УДК 517.9

А. М. Самойленко, чл.-кор. НАН України (Ін-т математики НАН України, Київ),
І. О. Парасюк, канд. фіз.-мат. наук (Київ. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛА ФУНКЦІЇ ВЗДОВЖ ТРАЄКТОРІЙ НІЛЬПОТЕНТНОГО ПОТОКУ

We establish conditions under which the integral of a function along a nilpotent flow on a Heisenberg – Iwasava manifold increases not faster than $|t|^{1/2+\varepsilon}$, $0<\varepsilon<<1$. We indicate the cases where this integral can be represented as a superposition of a function on a nilmanifold and a nilpotent flow.

Встановлено умови, при виконанні яких інтеграл функції вздовж нільпотентного потоку на многовиді Гейзенберга – Івасави зростає не швидше ніж $|t|^{1/2+\varepsilon}$, $0<\varepsilon<<1$. Вказано також випадки, у яких цей інтеграл можна зобразити у вигляді суперпозиції функції на нільмноговиді і нільпотентного потоку.

Нехай Nil_1^3 — нільпотентний многовид $\mathbb{R}^3/D_1$, де D_1 — група дискретних перетворень простору $\mathbb{R}^3$, утворена відображеннями

$$\Phi_{klm}(u,v,w) = (u+2\pi k, v+2\pi l, w+lu+2\pi m), \quad k,l,m\in\mathbb{Z}.$$

Цей многовид будемо розглядати як фактор групи Лі матриць виду

$$\begin{pmatrix} 1 & u/(2\pi) & w/(2\pi) \\ 0 & 1 & v/(2\pi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (u,v,w)\in\mathbb{R}^3,$$

за правою дією групи матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & k & m \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (k,l,m)\in\mathbb{Z}^3.$$

Однопараметрична підгрупа

$$\exp\left[\frac{t}{2\pi}\begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & \nu_2 \\ 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

задає нільпотентний потік на Nil_1^3 [1].

Цьому потоку відповідає векторне поле, яке в координатах накриття $\mathbb{R}^3_{(u,v,w)}$ має вигляд $(\nu_1, \nu_2, (1/2\pi)\nu_1 v+\nu_3)$. Припустимо, що $\nu_1\neq 0$. Тоді зсувом $v\to$ $\to v-2\pi\nu_3/\nu_1$ та зміною масштабу часу можемо добитись того, щоб $\nu_3=0$, $\nu_2=1$. Відтак покладемо $\nu_1=\nu$. Потік такого векторного поля має вигляд

$$g^t(u,v,w) = (u+\nu t, v+t, w+\nu v t/(2\pi)+\nu t^2/(4\pi)).$$

Розглянемо функцію $f\colon \mathrm{Nil}_1^3 \mapsto \mathbb{R}$ або, що те саме, функцію $f\colon \mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$, яка має властивість

$$f\circ\Phi_{klm} = f. \tag{1}$$

Іншими словами, там, де це не викликає непорозумінь, ми позначимо одним і тим самим символом диференціально-геометричний об'єкт на Nil_1^3 та індукований об'єкт на накритті.

Нас цікавить питання про поведінку функції

$$\int_0^t f \circ g^s ds$$

у припущенні, що

$$\bar{f} := \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u, v, w)\, du\, dv\, dw = 0.$$

Аналогічне питання у випадку многовиду T^3 $\left(:= \mathrm{Nil}_0^3\right)$ є відомою проблемою про первісну квазіперіодичної функції [2 – 6]. У даній роботі ми встановлюємо умови, при виконанні яких досліджуваний інтеграл зростає не швидше ніж $|t|^{1/2+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon << 1$. Ми також вказуємо випадки, у яких цей інтеграл можна зобразити у вигляді суперпозиції функції на Nil_1^3 і потоку $\{g^t\}$.

Одержані результати можуть бути застосовані при вивченні проблеми збурень нільпотентних потоків.

1. Позначимо

$$\check{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f dw; \quad \hat{f} = f - \check{f},$$

$$K^3 = [0, 2\pi]^3 \subset \mathbb{R}^3_{(u,v,w)}, \quad D_u^3 f = \frac{\partial^3}{\partial u^3} f,$$

$$|D_u^3 f|_0 = \max_{K^3} |D_u^3 f|.$$

Теорема 1. *Нехай* $f \in C\left(\mathrm{Nil}_1^3\right)$ *і на накритті* $\mathbb{R}^3_{(u,v,w)}$ *існують неперервні частинні похідні* $D_u \check{f}$, $D_v \check{f}$, $D_u^3 \hat{f}$, $D_w^3 \hat{f}$. *Припустимо, що для деяких досить малих додатних чисел* ε, γ_ε *виконуються нерівності*

$$|q\nu + p| \geq \gamma_\varepsilon |q|^{-(1+\varepsilon)} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Тоді існують абсолютні додатні константи $\check{c}$, $\hat{c}$ *такі, що*

$$\left|\int_0^t \check{f} \circ g^s ds\right| \leq \check{c} |t|^{1/2+\varepsilon} (\gamma_\varepsilon^{-1} + |\ln|t||)(|D_u \check{f}|_0 + |D_v \check{f}|_0),$$

$$\left|\int_0^t \hat{f} \circ g^s ds\right| \leq \hat{c} \gamma_\varepsilon^{-1/2} |t|^{1/2+\varepsilon} (|\ln|t|/\gamma_\varepsilon|)^{1/2} (|D_u^3 \hat{f}|_0 + |D_w^3 \hat{f}|_0).$$

Якщо ж існують неперервні частинні похідні $D_u^2 \check{f}$, $D_v^2 \check{f}$, *то*

$$\left|\int_0^t \check{f} \circ g^s ds\right| \leq (5\gamma_\varepsilon^{-1} + 36)\left(|D_u^2 \check{f}|_0 + \frac{1}{\nu}|D_v^2 \check{f}|_0\right).$$

Доведення. Зобразимо функцію f у вигляді рівномірно збіжного в кубі K^3 ряду

$$f = \sum_{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} f_{k_1,k_2} e^{i(k_1 u + k_2 v)} +$$

$$+ \sum_{0 \leq |r| < \infty} \sum_{q=0}^{r - \mathrm{sign}\, r} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{q+rj,r}(v)\, e^{i[(q+rj)u + rw]}. \tag{2}$$

З властивості (1) випливає

$$f_{q+rj,r}(v) = f_{q,r}(v+2\pi j). \tag{3}$$

Розглянемо функцію

$$g_{q,r}(v) = e^{i[qvv+rvv^2/(4\pi)]} f_{q,r}(v).$$

За означенням другий доданок у (2) — це $\hat{f}$. Поклавши

$$e_{q,r}(v) = e^{i[qvv+rvv^2/(4\pi)]},$$

одержимо

$$\hat{f} = \sum_{0<|r|<\infty} \sum_{q=0}^{r-\operatorname{sign} r} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{q,r}(v+2\pi j) e_{q,r}(v+2\pi j) \mathrm{e}^{i[(q+rj)u+rw]}. \tag{4}$$

Легко перевірити, що функція $e_{q,r} e^{i[(q+rj)u+rw]}$ інваріантна відносно потоку $\{g^t\}$. Тому

$$\hat{f} \circ g^t = \sum_{0<|r|<\infty} \sum_{q=0}^{r-\operatorname{sign} r} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{q,r}(v+t+2\pi j) e_{q,r}(v+2\pi j) e^{i[(q+rj)u+rw]}. \tag{5}$$

Наш результат полягає в оцінці інтеграла саме цієї функції. Основна трудність виникає при оцінюванні суми

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t g_{q,r}(v+s-2\pi j)\, ds\, e_{q,r}(v-2\pi j) e^{i[(q-rj)u+rw]}, \tag{6}$$

оскільки при фіксованому великому t інтеграли $\int_0^t g_{q,r}(v+s-2\pi j)\, ds$ a priori починають регулярно прямувати до нуля з ростом j лише для $j > t + \sqrt{t}$. Нетривіальні оцінки для (6) ми одержуємо, використовуючи результати з теорії тригонометричних сум Вейля [7 – 9].

З нерівностей для коефіцієнтів Фур'є одержуємо оцінки

$$|g_{q,r}(v+2\pi j)| \le |h_{q+rj,r}(v)| \le$$

$$\le \begin{cases} |r|^{-3} \left| D_w^3 \hat{f} \right|_0, & j = -1, 0; \\ |rj+q|^{-3} \left| D_u^3 \hat{f} \right|_0, & j \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0\},\ 0 \le v \le 2\pi. \end{cases}$$

Встановимо ще кілька допоміжних оцінок. Нехай $t > 0$ і $j \ge 1$. Тоді

$$\int_0^{2\pi t} |g_{q,r}(v+s+2\pi j)|\, ds \le \int_0^{2\pi(t+1)} |g_{q,r}(s+2\pi j)|\, ds \le$$

$$\le \int_{2\pi j}^{\infty} |g_{q,r}(s)|\, ds \le \sum_{l=j}^{\infty} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} |g_{q,r}(s)|\, ds \le \sum_{l=j}^{\infty} \int_0^{2\pi} |g_{q,r}(s+2\pi l)|\, ds \le$$

$$\le 2\pi \sum_{l=j}^{\infty} |rl+q|^{-3} \left| D_u^3 \hat{f} \right|_0 \le 2\pi |r|^{-3} \left| D_u^3 \hat{f} \right|_0 \sum_{l=j}^{\infty} l^{-3} \le$$

$$\le 2\pi |r|^{-3} \left| D_u^3 \hat{f} \right|_0 \left(\frac{1}{j^3} + \int_j^{\infty} x^{-3} dx \right) \le 3\pi |r|^{-3} j^{-2} \left| D_u^3 \hat{f} \right|_0. \tag{7}$$

Якщо $j = 0$ або $j = -1$, то відповідний інтеграл оцінюватиметься величиною

$$\pi|r|^{-3}(3|D_w^3\hat f|_0+|j-1||D_w^3\hat f|_0). \tag{8}$$

Тепер маємо оцінку

$$\sum_{j=-1}^{\infty}\int_0^{2\pi t}|g_{q,r}(v+s+2\pi j)|ds \le$$

$$\le 2\pi|r|^{-3}\left(\left[6+3\left(1+\int_1^{\infty}x^{-2}dx\right)\right]|D_u^3\hat f|_0+3|D_w^3\hat f|_0\right) \le$$

$$\le \pi|r|^{-3}(24|D_u^3\hat f|_0+6|D_w^3\hat f|_0). \tag{9}$$

Для $j\ge 1$ одержуємо

$$\int_{-\infty}^{-2\pi j}|g_{q,r}(s)|ds \le \sum_{l=j}^{\infty}\int_{-2\pi(l+1)}^{-2\pi l}|g_{q,r}(s)|ds \le$$

$$\le \sum_{l=j}^{\infty}\int_0^{2\pi}|g_{q,r}(s-2\pi(l+1))|ds \le 2\pi|r|^{-3}\sum_{l=j}^{\infty}|l|^{-3}|D_u^3\hat f|_0 \le$$

$$\le 3\pi|r|^{-3}|j|^{-2}|D_u^3\hat f|_0. \tag{10}$$

Перейдемо до оцінки суми (6), у якій для зручності замінимо t на $2\pi t$. Розіб'ємо цю суму на 4 частини так, як показано нижче, і оцінимо кожну з них. Нехай $[a]$ означає цілу частину числа a. Перша частина, Σ_1, є сумою, у якій індекс $j\in[1,[\sqrt t]]$. Використовуючи вже знайдені оцінки, знаходимо

$$|\Sigma_1| \le \sum_{j=1}^{[\sqrt t]}\int_0^{2\pi(t+1)}|g_{q,r}(s-2\pi j)|ds \le [\sqrt t]\int_{-\infty}^{\infty}|g_{q,r}(s)|ds \le$$

$$\le \pi[\sqrt t]|r|^{-3}(6|D_u^3\hat f|_0+2|D_w^3\hat f|_0). \tag{11}$$

В другій сумі індекс $j\in[[\sqrt t]+1,[t]-[\sqrt t]-1]$. Зобразимо її у вигляді

$$\Sigma_2 = \sum_{j=[\sqrt t]+1}^{[t]-[\sqrt t]-1}e^{2\pi iP(j)}\int_{v-2\pi j}^{2\pi(t-j)+v}|g_{q,r}(s)|ds,$$

де

$$P(j)=P(j,r,q,u,v,w) := \frac{1}{2\pi}\left[(q+rj)u+rw-q\nu(v+2\pi j)-r\frac{\nu}{4\pi}(v+2\pi j)^2\right] :=$$

$$:= r\frac{\nu}{2}j^2+a(q,r,u,v,w)j+b(q,r,u,v,w). \tag{12}$$

З попередніх оцінок випливає

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}g_{q,r}(s)ds-\int_{v-2\pi j}^{2\pi(t-j)+v}g_{q,r}(s)ds\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{-2\pi(j-1)}|g_{q,r}(s)|ds+\int_{2\pi(t-j)}^{\infty}|g_{q,r}(s)|ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{-2\pi[\sqrt{t}\,]} |g_{q,r}(s)|\,ds + \int_{2\pi[\sqrt{t}\,]}^{\infty} |g_{q,r}(s)|\,ds \le 6\pi |r|^{-3} [\sqrt{t}\,]^{-2} |D_u^3 \hat{f}|_0.$$

Таким чином,

$$|\Sigma_2| \le \sum_{j=[\sqrt{t}\,]+1}^{[t]-[\sqrt{t}\,]-1} e^{2\pi i P(j)} \int_{-\infty}^{\infty} |g_{q,r}(s)|\,ds + 6\pi \frac{[t]-2[\sqrt{t}\,]-2}{[\sqrt{t}\,]^2} |r|^{-3} |D_u^3 \hat{f}|_0, \quad (13)$$

і ми приходимо до відомої проблеми оцінки суми Вейля. Цю оцінку буде наведено нижче.

В третій сумі індекс j пробігає значення в межах від $[t]-[\sqrt{t}\,]$ до $[t]+$ $+[\sqrt{t}\,]$. Для неї маємо

$$|\Sigma_3| \le \sum_{j=[t]-[\sqrt{t}\,]}^{[t]+[\sqrt{t}\,]} \int_{v-2\pi j}^{2\pi(t-j)} |g_{q,r}(s)|\,ds \le$$

$$\le 2\sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} |g_{q,r}(v)|\,dv \le \pi\sqrt{t}\,(12|D_u^3 \hat{f}|_0 + 4|D_w^3 \hat{f}|_0).$$

Нарешті оцінимо четверту суму:

$$|\Sigma_4| \le \sum_{j=[t]+[\sqrt{t}\,]+1}^{\infty} \int_0^{2\pi t} |g_{q,r}(v+s-2\pi j)|\,ds \le$$

$$\le \sum_{j=[t]+[\sqrt{t}\,]+1}^{\infty} \int_0^{2\pi([t]+2)} |g_{q,r}(s-2\pi j)|\,ds \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{[t]+1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |g_{q,r}(s-2\pi j)|\,ds \le$$

$$\le \sum_{j=[\sqrt{t}\,]+[t]+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{[t]+1} \int_0^{2\pi} |g_{q,r}(s-2\pi(j-k))|\,ds \le$$

$$\le 2\pi \sum_{j=[\sqrt{t}\,]+[t]+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{[t]+1} |r(j-k)-q|^{-3} |D_u^3 \hat{f}|_0 \le$$

$$\le 2\pi([t]+1) \sum_{j=[\sqrt{t}\,]}^{\infty} |rj-q|^{-3} |D_u^3 \hat{f}|_0 \le 6\pi |r|^{-3} |D_u^3 \hat{f}|_0.$$

Тепер наведемо оцінку для тригонометричної суми $\Sigma(N) = \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i P(j)}$, де $P(j)$ визначено у (12). Відомо [7, 9], що

$$|\Sigma(N)|^2 < 2N + 2\sum_{n=1}^{2N} \min(N, 1/\operatorname{dist}(rn\nu, \mathbb{Z})),$$

де $\operatorname{dist}(x, y) := |x-y|$. Але

$$\sum_{n=1}^{2N} \min(N, 1/\operatorname{dist}(rn\nu, \mathbb{Z})) \le N \sum_{n\in\mathcal{A}} 1 + \sum_{n=1}^{2N|r|} 1/\operatorname{dist}(n\nu, \mathbb{Z}),$$

де

$$\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{Z} : 1 \le n \le 2N, \operatorname{dist}(n\nu, \mathbb{Z}) < 1/N\}. \quad (14)$$

Врахуємо, що

$$|q\nu - p| \geq \gamma_\varepsilon / |q|^{1+\varepsilon}, \quad q, p \in \mathbb{Z}, q \neq 0, 0 < \gamma_\varepsilon < 1.$$

Якщо $n_1, n_2 \in \mathcal{A}$ то знайдуться $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$, для яких матимемо

$$\gamma_\varepsilon \frac{1}{|r(n_1 - n_2)|^{1+\varepsilon}} \leq |r(n_1 - n_2)\nu - p_1 + p_2| \leq |rn_1 - p_1| + |rn_2 - p_2| < 2/N,$$

звідки

$$|n_1 - n_2| \geq (\gamma_\varepsilon N/2)^{1/(1+\varepsilon)} / |r|.$$

Тому множина $\mathcal{A}$ містить не більше ніж

$$N_1 \leq 1 + |r|(2N-1)(\gamma_\varepsilon N/2)^{-1/(1+\varepsilon)} \leq 1 + 4|r|N^\varepsilon / \gamma_\varepsilon$$

елементів. В [8] показано, що

$$\sum_{n=1}^{2N|r|} 1/\operatorname{dist}(n\nu, \mathbb{Z}) \leq \frac{40|r|}{\gamma_\varepsilon} N^{1+\varepsilon} \ln(N^{1+\varepsilon}/\gamma_\varepsilon), \quad N|r| \geq 5.$$

Отже, вважаючи $0 < \gamma_\varepsilon << 1$, маємо оцінку

$$|\Sigma(N)| < \sqrt{4N + 8|r|N^{1+\varepsilon}/\gamma_\varepsilon + 80|r|\frac{1+\varepsilon|}{\gamma_\varepsilon} N^{1+\varepsilon} \ln(N/\gamma_\varepsilon)} \leq$$

$$\leq \frac{10}{\sqrt{\gamma_\varepsilon}} \sqrt{|r|} N^{1/2+\varepsilon} \ln^{1/2}(N/\gamma_\varepsilon).$$

Повертаючись до (13), знаходимо

$$|\Sigma_2| \leq \frac{20\pi}{\sqrt{\gamma_\varepsilon}} \sqrt{|r|} t^{1/2+\varepsilon} \ln^{1/2}(t/\gamma_\varepsilon) |r^{-3}| (6|D_u^3 \hat{f}|_0 + 2|D_w^3 \hat{f}|_0) +$$

$$+ 6\pi\sqrt{t}|r|^{-3}|D_u^3 \hat{f}|_0 \leq |r|^{-5/2} \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_\varepsilon}} t^{1/2+\varepsilon} \ln^{1/2}(t/\gamma_\varepsilon)(121|D_u^3 \hat{f}|_0 + 3|D_w^3 \hat{f}|_0).$$

З викладеного вище випливає

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi t} |g_{q,r}(\upsilon + s + 2\pi j)| ds \leq$$

$$\leq |r|^{-5/2} \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_\varepsilon}} t^{1/2+\varepsilon} \ln(t/\gamma_\varepsilon)(125|D_u^3 \hat{f}|_0 + 5|D_w^3 \hat{f}|_0).$$

Тепер одержуємо остаточну оцінку

$$\left| \int_0^t \hat{f} \circ g^s \, ds \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varepsilon}} t^{1/2+\varepsilon} \ln^{1/2}(t/\gamma_\varepsilon)(940|D_u^3 \hat{f}|_0 + 40|D_w^3 \hat{f}|_0).$$

Перейдемо до оцінки первісної функції $\check{f} \circ g^t$. Зобразимо її у вигляді

$$\int_0^t \check{f} \circ g^t \, ds = \sum_{|k_1| \leq [\sqrt{t}]} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} f_{k_1,k_2} [i(k_1\nu + k_2)]^{-1} (e^{i(k_1\nu + k_2)t} - 1)t +$$

$$+ \int_0^t \sum_{|k_1| > [\sqrt{t}]} e^{ik_1\nu s} f_{k_1}(s) \, ds. \tag{15}$$

Оскільки [10, с. 208, 11, с. 66, 112]

$$\left|\sum_{|k_1|>[\sqrt{t}\,]} e^{ik_1 u} f_{k_1}(v)\right| \le t^{-1/2}\left(2\pi + \frac{1}{\pi}\ln t\right)|D_u \check{f}(u,v)|_0 \,,$$

то

$$\left|\int_0^t \sum_{|k_1|>[\sqrt{t}\,]} e^{ik_1 \nu s} f_{k_1}(s)\,ds\right| \le 2t^{1/2}\left(2\pi + \frac{1}{\pi}\ln t\right)|D_u \check{f}(u,v)|_0 \,. \tag{16}$$

При оцінюванні ряду з малими знаменниками у (15) скористаємось тим, що: 1) для кожного $k_1 \ne 0$ існує не більше одного $k_2 = k_2(k_1)$, для якого $\gamma_\varepsilon / |k_1|^{1+\varepsilon} < |k_1\nu + k_2| < 1/2$; 2) $|f_{k_1,k_2}|$ при $k_1 \ne 0$ не перевищує модуля відповідного коефіцієнта Фур'є функції $D_u \check{f}$, поділеного на $|k_1|$, а при $k_2 \ne 0$ — модуля відповідного коефіцієнта Фур'є функції $D_v \check{f}$, поділеного на $|k_2|$; 3) середньоквадратична норма неперервної функції не перевищує її рівномірної норми. Звідси випливає, що модуль повторної суми у (15) не перевищує

$$2\sum_{|k_1|\le[\sqrt{t}\,]} \gamma_\varepsilon^{-1}|k_1|^{1+\varepsilon}|f_{k_1,k_2(k_1)}| + 4\sum_{|k_1|\le[\sqrt{t}\,]}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}|f_{k_1,k_2}| \le$$

$$\le 2t^{\varepsilon}\gamma_\varepsilon^{-1}\sum_{|k_1|\le[\sqrt{t}\,]}|k_1|\,|f_{k_1,k_2(k_1)}| + 4\sum_{|k_1|\le[\sqrt{t}\,]}\sum_{|k_2|>0}|f_{k_1,k_2}| +$$

$$+ 4\sum_{0\le|k_1|<[\sqrt{t}\,]}|f_{k_1,0}| \le 4t^{1/2+\varepsilon}\gamma_\varepsilon^{-1}|D_u\check{f}|_0 + 8t^{1/2}|D_u\check{f}|_0 +$$

$$+8t^{1/2}\left(2\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}\right)^{1/2}|D_v\check{f}|_0 \le t^{1/2+\varepsilon}(4\gamma_\varepsilon^{-1}+8)|D_u\check{f}|_0 + 8t^{1/2}\frac{\pi}{\sqrt{3}}|D_v\check{f}|_0 . \tag{17}$$

З (16), (17) остаточно одержуємо оцінку

$$\left|\int_0^t \check{f}\circ g^s\,ds\right| \le t^{1/2+\varepsilon}\left(\left(4\gamma_\varepsilon^{-1} + 15 + \frac{1}{3}\ln t\right)|D_u\check{f}|_0 + 16|D_v\check{f}(u,v)|_0\right).$$

Тепер розглянемо випадок, коли існують неперервні похідні $D_u^2\check{f}$ і $D_v^2\check{f}$. За цих умов маємо

$$\left|\int_0^t \check{f}\circ g^s\,ds\right| \le 2\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}|f_{k_1,k_2}|\,|k_1\nu + k_2|^{-1}.$$

Ряд у лівій частині подамо у вигляді

$$\sum_{j=\pm1}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{k_1=-r}^{r}|f_{k_1,jr}|\,|k_1\nu + jr|^{-1} + \sum_{k_2=-r}^{r}|f_{jr,k_2}|\,|k_2 + j\nu r|^{-1}\right). \tag{18}$$

Зауважимо, що для кожного k_2 існує не більше одного $k_1 = k_1(k_2)$ такого, що $\gamma_\varepsilon/|k_1|^{1+\varepsilon} < |k_1\nu + k_2| < \nu/2$. Тому з урахуванням попередніх зауважень щодо оцінювання суми з малими знаменниками ряд (18) мажоруємо рядом

$$\sum_{j=\pm1}\sum_{r=1}^{\infty}\gamma_\varepsilon^{-1}|r|^{1+\varepsilon}(|f_{k_1(jr),jr}| + |f_{jr,k_2(jr)}|) +$$

$$+\sum_{j=\pm 1}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{k_1=-r}^{r}\frac{2}{\nu}|f_{k_1,jr}|+2\sum_{k_2=-r}^{r}|f_{jr,k_2}|\right)\le$$

$$\le \gamma^{-1}\sqrt{2\sum_{r=1}^{\infty}|r|^{-3/2}}\left(\left|D_v^2\check{f}\right|_0+\left|D_u^2\check{f}\right|_0\right)+4\sqrt{2}\sum_{r=1}^{\infty}r^{-3/2}\left(\frac{1}{\nu}\left|D_v^2\check{f}\right|_0+\left|D_u^2\check{f}\right|_0\right)\le$$

$$\le\left(\sqrt{6}\gamma^{-1}+12\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{\nu}\left|D_v^2\check{f}\right|_0+\left|D_u^2\check{f}\right|_0\right).$$

Звідси й маємо потрібну оцінку.

2. Природно поставити питання: за яких умов існує функція $F\in C\left(\mathrm{Nil}_1^3\right)$, для якої

$$\int_0^t f\circ g^s\,ds = F\circ g^t.$$

Це питання тісно пов'язане з проблемою існування розв'язку гомологічного рівняння

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}F(g^t) := L_\nu F = f. \tag{19}$$

Ми будемо надалі розглядати випадок, коли $f=\hat{f}$, оскільки для $f=\check{f}$ зазначена проблема добре вивчена [3, 12 – 14].

Твердження 1. *Якщо функція* $\check{f}$ *класу* $C\left(\mathrm{Nil}_1^3\right)$ *породжена сумою рівномірно збіжного ряду* (4), *то для існування розв'язку рівняння*

$$L_\nu F = \check{f}, \tag{20}$$

який на накритті $\mathbb{R}^3$ *є сумою рівномірно збіжного ряду*

$$\sum_{0<|r|}\sum_{q=0}^{r-\operatorname{sign} r}\sum_{j=-\infty}^{\infty}G_{q,r}(v+2\pi j)e_{q,r}(v+2\pi j)e^{i[(q+rj)u+rw]}, \tag{21}$$

необхідно, щоб

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_{q,r}(s)\,ds = 0,\quad r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\quad q=0,1,\ldots,r-\operatorname{sign} r. \tag{22}$$

Доведення. Оскільки $L_\nu F\in C\left(\mathrm{Nil}_1^3\right)$, то $G_{q,r}$ — неперервно диференційовні, і з того, що коефіцієнти Фур'є у $L_\nu F$ та $\check{f}$ як функцій змінних u і v однакові, випливають рівності

$$\frac{dG_{q,r}}{dv} = g_{q,r} \Rightarrow G_{q,r}(v) = \int_{\omega_{q,r}}^{v}g_{q,r}(s)\,ds$$

з деякими сталими $\omega_{q,r}$. Оскільки $G_{q,r}(v+2\pi j)\to 0$, $j\to\pm\infty$, то з необхідністю виконується (22).

Наслідок. *Функції* $G_{q,r}(v)$ *можна зобразити у вигляді*

$$G_{q,r}(v) = \int_{-\infty}^{v}g_{q,r}(s)\,ds = \int_{\infty}^{v}g_{q,r}(s)\,ds. \tag{23}$$

Теорема 2. *Нехай* $\hat f,\ D_u^3\hat f,\ D_w^3\hat f\in C\left(\mathrm{Nil}_1^3\right)$ *і виконуються умови* (22). *Тоді рівняння* (20) *має розв'язок* F, *для якого* $L_\nu F\in C\left(\mathrm{Nil}_1^3\right)$, *причому*

$$|F|\le\pi\left(36\left|D_u^3\hat f\right|_0+6\left|D_w^3\hat f\right|_0\right).$$

Доведення. Визначимо $G_{q,r}(v)$ згідно з (23). З урахуванням оцінок (7), (8), (10) в кубі K^3 ряд (21) мажорується збіжним рядом

$$\sum_{|r|>0}\sum_{q=0}^{r-\operatorname{sign}r}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\infty}^{v+2\pi j}|g_{q,r}(s)|ds+\sum_{j=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{v-2\pi j}|g_{q,r}(s)|ds\right)\le$$

$$\le\sum_{|r|>0}\sum_{q=0}^{r-\operatorname{sign}r}\pi|r|^{-3}\left(6\left|D_u^3f\right|_0+3\left|D_w^3f\right|_0+6\sum_{j=1}^{\infty}|j|^{-2}\left|D_w^3f\right|_0\right)\le$$

$$\le\pi\left(36\left|D_u^3\hat f\right|_0+6\left|D_w^3\hat f\right|_0\right).$$

Знайдемо оцінки для розв'язку рівняння (20) у випадку, коли функція $\hat f$ допускає аналітичне продовження в область, що містить множину

$$\mathcal{F}(\rho,\sigma)=\{(u,v,w)\in\mathbb{C}^3:|\operatorname{Im}u|\le\rho,$$

$$|\operatorname{Im}w|\le\rho,|\operatorname{Im}v|\le\sigma,-\sigma\le\operatorname{Re}v\le2\pi+\sigma\}.$$

Клас таких функцій ми позначимо через $\mathcal{A}(\rho,\sigma)$. Будемо також позначати

$$|f(u,v,w)|_{\rho,\sigma}=\sup_{\mathcal{F}(\rho,\sigma)}|f(u,v,w)|;\quad |g(v)|_\sigma=\sup_{\mathcal{F}(\rho,\sigma)}|g(v)|.$$

Лема 1. *Якщо* $\hat f\in\mathcal{A}(\rho,\sigma)$, $2\nu\sigma<\rho$, $0\le\sigma\le2\pi$, *то*

$$|g_{q,r}(v+2\pi j)|_\sigma\le e^{-(|q+rj|+|r|)(\rho-2\nu\sigma)}|\hat f|_{\rho,\sigma}.$$

Навпаки, якщо

$$|g_{q,r}(v+2\pi j)|_\sigma\le e^{-(|q+rj|+|r|)\rho}M,\tag{24}$$

то для будь-яких $\sigma_1\in[0,\sigma]$, $\delta\in[0,1]$, *що задовольняють нерівність* $\rho-2\nu\sigma_1-\delta>0$, *сума* (4) *являє собою функцію класу* $\mathcal{A}(\rho-2\nu\sigma_1-\delta,\sigma_1)$, *причому* $|\hat f|_{\rho-2\nu\sigma_1-\delta,\sigma_1}\le8eM\delta^{-2}$.

Доведення. Перша частина твердження випливає з відомої оцінки для коефіцієнтів Фур'є [13, 14]

$$|f_{q+rj,r}(v)|_\sigma\le e^{-(|q+rj|+|r|)\rho}|\hat f|_{\rho,\sigma}$$

і рівності

$$|f_{q+rj,r}(v)|_\sigma=e^{\nu(q+rj)\operatorname{Im}v+r\nu\operatorname{Re}v\operatorname{Im}v/(2\pi)}|g_{q,r}(v+2\pi j)|.$$

Дійсно,

$$|g_{q,r}(v+2\pi j)|\le e^{-|q+rj|(\rho-\nu|\operatorname{Im}v|)-|r|(\rho-\nu/(2\pi)(\rho-\nu(1+\sigma/(2\pi)))|\operatorname{Im}v|)}|\hat f|_{\rho,\sigma}.$$

Навпаки, з (24) випливає

$$|f_{q+rj,r}(v)|_{\sigma_1}\le e^{-|q+rj|(\rho-\nu\sigma_1)-|r|(\rho-2\nu\sigma_1)}M.$$

Тоді

$$\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{q+rj,r}(v)e^{i(q+rj)u}\right|_{\rho-\nu\sigma_1-\delta,\sigma_1} \le 2Me^{-|r|(\rho-2\nu\sigma_1)}\left(\frac{1}{|r|\delta}+1\right)$$

і

$$|\hat{f}|_{\rho-2\nu\sigma_1-\delta,\sigma_1} \le 4M\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\delta}(1/\delta+r) \le 8eM\delta^{-2}.$$

Лема 2. *Якщо виконуються нерівності* (24), *то для* $j \ge 0$ *виконуються нерівності*

$$\int_{2\pi j}^{\infty} |g_{q,r}(s)|\,ds \le 2\pi Me^{-(|r|+|r|j+|q|)\rho}\left(\frac{1}{|r|\rho}+1\right),$$

$$\int_{-\infty}^{-2\pi j} |g_{q,r}(s)|\,ds \le 2\pi Me^{-(|r|+|r|j+|r-q|)\rho}\left(\frac{1}{|r|\rho}+1\right).$$

Доведення. Аналогічно (7), (10) для $j \ge 0$ маємо

$$\int_{2\pi j}^{\infty} |g_{q,r}(s)|\,ds \le \sum_{l=j}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} |g_{q,r}(s+2\pi l)|\,ds \le 2\pi M\sum_{l=j}^{\infty} e^{-(|q+rl|+|r|)\rho} \le$$

$$\le 2\pi Me^{-(|r|+|r|j+|q|)\rho}\left(\frac{1}{|r|\rho}+1\right)$$

і

$$\int_{-\infty}^{-2\pi j} |g_{q,r}(s)|\,ds \le \sum_{l=j}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} |g_{q,r}(s-2\pi(l+1))|\,ds \le 2\pi M\sum_{l=j}^{\infty} e^{-(|r(l+1)-q|+|r|)\rho} \le$$

$$\le 2\pi Me^{-(|r|+|r-q|)\rho}\sum_{l=j}^{\infty} e^{-\rho|r|l} \le 2\pi Me^{-(|r|+|r|j+|r-q|)\rho}\left(\frac{1}{|r|\rho}+1\right).$$

Теорема 3. *Нехай* $\hat{f} \in \mathcal{A}(\rho,\sigma)$, $\sigma \in (0, 2\pi]$ *і числа* $\sigma_1 \in [0,\sigma]$, $\delta \in [0, 1]$ *задовольняють нерівність* $\rho - 2\nu\sigma_1 - \delta > 0$. *Тоді рівняння* (20) *має розв'язок* $F \in \mathcal{A}(\rho - 2\nu\sigma_1 - \delta, \sigma_1)$ *і для деякої абсолютної константи* $c > 0$ *виконується нерівність*

$$|F|_{\rho-2\nu\sigma_1-\delta,\sigma_1} \le c(\delta^{-2} + (\delta\rho)^{-1}|\ln\delta|)|\hat{f}|_{\rho,\sigma}.$$

Доведення. Згідно з лемами 1 та 2 маємо оцінки

$$|G_{q,r}(v+2\pi j)|_{\sigma_1} = \left|\int_{\infty}^{v} g_{q,r}(s+2\pi j)\,ds\right|_{\sigma_1} \le$$

$$\le \left|\int_{\infty}^{\mathrm{Re}\,v} g_{q,r}(s+2\pi j)\,ds\right|_{\sigma_1} + \left|\int_{\mathrm{Re}\,v}^{v} g_{q,r}(s+2\pi j)\,ds\right|_{\sigma_1} \le$$

$$\le \left|\int_{\infty}^{\mathrm{Re}\,v+2\pi j} g_{q,r}(s)\,ds\right|_{\sigma_1} + \left|\int_{\mathrm{Re}\,v}^{v} g_{q,r}(s+2\pi j)\,ds\right|_{\sigma_1} \le$$

$$\leq \int_{2\pi j}^{\infty} |g_{q,r}(s)|ds + \sigma_1 |g_{q,r}(\upsilon + 2\pi j)|_{\sigma_1} \leq$$

$$\leq 2\pi |\hat{f}|_{\rho,\sigma} e^{-(|r|+|r|j+|q|)(\rho - 2\nu\sigma_1)} \left(\frac{1}{|r|\rho} + 2 \right)$$

для $j \geq 0$, і аналогічно

$$|G_{q,r}(\upsilon - 2\pi j)|_{\sigma_1} = \int_{-\infty}^{2\pi(j-1)} |g_{q,r}(s)|ds + \sigma_1 |g_{q,r}(\upsilon - 2\pi j)|_{\sigma_1} \leq$$

$$\leq 2\pi |\hat{f}|_{\rho,\sigma} e^{-(|r|j+|r-q|)(\rho - 2\nu\sigma_1)} \left(\frac{1}{|r|\rho} + 2 \right) \leq$$

$$\leq 2\pi |\hat{f}|_{\rho,\sigma} e^{-(|r|+|-rj+q|)(\rho - 2\nu\sigma_1)} \left(\frac{1}{|r|\rho} + 2 \right)$$

для $j \geq 1$. Звідси

$$|F|_{\rho - 2\nu\sigma_1 - \delta, \sigma_1} \leq 2\pi |\hat{f}|_{\rho,\sigma} \sum_{|r|>0} \left(\frac{1}{|r|\rho} + 2 \right) e^{-|r|\delta} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{r - \operatorname{sign} r} \left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-|rj+q|\delta} + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-|rj-q|\delta} \right) \leq 8\pi |\hat{f}|_{\rho,\sigma} \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{\infty} \left((1/\rho + 2r) e^{-|r|\delta} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-|r|\delta j} \right) \leq 8\pi |\hat{f}|_{\rho,\sigma} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho} + 2r \right) \left(\frac{1}{r\delta} + 1 \right) e^{-|r|\delta} \leq$$

$$\leq \pi \left(\frac{120}{\delta^2} + 8 \frac{|\ln \delta|}{\delta\rho} \right) |\hat{f}|_{\rho,\sigma}.$$

1. *Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф.* Потоки на однородных пространствах. – М.: Мир, 1966. – 208 с.
2. *Кадец М. И.* Об интегрировании почти-периодической функции со значениями в пространстве Банаха // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3,** вып. 3. – С. 71–74.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. *Козлов В. В.* Об интегралах квазипериодических функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. А. Мат.-мех. – 1978. – № 1. – С. 31–40.
5. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 232 с.
6. *Мощевитин Н. Г.* К вопросу о поведении интеграла условно периодической функции // Мат. заметки. – 1991. – **50,** № 3. – С. 97–106.
7. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Избр. тр. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – С. 237–331.
8. *Ленг С.* Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Мир, 1970. – 104 с.
9. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
11. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
12. *Rüssmann H.* Notes on sums containing small divisors // Communs Pure and Appl. Math. – 1976. – **24,** №6. – P. 755–758.
13. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. – 1963. – **18,** вып. 5. – С. 13 – 40.
14. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.

Одержано 21.12.94