(k+1)^2} \;\leq\; \frac{2}{(4\,s^2-1)\,m}.$$

Дальнейшие рассуждения не отличаются от проведенных при $r \geq 3$.

Итак, установлено, что при всех нечетных r

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\left|\Delta^2 g_r(k-1)\right| \;\leq\; Cj^2\,m^{j-r}. \quad (9)$$

При оценке суммы (все члены которой положительны, поэтому записываем без знака модуля)

$$\sum_{k=1}^{m-r} \frac{g_r(k)}{m-k}$$

будем следовать рассуждениям, проводившимся в [2].

Представим $g_r(k)$ в виде

$$g_r(k) = k^{j-r} - \sum_{s=1}^{\infty} k^j \left\{ \left[\frac{1}{(2sm-k)^r} - \frac{1}{(2sm-m)^r} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{(2sm+k)^r} - \frac{1}{(2sm+m)^r} \right] + \left[\frac{1}{(2sm-m)^r} - \frac{1}{(2sm+m)^r} \right] \right\}.$$

Отсюда, используя положительность разности в первой квадратной скобке и равенство

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2sm-m)^r} - \frac{1}{(2sm+m)^r} \right] = \frac{1}{m^r},$$

находим

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{g_r(k)}{m-k} < \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{j-r}}{m-k} \left(1 - \frac{k^r}{m^r} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^j}{m-k} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2sm+k)^r} - \frac{1}{(2sm+m)^r} \right]. \tag{10}$$

Начнем с оценки первой суммы в полученном выражении:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{j-r}}{m-k} \left(1 - \frac{k^r}{m^r} \right) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{j-r}}{m-k} \left(1 - \frac{k}{m} \right) \sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{k}{m} \right)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{m^{i+1}} \sum_{k=1}^{m-1} k^{j-r+i} < \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{m^{i+1}} m^{j-r+i+1} = rm^{j-r}. \tag{11}$$

В силу оценки

$$\left| \frac{1}{(2sm+k)^r} - \frac{1}{(2sm+m)^r} \right| < \frac{r(m-k)}{(2sm+k)^{r+1}}, \tag{12}$$

доказываемой с помощью формулы конечных приращений Лагранжа, для второй суммы из правой части (10) имеем

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^j}{m-k} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2sm+k)^r} - \frac{1}{(2sm+m)^r} \right] <$$

$$< \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^j}{m-k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{r(m-k)}{(2sm+k)^{r+1}} < m^{j+1} \frac{r}{m^{r+1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s)^{r+1}} < crm^{j-r}. \tag{13}$$

Осталось еще для случая, когда полином под знаком интеграла в (6) является полиномом по синусам, оценить сумму

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} g_r(k).$$

При $r \geq 3$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} g_r(k) = \sum_{k=1}^{m-1} k^{j-r-1} \left\{ 1 - k^r \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2\,sm-k)^r} - \frac{1}{(2\,sm+k)^r} \right] \right\} <$$

$$< m^{j-r} + \sum_{k=1}^{m-1} k^{j-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,sm+k)^r} <$$

$$< m^{j-r} + \sum_{k=1}^{m-1} k^{j-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,sm)^r} < cm^{j-r}, \tag{14}$$

а при $r = 1$ используем оценку

$$\frac{1}{2\,sm-k} - \frac{1}{2\,sm+k} = \frac{2\,k}{4\,s^2 m^2 - k^2} < \frac{1}{(4\,s^2-1)\,m}.$$

Это неравенство вместе с (9) – (11), (13) и (14) доказывает справедливость оценки (3) для нечетных r.

Рассмотрим теперь четные r. Определим на отрезке $[0, m]$ функции

$$h_r(u) := u^{j-r} \left\{ 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left[\left(\frac{u}{2\,sm-u} \right)^r + \left(\frac{u}{2\,sm+u} \right)^r \right] \right\},$$

с помощью которых интеграл (2) записывается в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m-1} h_r(k) \cos\left(kt - \frac{r-j}{2}\pi \right) \right| dt.$$

Оценка выражений из правых частей неравенств (4) и (5), когда коэффициентами полиномов являются числа $h_r(k)$, проводится по аналогии с соответствующими оценками в случае нечетных r. Имеем

$$\Delta^2 h_r(k-1) = h_r''(k+\theta), \quad |\theta| < 1.$$

Поскольку

$$h_r(u) := u^{j-r} \left\{ 1 - \sum_{p=1}^{\infty} \left[\left(\frac{u}{(4\,p-2)\,m-u} \right)^r + \left(\frac{u}{(4\,p-2)\,m+u} \right)^r - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \left(\frac{u}{4\,pm-u} \right)^r - \left(\frac{u}{4\,pm+u} \right)^r \right] \right\},$$

то

$$h_r''(u) := (j-r)(j-r-1)\,u^{j-r-2} -$$

$$- \sum_{p=1}^{\infty} \left[j(j-1)\,u^{j-2} \left(\frac{1}{((4\,p-2)\,m-u)^r} + \frac{1}{((4\,p-2)\,m+u)^r} - \right. \right.$$

$$- \frac{1}{(4\,pm-u)^r} - \frac{1}{(4\,pm+u)^r}\Bigg) + 2\,jru^{j-1}\Bigg(\frac{1}{((4\,p-2)\,m-u)^{r+1}} -$$

$$- \frac{1}{((4\,p-2)\,m+u)^{r+1}} - \frac{1}{(4\,pm-u)^{r+1}} + \frac{1}{(4\,pm+u)^{r+1}}\Bigg) +$$

$$+ r(r+1)\,u^j\Bigg(\frac{1}{((4\,p-2)\,m-u)^{r+2}} + \frac{1}{((4\,p-2)\,m+u)^{r+2}} -$$

$$- \frac{1}{(4\,pm-u)^{r+2}} - \frac{1}{(4\,pm+u)^{r+2}}\Bigg)\Bigg].$$

Поэтому

$$\left|\Delta^2 h_r(k-1)\right| < (j-r)(j-r-1)(k+1)^{j-r-2} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty}\Bigg[j(j-1)(k+1)^{j-2}\frac{4}{((4\,p-2)\,m-k-1)^r} +$$

$$+ 2\,jr(k+1)^{j-1}\frac{4}{((4\,p-2)\,m-k-1)^{r+1}} +$$

$$+ r(r+1)(k+1)^j\frac{4}{((4\,p-2)\,m-k-1)^r}\Bigg].$$

Мы получили выражение, аналогичное выражению из правой части оценки (8). Повторяя проведенные выше рассуждения, находим

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\left|\Delta^2 h_r(k-1)\right| \le Cj^2 m^{j-r}.$$

Оценим сумму

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{h_r(k)}{m-k}.$$

Имеем

$$h_r(k) = k^{j-r}\Bigg\{1 - k^r\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\Bigg[\left(\frac{1}{(2\,sm-k)^r} - \frac{1}{(2\,sm-m)^r}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{(2\,sm+k)^r} - \frac{1}{(2\,sm+m)^r}\right) + \left(\frac{1}{(2\,sm-m)^r} + \frac{1}{(2\,sm+m)^r}\right)\Bigg]\Bigg\}. \qquad (15)$$

Так как

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\left(\frac{1}{(2\,sm-m)^r} - \frac{1}{(2\,sm+m)^r}\right) = \frac{1}{m^r},$$

используя (12) и аналогичное неравенство

$$\left| \frac{1}{(2\,sm-k)^r} - \frac{1}{(2\,sm-m)^r} \right| < \frac{r(m-k)}{(2\,sm-m)^{r+1}},$$

из (15) получаем

$$h_r(k) = k^{j-r}\left(1-\frac{k^r}{m^r}\right) + O\left(k^j \sum_{s=1}^{\infty} \frac{r(m-k)}{(2\,sm-m)^{r+1}}\right).$$

Значит, согласно оценкам (11) и (13), при доказательстве которых нечетность числа r не использовалась, находим

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_r(k)}{m-k} < crm^{j-r}.$$

Наконец,

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} h_r(k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} k^{j-r-1}\left[1 - k^r \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1}\left(\frac{1}{(2\,sm-k)^r} + \frac{1}{(2\,sm+k)^r}\right)\right] <$$

$$< m^{j-r} + \sum_{k=1}^{m-1} k^{j-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{(2\,sm-k)^r} <$$

$$< m^{j-r} + \frac{2}{m^r} \sum_{k=1}^{m-1} k^{j-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,s-1)^r} < cm^{j-r}.$$

Таким образом, для полиномов с коэффициентами $h_r(k)$ получены такие же оценки сумм из правой части неравенства (5), как и в случае нечетных r. Это завершает доказательство теоремы.

Отметим, что доказательство теоремы не зависит от того, является число j целым или нецелым. Поэтому оценка (3) справедлива и в случае, когда рассматриваются относительные поперечники $K_n(W^r, MW^j_{\alpha, C}, C)$, где $W^j_{\alpha, C}$ — класс функций f, представимых в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^j} \cos\left(k(t-x) - \frac{\alpha}{2}\pi\right) d\varphi(t).$$

Здесь $j > 0$, α — произвольное число и φ — 2π-периодическая функция ограниченной вариации, вариация которой на периоде не превышает 1. При $\alpha = j$ это класс W^j_C.

До сих пор рассматривался вопрос о справедливости равенства

$$K_n(W^r_C, MW^j_C, C) = d_n(W^r_C, C).$$

Но, как и в работах [2, 4], оценка (3) имеет место и для задачи о равенстве

$$K_n(W^r_L, MW^j_L, L) = d_n(W^r_L, L),$$

где W_L^r — класс 2π-периодических функций f, у которых вариация производной $f^{(r-1)}$ на периоде ограничена единицей.

1. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**. – С. 369 – 380.
2. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Там же. – 1999. – **65**. – С. 871 – 879.
3. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Об относительных поперечниках классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН. – 2005. – **248**. – С. 250 – 261.
4. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Уточнение оценок относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Там же. – 2010. – **269**.
5. *Ефимов А. В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 743 – 756.
6. *Ефимов А. В.* Оценка интеграла от модуля многочлена на единичной окружности // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 4. – С. 215 – 218.
7. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Тр. Мат. ин-та АН. – 1971. – **109**. – С. 65 – 97.

Получено 10.12.09