УДК 517.941

Г. В. Радзиевский, д-р. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИКА ПО ПАРАМЕТРУ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ*

We study a functional-differential equation $[\mathfrak{L}(\rho)x](t) := x^{(n)}(t) + (Fx)(t) + \rho^n x(t) = 0,\ 0 \le t \le 1$; here, F is a linear operator from the Hölder space $H^\gamma[0, 1]$ into the Sobolev space $W_p^s[0, 1]$ and ρ is a complex parameter. For large values of ρ, we construct a one-to-one correspondence between solutions $x(\rho; t)$ and $y(\rho; t)$ of the equations $\mathfrak{L}(\rho)x = 0$ and $y^{(n)} + \rho^n y = 0$. We also obtain conditions on the operator F under which, for a specially selected fundamental systems of solutions $x_j(\rho; t)$ and $y_j(\rho; t)$, $j = 1, \ldots, n$, of these equations, the estimate $\|x_j(\rho; \cdot) - y_j(\rho; \cdot)\|_{\mathfrak{B}} \le c|\rho|^{-\kappa}\|y_j(\rho; \cdot)\|_{\mathfrak{B}}$ holds, in which the constants $c, \kappa > 0$ and the functional space $\mathfrak{B} = W_q^l[0, 1]$ or $\mathfrak{B} = H^\mu[0, 1]$.

Розглянуто функціонально-диференціальне рівняння $[\mathfrak{L}(\rho)x](t) := x^{(n)}(t) + (Fx)(t) + \rho^n x(t) = 0,\ 0 \le t \le 1$, де лінійний оператор F діє з простору Гельдера $H^\gamma[0, 1]$ у простір Соболєва $W_p^s[0, 1]$, а ρ — комплексний параметр. При великих за модулем значеннях ρ побудована взаємно однозначна відповідність між розв'язками $x(\rho; t)$ та $y(\rho; t)$ рівнянь $\mathfrak{L}(\rho)x = 0$ та $y^{(n)} + \rho^n y = 0$. Знайдено умови, яким повинен задовольняти оператор F, щоб для спеціально вибраних фундаментальних систем розв'язків $x_j(\rho; t)$ та $y_j(\rho; t)$, $j = 1, \ldots, n$, цих рівнянь виконувалась оцінка $\|x_j(\rho; \cdot) - y_j(\rho; \cdot)\|_{\mathfrak{B}} \le c_\zeta|\rho|^{-\kappa}\|y_j(\rho; \cdot)\|_{\mathfrak{B}}$ із сталими $c, \kappa > 0$ і з функціональним простором $\mathfrak{B} = W_q^l[0, 1]$ або $\mathfrak{B} = H^\mu[0, 1]$.

1. Введение. Далее приняты обозначения: $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, n — натуральное, а s — целое неотрицательное число, $1 \le p \le \infty$ и $p' = p(p-1)^{-1}$, если $1 < p < \infty$, $p' = \infty$, если $p = 1$, и $p' = 1$, если $p = \infty$; H^γ, $0 \le \gamma < \infty$, L_p и W_p^n — соответственно пространства Гельдера, Лебега и Соболева функций, заданных на отрезке $[0, 1]$ (точные определения даны в п. 2). Через $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ обозначено множество линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства $\mathfrak{B}_1$ в банахово пространство $\mathfrak{B}_2$, причем $[\mathfrak{B}] := [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}]$. Норма (или полунорма) векторов и операторов обозначается через $\|\cdot\|$ и снабжается индексом, обозначающим нормированное (или полунормированное) пространство. Отметим, что специальное обозначение $\|\cdot\|_p$ применяется лишь для нормы в пространстве L_p.

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение по ρ фундаментальной системы решений уравнения

$$x^{(n)}(t) + (Fx)(t) + \rho^n x(t) = 0, \quad 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

где оператор $F \in [H^\gamma, W_p^s]$, а параметр $\rho \in \mathbb{C}$.

Функциональный оператор F, удовлетворяющий условию $[H^\gamma, W_p^s]$, охватывает широкие классы интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных и дифференциально-граничных операторов, уравнения с отклоняющи-

* Выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

мся аргументом и др. (см., например, работы [1 – 5] и имеющиеся далее примеры).

Оператор F рассматривается как возмущение простейшего однородного уравнения

$$y^{(n)}(t) + \rho^n y(t) = 0, \tag{2}$$

с решениями которого и сравниваются решения уравнения (1).

Построим необходимую для дальнейшего фундаментальную систему решений уравнения (2), для чего введем используемые в работе обозначения.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — корни n-й степени из -1, а число

$$w_n = \begin{Bmatrix} 2, & \text{если } n-\text{нечетно;} \\ 1, & \text{если } n-\text{четно,} \end{Bmatrix} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2}. \tag{3}$$

Прямые $\{\rho : \mathrm{Re}\,\rho\omega_j = 0\}$, $j = 1, \ldots, nw_n$, разбивают комплексную ρ-плоскость на nw_n непересекающихся углов Ξ_r. Определим подмножества Λ_r^+ и Λ_r^- множества индексов $\{1, \ldots, n\}$ правилами

$$\Lambda_r^{\pm} = \{j : \pm\mathrm{Re}\,\rho\omega_j \geq 0, \quad \rho \in \Xi_r\}, \quad r = 1, \ldots, nw_n, \tag{4}$$

где одновременно участвует либо верхний знак "+", либо нижний знак "–". Отметим, что одно из множеств Λ_r^+ или Λ_r^- содержит ровно $[n/2]$ индексов, другое — $[(n+1)/2]$ индексов, а объединение множеств Λ_r^+ и Λ_r^- совпадает с множеством индексов от 1 до n при каждом $r = 1, \ldots, nw_n$.

Асимптотика фундаментальной системы решений уравнения (1) будет построена при больших по модулю значениях параметра ρ, принадлежащего областям

$$(\Xi_r)_\xi = \bigcup_{\rho_0 \in \Xi_r} \{\rho : |\rho - \rho_0| \leq \xi\}, \quad r = 1, \ldots, nw_n, \tag{5}$$

являющихся ξ-окрестностями $(\xi \geq 0)$ углов Ξ_r. Отметим, что для любого $\xi > 0$ объединение областей $(\Xi_r)_\xi$ покрывает всю комплексную ρ-плоскость.

Тогда для каждого фиксированного $r = 1, \ldots, nw_n$ фундаментальной системой решений уравнения (2) при $\rho \neq 0$ являются функции

$$y_{j,r}(\rho; t) = \begin{cases} \exp \rho\omega_j(t-1), & j \in \Lambda_r^+; \\ \exp \rho\omega_j t, & j \in \Lambda_r^-. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрение именно этой фундаментальной системы решений $y_{1,r}(\rho; t), \ldots, y_{n,r}(\rho; t)$ уравнения (2) связано с тем, что на основании определений (4) и (5) множеств индексов $\Lambda_r^{\pm}$ и областей $(\Xi_r)_\xi$ функции $y_{j,r}(\rho; t)$ аналитичны по $\rho \in (\Xi_r)_\xi$ и ведут себя примерно одинаково по $\rho \in (\Xi_r)_\xi$. В частности, равномерная по t норма функций $\partial_t^l y_{j,r}(\rho; t)$ оценивается через $|\rho|^l$ при всех $\rho \in (\Xi_r)_\xi$, причем здесь и далее символ ∂_t^l обозначает l-ю производную по t. В работе найдены достаточные условия на оператор F, при которых фундаментальная система решений $x_{1,r}(\rho; t), \ldots, x_{n,r}(\rho; t)$ уравнения (1) имеет аналогичные свойства, что и фундаментальная система (6) решений уравнения (2) и, кроме того, при достаточно больших по модулю значениях $\rho \in (\Xi_r)_\xi$ справедлива оценка

$$\| x_{j,r}(\rho; \cdot) - y_{j,r}(\rho; \cdot) \|_{\mathbb{B}} \leq c_\xi |\rho|^{-\kappa} \| y_{j,r}(\rho; \cdot) \|_{\mathbb{B}} \tag{7}$$

с некоторыми положительными постоянными c_ξ и κ, а $\mathfrak{B}$ — одно из пространств W_q^l или H^μ.

Свойство (7) фундаментальной системы решений $x_{1,r}(\rho;\, t), \ldots, x_{n,r}(\rho;\, t)$ играет существенную роль при построении и исследовании характеристического определителя и оператора Грина (см., например, [1 – 3, 6 – 13]) для краевых задач, связанных с функционально-дифференциальным выражением $\partial_t^n + F$.

В предыдущих пояснениях неявно предполагалось, что при достаточно больших по модулю значениях ρ уравнение (1) имеет ровно n линейно независимых решений. Для этого, как показывают примеры (см., например, пример 2 из работы [4]), существенным является требование $\gamma < n + s - 1$ в условии $F \in$ $\in [\, H^\gamma, W_p^s\,]$, которое будем предполагать выполненным, в основных теоремах 1 и 2 данной работы.

Работа состоит из пяти пунктов. В п. 2 введены необходимые функциональные пространства и приведены используемые далее их свойства. В п. 3 сформулированы основные результаты работы об асимптотике фундаментальной системы решений уравнения (1), доказательства которых даны в п. 5. В п. 4, который имеет вспомогательный характер, установлено взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (1) и (2) и изучена его аналитическая природа. Оценка нормы этого соответствия в пространствах W_q^l и H^μ опирается на развитый в данной работе метод получения оценок в нормах, зависящих от комплексного параметра ρ.

2. Функциональные пространства. Через L_p и W_p^n обозначены пространства Лебега и Соболева функций, заданных на отрезке $[\,0, 1\,]$, причем W_p^n состоит из абсолютно непрерывных функций, для которых производные $x^{(l)}$ абсолютно непрерывны при $l < n$ и $x^{(n)} \in L_p$, а норма $\|x\|_{W_p^n} := \|x\|_p +$ $+ \|x^{(n)}\|_p$. Кроме того, положим $W_p^0 := L_p$. Для чисел $l = 0, 1, \ldots$ пространство H^l состоит из l раз непрерывно дифференцируемых функций x, заданных на отрезке $[\,0, 1\,]$, пространство $H := H^0$ и $\|x\|_H := \sup\limits_{0\le t\le 1} |x(t)|$, а $\|x\|_{H^l} :=$ $:= \|x\|_H + \|x^{(l)}\|_H$, $l = 1, 2, \ldots$. Если $0 \le \nu \le 1$, то через H_0^ν обозначим множество функций $x \in H$, для которых конечна полунорма

$$\|x\|_{H_0^\nu} := \sup_{0\le t<\tau\le 1} \frac{|\,x(\tau) - x(t)\,|}{(\tau - t)^\nu}. \tag{8}$$

Отсюда вытекает следующее мультипликативное неравенство:

$$\|x\|_{H_0^\nu} \le 2\|x\|_H^{1-\nu}\, \|x'\|_H^\nu, \quad 0 \le \nu \le 1, \quad x \in H^1. \tag{9}$$

Пусть функция $x \in W_p^1$. Тогда, используя неравенство Гельдера, получаем

$$\|x\|_{H_0^\nu} = \sup_{0\le t<\tau\le 1} \frac{1}{(\tau - t)^\nu} \left| \int_t^\tau x'(\zeta)\, d\zeta \right| \le \|x'\|_p \sup_{0\le t<\tau\le 1} (\tau - t)^{1/p' - \nu},$$

т. е.

$$\|x\|_{H_0^\nu} \le \|x'\|_p, \quad 1 \le p \le \infty, \quad 0 \le \nu \le 1/p', \quad x \in W_p^1. \tag{10}$$

Отметим еще одно простое неравенство

$$\|x\|_H \le \delta^{-1/q}\|x\|_q + \delta^{1/p'}\|x'\|_p, \quad 1 \le p, q \le \infty, \quad 0 < \delta \le 1, \quad x \in W_p^1. \quad (11)$$

Действительно, так как функция $x \in W_p^1$ непрерывна, то $\|x\|_H = |x(t_0)|$ при некотором $t_0 \in [0, 1]$. Для произвольного $0 < \delta \le 1$ выберем число $t_1 \in [0, 1]$, для которого $t_1 \le t_0 \le t_1 + \delta \le 1$. Согласно теореме о среднем для непрерывной функции существует такое число $\zeta \in [t_1, t_1 + \delta]$, что

$$|x(\zeta)| = \frac{1}{\delta}\int_{t_1}^{t_1+\delta} |x(\tau)|\,d\tau \le \delta^{-1/q}\|x\|_q,$$

а так как функция x, принадлежащая W_p^1, абсолютно непрерывна, то

$$|x(t_0)| = \left| x(\zeta) + \int_{\zeta}^{t_0} x'(\tau)\,d\tau \right| \le |x(\zeta)| + |t_0 - \zeta|^{1/p'}\|x'\|_p.$$

Из приведенных соотношений и выбора точек t_0 и ζ вытекает неравенство (11).

Введем теперь пространство Гельдера H^γ при всех неотрицательных γ. Представим число γ в виде $\gamma = l + \nu$, где l — целое неотрицательное число, а $0 \le \nu < 1$. Тогда при $\nu = 0$ пространство $H^\gamma := H^l$, а при $0 < \nu < 1$ пространство H^γ состоит из функций $x \in H^l$, для которых $x^{(l)} \in H_0^\nu$ и с нормой $\|x\|_{H^\gamma} := \|x\|_{H^l} + \|x^{(l)}\|_{H_0^\nu}$. Согласно теореме Лебега о производной абсолютно непрерывной функции заключаем, что $\|x\|_{H_0^1} = \|x'\|_\infty$, $x \in W_\infty^1$. Поэтому в дальнейшем удобно использовать также шкалу пространств H_n^γ, где n — натуральное число, а $0 \le \gamma \le n$, определяемую равенствами $H_n^\gamma := H^\gamma$ при $0 \le \gamma < n$ и $H_n^n := W_\infty^n$.

Утверждение 1. *Пространство* W_p^n *вложено в пространство* $H_n^{n-1/p}$. *Если* $0 \le \gamma < n - 1/p$, *то пространство* W_p^n *компактно вложено в пространство* $H^\gamma (= H_n^\gamma)$.

Доказательство полностью повторяет рассуждения из книг [14, с. 33; 15, с. 271] с использованием неравенств (10) и (11).

Пусть Ω — область (т. е. открытое множество) комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $f(\rho)$ — функция, зависящая от комплексного параметра $\rho \in \Omega$, принимающая свои значения в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Аналитичность этой функции означает дифференцируемость ее в комплексном смысле по норме пространства $\mathfrak{B}$ в каждой точке $\rho \in \Omega$.

Из этого определения вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть банахово пространство* $\mathfrak{B}$ *вложено в банахово пространство* $\mathfrak{B}_1$, *а функция* $f(\rho)$ *со значениями в* $\mathfrak{B}$ *аналитически зависит от* ρ, *принадлежащего области* Ω. *Тогда эта функция, рассмотренная как вектор-функция со значениями в* $\mathfrak{B}_1$, *также будет аналитична по* $\rho \in \Omega$.

Далее потребуется еще одно простое утверждение.

Утверждение 3. *Пусть вектор-функция* $f(\rho; \cdot)$ *зависит от* ρ, *принадлежащего области* Ω, *и принимает свои значения в пространстве* W_p^n. *Тог-*

да для того чтобы функция $f(\rho;\cdot)$ *была аналитична по* $\rho\in\Omega$, *необходимо и достаточно, чтобы для любых функций* $g_1, g_2\in L_{p'}$ *числовая функция*

$$\int_0^1 f(\rho;t)\,\overline{g_1(t)}\,dt+\int_0^1\left(\partial_t^n f(\rho;t)\right)\overline{g_2(t)}\,dt \tag{12}$$

была аналитична по $\rho\in\Omega$.

Доказательство этого утверждения полностью повторяет пояснения, сделанные при доказательстве утверждения 2 из работы [5].

Из утверждений 1 и 2 вытекает, что если функция $f(\rho;\cdot)$ со значениями в пространстве W_p^n аналитична по $\rho\in\Omega$, то она аналитична по $\rho\in\Omega$ и как вектор-функция со значениями в каждом из пространств H_n^γ, $0\le\gamma\le n-1/p$. Проверка же аналитичности по $\rho\in\Omega$ функции $f(\rho;\cdot)$ со значениями в пространстве W_p^n сводится к установлению аналитичности по $\rho\in\Omega$ числовой функции (12), что сделать в ряде случаев весьма просто. Например, из изложенного следует, что все функции $y_{j,r}(\rho;\cdot)$, заданные равенствами (6), являются целыми как вектор-функции со значениями в любом из пространств W_p^s, $1\le p\le\infty$, $s=0,1,\ldots$ и H^γ, $\gamma\ge 0$.

3. Формулировки основных теорем. В силу утверждения 1 пространство W_p^{n+s} вложено в пространство $H_{n+s}^{n+s-1/p}$, поэтому, если в (1) оператор $F\in\left[H_{n+s}^{n+s-1/p}, W_p^{n+s}\right]$, то корректно следующее определение: решением уравнения (1) при фиксированном $\rho\in\mathbb{C}$ называется функция $x(\rho;t)$, принадлежащая по t пространству W_p^{n+s} и удовлетворяющая (при $s=0$ почти всюду) тождеству (1). Фундаментальной системой решений уравнения (1) при фиксированном ρ называется система функций $x_1(\rho;t),\ldots,x_m(\rho;t)$, являющихся решениями уравнения (1), если эти функции линейно независимы и произвольное решение уравнения (1) при данном ρ линейно выражается через $x_1(\rho;t),\ldots,x_m(\rho;t)$. Согласно теореме 1 из работы [4], если оператор $F\in[H^\gamma, W_p^s]$ при $0\le\gamma<n+s-1$, то у уравнения (1) при любом $\rho\in\mathbb{C}$ всегда существует фундаментальная система решений, причем при достаточно больших по модулю ρ в нее входит ровно n функций. Асимптотика фундаментальной системы решений устанавливается при достаточно больших по модулю ρ, принадлежащих областям $(\Xi_r)_\xi$, которые заданы соотношениями (5), и для дальнейшего удобно выделить следующие подмножества областей $(\Xi_r)_\xi$:

$$\Omega_r(c,\kappa,\xi)=\{\rho:\rho\in(\Xi_r)_\xi,\ \ |\rho|>(ce^\xi)^{1/\kappa}+1\}, \tag{13}$$

где значения положительных постоянных c и κ определяются характеристиками функционального возмущения F.

Аналитичность по ρ фундаментальной системы решений уравнения (1) удается показать в объединении по параметру $\xi\ge 0$ областей (13), т. е. в области

$$\Omega_r(c,\kappa)=\bigcup_{\xi\ge 0}\Omega_r(c,\kappa,\xi). \tag{14}$$

Этот факт существенно используется при изучении нулей характеристического определителя краевой задачи для функционально-дифференциального выражения вида ∂_t^n+F (см., например, доказательство теоремы 2 из работы [13]).

В формулировке теорем об асимптотике фундаментальной системы решений уравнения (1) содержится функция $\varphi(\rho, p)$, заданная при аргументе $\rho \in \mathbb{C}$ и при параметре $1 \le p < \infty$ формулой

$$\varphi(\rho, p) = \left(1 + p \min_{j=1,\dots,n} |\mathrm{Re}\,\rho\omega_j|\right)^{-1/p}, \tag{15}$$

а при $p = \infty$ считаем, что $\varphi(\rho, \infty) := 1$ для всех $\rho \in \mathbb{C}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое банахово пространство, а оператор $F \in [\mathfrak{B}, W_p^s]$ при некотором натуральном s. Тогда для любого вектора $x \in \mathfrak{B}$ функция $(Fx)(\cdot) \in W_p^s$ и поэтому определен оператор

$$[(\partial^k F)x](t) := \partial_t^k (Fx)(t), \quad k = 0, \dots, s, \quad x \in \mathfrak{B}, \tag{16}$$

который согласно утверждению 1 принадлежит множеству $\left[\mathfrak{B}, H_{s-k}^{s-k-1/p}\right]$ при $k = 0, \dots, s-1$, а $\partial^s F \in [\mathfrak{B}, L_p]$. Но может оказаться и так, что оператор $\partial^k F$ принадлежит также и иным множествам операторов. Например, при натуральном значении числа m оператор F, заданный выражением $(Fx)(t) = x^{(m)}(0) + x(t)$, принадлежит множеству $[H^m, W_p^s]$ при всех $s = 0, \dots, m$, а оператор $\partial^k F \in [H^s, W_q^s]$ при всех $k = 1, 2, \dots$ и $s = 0, 1, \dots$, а $1 \le p,\ q \le \infty$.

Далее часто будут использоваться следующие требования на величины p, q и α:

$$1 \le p \le q \le \infty, \quad 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha}. \tag{17}$$

В введенных обозначениях сформулируем одно из основных утверждений работы, в формулировке которого и далее суммы с верхним пределом суммирования меньшим нижнего считаем равными нулю.

Теорема 1. *Пусть величины p, q и α связаны требованиями* (17), *а оператор*

$$F \in [H^\gamma, W_p^s], \quad 0 \le \gamma < n + s - 1 - 1/q, \tag{18}$$

$$\partial^k F \in [H^{\gamma_k}, L_q], \quad 0 \le \gamma_k < k + n - 1/q, \quad k = 0, \dots, s-1, \tag{19}$$

причем при $n = 1$ считаем $q > 1$, а при $s = 0$ не предполагаем выполнеными условия (19). *Пусть постоянная*

$$c_q(F) = \|\partial^s F\|_{[H^\gamma, L_p]} + \sum_{k=0}^{s-1} \|\partial^k F\|_{[H^{\gamma_k}, L_q]}, \tag{20}$$

а при $s = 1, 2, \dots$

$$\beta = \min_{k=0,\dots,s-1} \{k + n - \gamma_k\}, \quad \kappa_q = \min\{\beta, n + s - 1 - \gamma\} - 1/q \tag{21}$$

и при $s = 0$ постоянная β не определяется, а $\kappa_q = n - 1 - \gamma - 1/q$.

Тогда для любого индекса $r = 1, \dots, n w_n$ найдется такая фундаментальная система решений $x_{1,r}(\rho; t), \dots, x_{n,r}(\rho; t)$ уравнения (1), *что*: 1) *каждая функция $x_{j,r}(\rho; \cdot)$, рассмотренная как вектор-функция аргумента $\rho \in \Omega_r(48 c_q(F), \kappa_q)$ со значениями в пространстве W_p^{n+s}, является аналити-*

ческой; 2) *при* $\rho \in \Omega_r(48 c_q(F), \kappa_q, \xi)$, $\xi \geq 0$, *и с функциями* $y_{j,r}(\rho; t)$, *заданными равенствами* (6), *выполнены оценки*

$$\| x_{j,r}(\rho; \cdot) - y_{j,r}(\rho; \cdot) \|_{W_q^l} \leq$$

$$\leq 48 e^{2\xi} c_q(F) \left\{ \frac{1}{|\rho|^{\beta}} + \frac{\varphi(\rho; \alpha)}{|\rho|^{n+s-1-\gamma}} \right\} |\rho|^l, \quad l = 0, \ldots, n+s-1, \tag{22}$$

$$\| x_{j,r}(\rho; \cdot) - y_{j,r}(\rho; \cdot) \|_{H^{\mu}_{n+s}} \leq$$

$$\leq 192 e^{2\xi} c_q(F) \left\{ \frac{1}{|\rho|^{\beta}} + \frac{\varphi(\rho; \alpha)}{|\rho|^{n+s-1-\gamma}} \right\} |\rho|^{\mu + 1/q}, \quad 0 \leq \mu \leq n+s-1/p, \tag{23}$$

причем при $p = q$, *а значит, при* $\alpha = 1$, *оценка* (22) *справедлива и при* $l = n+s$, *а в случае* $s = 0$ *слагаемое* $|\rho|^{-\beta}$, *находящееся в фигурных скобках в правых частях неравенств* (22) *и* (23), *исчезает.*

Если отказаться от условий (19), то справедливы более слабые, нежели (22) и (23), оценки, что будет пояснено после формулировки следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть оператор* $F \in [H^{\gamma}, W_p^s]$, $0 \leq \gamma < n+s-1$, *постоянные*

$$c(F) = \| \partial^s F \|_{[H^{\gamma}, L_p]} + \sum_{k=0}^{s-1} \| \partial^k F \|_{[H^{\gamma}, H]}, \quad \kappa = n - 1 + \min\{1, s - \gamma\}, \tag{24}$$

а величины p, q *и* α *связаны требованиями* (17).

Тогда для любого индекса $r = 1, \ldots, n w_n$ *найдется такая фундаментальная система решений* $x_{1,r}(\rho; t), \ldots, x_{n,r}(\rho; t)$ *уравнения* (1), *что:* 1) *каждая функция* $x_{j,r}(\rho; t)$, *рассмотренная как вектор-функция аргумента* $\rho \in \Omega_r(40 c(F), \kappa)$ *со значениями в пространстве* W_p^{n+s}, *является аналитической;* 2) *при* $\rho \in \Omega_r(40 c(F), \kappa, \xi)$, $\xi \geq 0$, *и с функциями* $y_{j,r}(\rho; t)$, *заданными равенствами* (6), *выполнены оценки*

$$\| x_{j,r}(\rho; \cdot) - y_{j,r}(\rho; \cdot) \|_{W_q^l} \leq$$

$$\leq 48 e^{2\xi} c(F) |\rho|^{\gamma - n} (1 + |\rho|^{l-s+1} \varphi(\rho; \alpha)), \quad l = 0, \ldots, n+s-1, \tag{25}$$

$$\| x_{j,r}(\rho; \cdot) - y_{j,r}(\rho; \cdot) \|_{H^{\mu}_{n+s}} \leq$$

$$\leq 80 e^{2\xi} c(F) |\rho|^{\gamma - n} (1 + |\rho|^{\mu - s + 1} \varphi(\rho; \alpha)), \quad 0 \leq \mu \leq n+s-1/p, \tag{26}$$

причем при $p = q$ *оценка* (25) *справедлива и при* $l = n+s$.

Обсудим связь утверждений теорем 1 и 2. Для этого вначале приведем необходимые оценки норм функций $y_{j,r}(\rho; t)$, заданных формулами (6), в пространствах H^{μ}.

При $|z| = 1$ справедливо неравенство $|1 - e^z| \geq 4^{-1}$, поэтому, подставляя в определение (8) полунормы $\|\cdot\|_{H_0^{\nu}}$ функцию $x(t) = \exp \rho t$, число $\tau = |\rho|^{-1}$, $|\rho| \geq 1$, и $t = 0$, получаем оценки

$$\| e^{\rho t} \|_{H_0^{\nu}} \geq |\rho|^{\nu} |1 - e^{\rho |\rho|^{-1}}| \geq 4^{-1} |\rho|^{\nu}, \quad 0 \leq \nu \leq 1, \quad |\rho| \geq 1. \tag{27}$$

Считая параметр $\rho \in (\Xi_r)_{\xi}$ и $|\rho| \geq 1$, из определений (6) функций $y_{j,r}(\rho; t)$ имеем $|\rho|^l \leq \| \partial_t^l y_{j,r}(\rho; t) \|_H \leq e^{\xi} |\rho|^l$, откуда, принимая во внимание мультипликативное неравенство (9), заключаем, что $\|\partial_t^l y_{j,r}(\rho;t)\|_{H_0^\nu} \le 2e^\xi|\rho|^{l+\nu}$, $l = 0, 1, \ldots$, $0 \le \nu \le 1$. Из этих неравенств и оценок (27) следуют соотношения

$$|\rho|^\mu \le \|y_{j,r}(\rho;\cdot)\|_{H^\mu} \le 4e^\xi|\rho|^\mu, \quad \mu \ge 0, \quad \rho \in (\Xi_r)_\xi, \quad |\rho| \ge 1. \tag{28}$$

Учитывая определение (21) числа κ_q, оценку (23) и первое из неравенств в (28), получаем, что при выполнении условий теоремы 1 для параметра $\rho \in \in \Omega_r(48c_q(F), \kappa_q, \xi)$ справедлива оценка (7) с постоянными $c_\xi = 284e^{2\xi}c_q(F)$, $\kappa = \kappa_q$ и с функциональным пространством $\mathfrak{B} = H^\mu$. Поэтому функции $y_{j,r}(\rho;\cdot)$ в оценке (23) определяют в главном асимптотическое поведение по $\rho \to \infty$ и $\rho \in \Omega_r(48c_q(F), \kappa_q, \xi)$, $\xi \ge 0$, фундаментальной системы решений $x_{j,r}(\rho;t)$ уравнения (1) по норме пространства H^μ_{n+s}, $0 \le \mu \le n+s-1/p$. Аналогично показывается, что для справедливости подобного утверждения при выполнении условий теоремы 2 необходимо предположить, что в ней либо $s = 0$ или $s = 1$, либо $s = 2, 3, \ldots$, а значение $\gamma < n$ (и эти ограничения на s и γ, как показывает пример 4 из работы [4], существенны). Если же указанные предположения о s и γ не выполнены, то оценка (26) определяет в главном асимптотическое поведение фундаментальной системы решений $x_{j,r}(\rho;t)$ лишь при значениях $\mu \ge \gamma - n$. Однако, несложно привести условия на оператор F, когда s-кратное применение теоремы 2 обеспечивает асимптотическое поведение фундаментальной системы решений $x_{j,r}(\rho;t)$ при всех $0 \le \mu \le n+s-1/p$. Но эти условия окажутся более ограничительными, нежели требования (19), что будет показано в следующем примере, который, как следует из изложенного, достаточно построить при значении $s = 2$. Кроме того, для простоты, будем предполагать, что $n = 2$, а величина q в условиях (18) и (19) равна ∞.

***Пример* 1.** Существует такой оператор F, что справедливы включения

$$F \in [H^{1+\nu_0}, H], \quad \partial F \in [H^{2+\nu_1}, H],$$
$$\partial^2 F \in [H^{2+\nu}, L_1], \quad 1/2 < \nu_0, \nu_1, \nu < 1, \tag{29}$$

а операторы F и ∂F не принадлежат соответственно множествам $[H^\nu, L_1]$ и $[H^{1+\nu}, L_1]$ ни при каких значениях $0 < \nu < 1$. Тем самым для указанного оператора F теорема 1 с $p = 1$, $q = \infty$ и при $n = s = 2$ дает асимптотику фундаментальной системы решений $x_{j,r}(\rho;t)$ в пространстве H^μ при всех $0 \le \le \mu \le 3$, а теорема 2 применима лишь при значении $s = 2$ и поэтому она дает асимптотику фундаментальной системы решений $x_{j,r}(\rho;t)$ в пространстве H^μ только для значений μ с $1/2 < \mu \le 3$.

Для построения искомого оператора F введем последовательности чисел

$$\tau_{4j-l} = \frac{\ln 2}{4}\left(\frac{1+l}{\ln(j+1)} + \frac{3-l}{\ln(j+2)}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad l = 3, 2, 1, 0, \tag{30}$$

$$\lambda_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_{4j-3}}{j} + \frac{\tau_{4j+1}}{j+1}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

$$\delta_j = \frac{\ln 2}{4}\left(\frac{1}{\ln(j+1)} - \frac{1}{\ln(j+2)}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{32}$$

а на функциях $x \in H^1$ зададим выражения

$$\Delta_j(x) = \frac{1}{\delta_j^3}\left(x'\left(\frac{\tau_{4j-3}}{j} \right) - 2x'(\lambda_j) + x'\left(\frac{\tau_{4j+1}}{j+1} \right)\right), \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{33}$$

В этих обозначениях определим оператор F, заданный на функциях $x \in H^1$ и на каждом из полуинтервалов $(\tau_{4j-2}, \tau_{4j-3}]$, $(\tau_{4j}, \tau_{4j-2}]$, $(\tau_{4j+1}, \tau_{4j}]$, $j = 1$, 2, ... , равенствами

$$\begin{gathered} (Fx)(t) = 2^{-1}(t-\tau_{4j-3})^2 \Delta_j(x), \quad \tau_{4j-2} < t \le \tau_{4j-3}, \\ (Fx)(t) = \delta_j^2 \Delta_j(x) - 2^{-1}(t-\tau_{4j-1})^2 \Delta_j(x), \quad \tau_{4j} < t \le \tau_{4j-2}, \\ (Fx)(t) = 2^{-1}(t-\tau_{4j+1})^2 \Delta_j(x), \quad \tau_{4j+1} < t \le \tau_{4j}, \end{gathered} \tag{34}$$

На каждом полуинтервале $(\tau_{4j-2}, \tau_{4j-3}]$, $(\tau_{4j}, \tau_{4j-2}]$ и $(\tau_{4j+1}, \tau_{4j}]$ функция Fx является параболой. Из определений (30) и (32) чисел τ_j и δ_j следуют равенства

$$\tau_{4j-l} - \tau_{4j-l+1} = \delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad l = 3, 2, 1, 0, \tag{35}$$

откуда и из определений (34) функции Fx получаем ее непрерывность на полуинтервале $(0, 1]$ и

$$\begin{gathered} (\partial Fx)(t) = (t-\tau_{4j-3})\Delta_j(x), \quad \tau_{4j-2} < t \le \tau_{4j-3}, \\ (\partial Fx)(t) = -(t-\tau_{4j-1})\Delta_j(x), \quad \tau_{4j} < t \le \tau_{4j-2}, \\ (\partial Fx)(t) = (t-\tau_{4j+1})\Delta_j(x), \quad \tau_{4j+1} < t \le \tau_{4j}. \end{gathered} \tag{36}$$

На каждом полуинтервале $(\tau_{4j-2}, \tau_{4j-3}]$, $(\tau_{4j}, \tau_{4j-2}]$ и $(\tau_{4j+1}, \tau_{4j}]$ функция ∂Fx линейна, а на всем полуинтервале $(0, 1]$ она согласно равенствам (35) непрерывна. (Именно поэтому формулы (36) справедливы при значениях $t = \tau_{4j-3}$, $t = \tau_{4j-2}$, $t = \tau_{4j}$.) Из (36) следует

$$\begin{gathered} (\partial^2 Fx)(t) = \Delta_j(x), \quad \tau_{4j-l+1} < t < \tau_{4j-l}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad l = 3, 0, \\ (\partial^2 Fx)(t) = -\Delta_j(x), \quad \tau_{4j} < t < \tau_{4j-2}, \quad j = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{37}$$

Оценим нормы операторов F, ∂F и $\partial^2 F$, для чего вначале приведем оценки величин δ_j и $\Delta_j(x)$, заданных соответственно равенствами (32) и (33).

Из разложения функции $\ln(1+\zeta)$ в ряд Тейлора и из оценок остатка у знакопеременных рядов с монотонными членами вытекают неравенства

$$\frac{\ln 2}{4(j+2)\ln^2(j+2)} < \delta_j < \frac{\ln 2}{4(j+1)\ln^2(j+1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

а из определений (30) – (32) чисел τ_j, λ_j и δ_j имеем

$$\frac{2\delta_j}{j+1} < \frac{\tau_{4j-3}}{j} - \lambda_j = \lambda_j - \frac{\tau_{4j+1}}{j+1} < \frac{2\delta_j}{j}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{39}$$

Отсюда, учитывая определения (30), (32) и (8) величин λ_j, $\Delta_j(x)$ и полунормы $\|\cdot\|_{H_0^\nu}$, заключаем, что

$$|\Delta_j(x)| \le 4j^{-\nu}\delta_j^{-3+\nu}\|x'\|_{H_0^\nu}, \quad x \in H^{1+\nu}, \quad 0 \le \nu < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

а так как для функции $x \in H^2$

$$\Delta_j(x) = \frac{1}{\delta_j^3} \int\limits_{\lambda_j}^{j^{-1}\tau_{4j-3}} \left(x''(\zeta) - x''\left(\zeta + \frac{\tau_{4j+1}}{j+1} - \lambda_j \right)\right) d\zeta,$$

то согласно соотношениям (39)

$$|\Delta_j(x)| \le 4 j^{-1-\nu}\, \delta_j^{-2+\nu}\, \|x''\|_{H_0^\nu}, \quad x \in H^{2+\nu}, \quad 0 \le \nu < 1, \quad j = 1, 2, \ldots . \quad (41)$$

Из формул (34), (36) и (37), задающих операторы F, ∂F и $\partial^2 F$, и из оценок (40) и (41) вытекают неравенства

$$\| Fx \|_H \le 4 \|x'\|_{H_0^{\nu_0}} \sup_{j=1,2,\ldots} j^{-\nu_0}\, \delta_j^{-1+\nu_0},$$

$$\| \partial F x \|_H \le 4 \|x''\|_{H_0^{\nu_1}} \sup_{j=1,2,\ldots} j^{-1-\nu_1}\, \delta_j^{-1+\nu_1},$$

$$\| \partial^2 F x \|_1 \le 16\, \|x''\|_{H_0^\nu} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1-\nu}\, \delta_j^{-1+\nu},$$

из которых с учетом первого из неравенств в (38) вытекают включения (29) (причем ν_1 в них можно считать удовлетворяющим соотношениям $0 < \nu_1 < 1$, однако ν_0 и ν заведомо больше чем $1/2$, что несложно вывести из второго из неравенств в (38) и рассуждений, аналогичных тем, что приведены далее).

Из определений (34) оператора F следует, что этот оператор не принадлежит множеству $[H^\nu, L_1]$ ни при каком значении $0 \le \nu < 1$. Установим теперь, что оператор ∂F не принадлежит множеству $[H^{1+\nu}, L_1]$ ни при каком значении $0 \le \nu < 1$, а для этого достаточно показать, что оператор ∂F не принадлежит более широкому множеству $[H_2^2, L_1]$. Чтобы установить этот факт, введем последовательности чисел

$$\hat{x}'\left(\frac{\tau_{4j-3}}{j} \right) = \sum_{k=1}^{2j-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 \ln^2(k+1)}, \quad \hat{x}'(\lambda_j) = \sum_{k=1}^{2j} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 \ln^2(k+1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad (42)$$

по которым построим непрерывную функцию $\hat{x}'(t)$, линейную на каждом отрезке $[\lambda_j, j^{-1}\tau_{4j-3}]$ и $[(j+1)^{-1}\tau_{4j+1}, \lambda_j]$, $j = 1, 2, \ldots$, и принимающую в точках $t = j^{-1}\tau_{4j-3}$ и $t = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$, указанные в равенствах (42) значения. Из (38), (39) и (42) заключаем, что

$$\sup_{j=1,2,\ldots} \frac{\left| \hat{x}'(j^{-1}\tau_{4j-3}) - \hat{x}'(\lambda_j) \right|}{j^{-1}\tau_{4j-3} - \lambda_j} < \infty, \qquad \sup_{j=1,2,\ldots} \frac{\left| \hat{x}'(\lambda_j) - \hat{x}((j+1)^{-1}\tau_{4j+1}) \right|}{\lambda_j - (j+1)^{-1}\tau_{4j+1}} < \infty,$$

откуда согласно леме 3.2 из книги [15, с. 271] (справедливой и при значении $\alpha = 1$) вытекает принадлежность так построенной функции $\hat{x}'$ классу H_1^1. Следовательно, функция $\hat{x}(t) = \int_0^t \hat{x}'(\zeta)\, d\zeta$ принадлежит классу H_2^2. Покажем теперь, что на функции $\hat{x}$ оператор ∂F, заданный равенствами (36), не определен как ограниченный оператор из пространства H_2^2 в пространство L_1. Действительно, подставляя в определение (33) величин $\Delta_j(x)$ значения $\hat{x}'(j^{-1}\tau_{4j-3})$ и $\hat{x}'(\lambda_j)$ из равенств (42), получаем

$$\Delta_j(\hat{x}) = \frac{1}{\delta_j^3} \left(\frac{1}{(2j)^2 \ln^2(2j+1)} + \frac{1}{(2j+1)^2 \ln^2(2j+2)} \right),$$

а согласно формулам (36) справедливо равенство $\|\partial F x\|_1 = 2\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^2 |\Delta_j(x)|$, откуда с учетом первого из неравенств в (38) $\|\partial F \hat{x}\|_1 = \infty$, что завершает построение примера 1.

В утверждениях (22) и (25) теорем 1 и 2 пространства Соболева W_q^l, $l = 0, \ldots, n+s-1$, можно заменить на пространства Соболева – Слободецкого W_q^{μ}, $0 \le \mu \le n+s-1$, если воспользоваться мультипликативным неравенством (17) из книги [16, с. 224]. Тогда утверждения теоремы 2 содержат утверждения теоремы 2 из [4]. Отметим, что утверждение (26) теоремы 2 является новым лишь для значений параметра μ, удовлетворяющего условиям $s-1<\mu<s$ и $n+s-1<\mu \le n+s-1/p$, если $p>1$. Тем не менее, именно это усиление теоремы 2 из [4] оказалось необходимым при доказательстве анонсированной теоремы из работы [17] о неравенствах Джексона для собственных функций краевых задач.

4. Построение фундаментальной системы решений и аналитичность ее по параметру. Для целого индекса m и параметра $\rho \in \mathbb{C}$ введем преобразования

$$[R_m(\rho)_r g](t) = \frac{1}{n} \sum_{j \in \Lambda_r^+} \int_t^1 \omega_j^{1-m} e^{\rho\omega_j(t-\tau)} g(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{j \in \Lambda_r^-} \int_0^t \omega_j^{1-m} e^{\rho\omega_j(t-\tau)} g(\tau) d\tau, \quad r = 1, \ldots, n w_n, \tag{43}$$

линейные по функции $g \in L_1$. В формуле (43) ω_j — корни степени n из -1, число w_n задано равенствами (3), а множества индексов $\Lambda_r^{\pm}$ заданы соотношениями (4).

Произвольное целое число m однозначно представимо в виде $m = qn + l$, где q и l — целые числа и $0 \le l \le n-1$. Число q будем называть целой частью числа m по модулю n и обозначать через $[m]_n$, а число l — дробной частью числа m по модулю n и обозначать через $\{m\}_n$. Целая и дробная части числа m по модулю n выражаются через обычную целую часть $[\alpha]$ числа α по формулам $[m]_n = [m/n]$, $\{m\}_n = m - n[m/n] = m - n[m]_n$. Очевидно, что $[-1]_n = -1$, а $\{-1\}_n = n-1$.

В введенных обозначениях из определения (43) преобразования $R_m(\rho)_r$ и из равенств $\omega_1^l + \ldots + \omega_n^l = 0$, если $\{l\}_n \ne 0$, и $\omega_1^l + \ldots + \omega_n^l = (-1)^{[l]_n} n$, если $\{l\}_n = 0$, вытекают формулы $R_m(\rho)_r = (-1)^{[m]_n} R_{\{m\}_n}(\rho)_r$ и

$$\partial_t^l [R_m(\rho)_r g](t) = \rho^l [R_{m-l}(\rho)_r g](t), \quad l = 0, \ldots, \{m-1\}_n, \tag{44}$$

$$\partial_t^{\{m-1\}_n+1} [R_m(\rho)_r g](t) = (-1)^{[m-1]_n} \rho^{\{m-1\}_n} (-g(t) + \rho [R_0(\rho)_r g](t)), \tag{45}$$

в которых функция $g \in L_1$.

И наконец, для целого неотрицательного s и параметра $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ определим преобразования

$$[Q_s(\rho)_r g](t) = \frac{1}{\rho^n} \sum_{k=0}^{[s-1]_n} \frac{(-1)^k g^{(kn)}(t)}{\rho^{kn}} + \frac{1}{\rho^{n+s-1}} [R_s(\rho)_r g^{(s)}](t), \tag{46}$$

линейные по функции $g \in W_1^s$. В (46), как и раньше, суммы, в которых верхний предел суммирования меньше нижнего, считаем равными нулю. Так, формула (46) при $s = 0$ принимает вид

$$[Q_0(\rho)_r g](t) = \rho^{-n+1}[R_0(\rho)_r g](t). \tag{47}$$

Из формул (44) – (46) и определения целой и дробной частей числа по модулю n следуют равенства

$$\partial_t^l[Q_s(\rho)_r g](t) = [Q_{s-l}(\rho)_r g^{(l)}](t), \quad l = 0, \dots, s, \quad g \in W_1^s, \tag{48}$$

$$\partial_t^n[Q_s(\rho)_r g](t) + \rho^n[Q_s(\rho)_r g](t) = g(t), \quad s = 0, 1, \dots, \quad g \in W_1^s, \tag{49}$$

т. е. функция $x(\rho; t) = [Q_s(\rho)_r g](t)$ является частным решением уравнения

$$x^{(n)}(t) + \rho^n x(t) = g(t). \tag{50}$$

Из формул (48) и (49) имеем

$$\partial_t^{n+s}[Q_s(\rho)_r g](t) + \rho^n[Q_0(\rho)_r g^{(s)}](t) = g^{(s)}(t), \quad g \in W_1^s. \tag{51}$$

Доказательство следующей леммы использует утверждение 4, непосредственно вытекающее из утверждения 3 и теоремы 3.10.1 из книги [18, с. 107] с учетом данного в этой книге понятия аналитичности (голоморфности) векторнозначных и операторнозначных функций.

Утверждение 4. *Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство, а оператор-функция $Q(\rho)$ зависит от ρ, принадлежащего области Ω, и принимает свои значения в $[\mathfrak{B}, W_p^n]$. Тогда для того чтобы функция $Q(\rho)$ была аналитична по $\rho \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $g \in \mathfrak{B}$ и любых функций $g_1, g_2 \in L_p$, числовая функция*

$$\int_0^t [Q(\rho)g](t)\,\overline{g_1(t)}\,dt + \int_0^t (\partial_t^n[Q(\rho)g](t))\,\overline{g_2(t)}\,dt$$

была аналитична по $\rho \in \Omega$.

Лемма 1. *Преобразование $Q_s(\rho)_r$, рассмотренное как оператор из пространства W_p^s в пространство W_p^{n+s}, является аналитической оператор-функцией по $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, для которой нуль — полюс. Для любой функции $g \in W_p^s$ функция $x(\rho; t) = [Q_s(\rho)_r g](t)$ при фиксированном $\rho \neq 0$ является решением уравнения* (50).

Доказательство. Включение $Q_s(\rho)_r \in [W_p^s, W_p^{n+s}]$ при $1 \le p \le \infty$, аналитичность этой операторнозначной функции по $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и структура ее особенности в точке $\rho = 0$ следуют из формул (43), (46), (47), (51) и утверждения 4. (Отметим, что при $s = 0$ нуль является конечномерным полюсом $Q_0(\rho)_r$, причем, если, кроме того, $n = 1$, то $Q_0(\rho)_r$ — целая оператор-функция со значениями $[L_p, W_p^1]$.) Из первого утверждения леммы 1 и из формулы (49) вытекает второе ее утверждение.

В этом пункте вместе с однородным уравнением (1) будем рассматривать также неоднородное уравнение

$$x^{(n)}(t) + (Fx)(t) + \rho^n x(t) = f(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{52}$$

предполагая, что оператор $F \in [H_{n+s}^{n+s-1/p}, W_p^s]$, а функция $f \in W_p^s$. Решением уравнения (52) называется функция $x \in W_p^{n+s}$, удовлетворяющая (при $s = 0$

почти всюду) тождеству (52). Отметим, что в силу условий $f \in W_p^s$, $F \in [H_{n+s}^{n+s-1/p}, W_p^s]$ и утверждения 1 требование $x \in W_p^{n+s}$ относительно решения x уравнения (52) является вполне естественным.

Следующая лемма устанавливает связь решений x уравнения (52) с решениями y простейшего однородного уравнения $y^{(n)} + \rho^n y = 0$.

Лемма 2. *При фиксированном* $\rho \neq 0$ *уравнение* (52) *имеет решение* x *в том и только в том случае, когда для произвольного* $r = 1, \ldots, n w_n$ *найдется такое решение* y *уравнения* (2), *для которого*

$$x(t) = [Q_s(\rho)_r g](t) + y(t), \tag{53}$$

а функция $g \in W_p^s$ *удовлетворяет неоднородному функциональному уравнению*

$$g(t) + [FQ_s(\rho)_r g](t) = -(Fy)(t) + f(t). \tag{54}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $x \in W_p^{n+s}$ является решением уравнения (52) при $\rho \neq 0$. Введем функцию $g = x^{(n)} + \rho^n x \in W_p^s$. Согласно лемме 1 функция $x_0(t) = [Q_s(\rho)_r g](t)$ удовлетворяет уравнению $x_0^{(n)} + \rho^n x_0 = g$, поэтому функция $y = x - x_0$ удовлетворяет однородному уравнению (2). Тем самым установлено соотношение (53). Учитывая это соотношение и определение функции $g = x^{(n)} + \rho^n x$, от уравнения (52) переходим к уравнению (54).

Достаточность. Отметим, что решение y однородного уравнения (2) бесконечно дифференцируемо, а согласно лемме 1 функция $[Q_s(\rho)_r g](t) \in W_p^{n+s}$ при произвольном $r = 1, \ldots, n w_n$ и $\rho \neq 0$. Поэтому функция x, удовлетворяющая соотношению (53), принадлежит пространству W_p^{n+s}. Из соотношения (53) и леммы 1 следует $x^{(n)} + \rho^n x = g$, а из (53) и (54) вытекает тождество $g = -Fx + f$, а значит, функция x является решением уравнения (52).

Основной в данном пункте является следующая теорема, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между решениями x уравнения (52) и решениями y уравнения (2) в предположении об обратимости оператора $I + FQ_s(\rho)_r$ в пространстве W_p^s. Здесь и далее через I обозначен тождественный оператор в пространстве W_p^s, а функция f и оператор F те же, что и в уравнении (52), т. е. $f \in W_p^s$ и $F \in [H_{n+s}^{n+s-1/p}, W_p^s]$. Кроме того, далее часто один и тот же оператор A приходится рассматривать как оператор, действующий в различных функциональных пространствах $\mathfrak{B}_\alpha$. Поэтому в тех случаях, когда это может вызвать недоразумение, символ $A_{\mathfrak{B}_{\alpha_1}}^{-1}$ означает обратный оператор к оператору A в пространстве $\mathfrak{B}_\alpha$ при значении $\alpha = \alpha_1$.

Теорема 3. *Пусть при некотором* $r = 1, \ldots, n w_n$ *и* $\rho_0 \neq 0$ *оператор* $I + FQ_s(\rho)_r$ *обратим в пространстве* W_p^s. *Тогда существует такое число* $\delta > 0$, *что оператор* $I + FQ_s(\rho)_r$ *обратим при* $\rho \in U_\delta(\rho_0) := \{\rho : |\rho - \rho_0| < \delta\}$ *и формула*

$$x(\rho; t) = y(\rho; t) - Q_s(\rho)_r (I + FQ_s(\rho)_r)_{W_p^s}^{-1} F y(\rho; t) +$$

$$+ \left[Q_s(\rho)_r (I + FQ_s(\rho)_r)_{W_p^s}^{-1} f\right](t), \quad \rho \in U_\delta(\rho_0), \tag{55}$$

задает взаимно однозначное соответствие между решениями $y(\rho;\, t)$ уравнения (2) *и решениями $x(\rho; t)$ уравнения* (52).

Кроме того, в формуле (55) *функция $x(\rho;\, \cdot)$, рассмотренная как вектор-функция аргумента $\rho \in U_\delta(\rho_0)$ со значениями в пространстве W_p^{n+s}, является аналитической в том и только в том случае, когда решение $y(\rho;\, \cdot)$ уравнения* (2), *рассмотренное как вектор-функция аргумента $\rho \in U_\delta(\rho_0)$ со значениями в пространстве W_p^{n+s}, является аналитической по ρ вектор-функцией.*

Доказательство. Из утверждения 1, леммы 1 и из предположения $F \in [H_{n+s}^{n+s-1/p},\, W_p^s]$ следует, что функция $FQ_s(\rho)_r$ принимает значения в пространстве $[W_p^s]$ и является аналитической по $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Поэтому, если оператор $I + FQ_s(\rho)_r$ обратим в пространстве W_p^s при некотором $\rho = \rho_0$ и $\rho_0 \neq 0$, то он является обратимым и в некоторой окрестности $U_\delta(\rho_0)$ точки ρ_0, а оператор-функция $(I + FQ_s(\rho)_r)_{W_p^s}^{-1}$ аналитична по $\rho \in U_\delta(\rho_0)$.

Чтобы установить соответствие (55), воспользуемся леммой 2. Учитывая обратимость оператора $I + FQ_s(\rho)_r$ в пространстве W_p^s при $\rho \in U_\delta(\rho_0)$, заключаем, что для любого решения $y(\rho;\, t)$ уравнения (2) и любой функции $f \in W_p^s$ функция

$$g(t) = g(\rho; t) = -(I + FQ_s(\rho)_r)_{W_p^s}^{-1} Fy(\rho; t) + (I + FQ_s(\rho)_r)_{W_p^s}^{-1} f(t) \tag{56}$$

определена при $\rho \in U_\delta(\rho_0)$ и удовлетворяет равенству (54). Подставляя найденную функцию в правую часть равенства (53), получаем функцию $x(\rho;\, t)$, заданную формулой (55), которая согласно утверждению о достаточности из леммы 2 является решением уравнения (52). Тем самым каждому решению y уравнения (2) правилом (55) поставлено в соответствие решение x уравнения (52).

Покажем взаимную однозначность соответствия (55). Для этого вначале установим, что для каждого решения $x(\rho;\, t)$ уравнения (52) при $\rho \in U_\delta(\rho_0)$ найдется такое решение $y(\rho; t)$ уравнения (2), что функции $x(\rho; t)$ и $y(\rho; t)$ связаны тождеством (55). Учитывая утверждение о необходимости, из леммы 2 имеем: для каждого решения $x(\rho; t)$ уравнения (52) найдутся такие функции $g \in W_p^s$ и $y \in W_p^{n+s}$, что y является решением уравнения (2) и функции g, x и y удовлетворяют тождествам (53) и (54). Из обратимости оператора $I + FQ_s(\rho)_r$ в пространстве W_p^s при $\rho \in U_\delta(\rho_0)$ и из тождества (54) заключаем, что функция g определяется равенством (56), подставляя которое в правую часть тождества (53), получаем соответствие (55). Тем самым для каждого решения x уравнения (52) найдено нужное решение y уравнения (2).

Итак, осталось показать однозначность соответствия (55), т. е. установить, что по решению x уравнения (52) и по функции f решение y уравнения (2) определяется однозначно. Предположим противное, т. е. предположим, что найдутся два не равных между собой решения $y_1(\rho; t)$ и $y_2(\rho; t)$ уравнения (2), подставляя которые в формулу (55) вместо функции $y(\rho; t)$, получаем одно и то же решение $x(\rho; t)$ уравнения (52). Тогда, вычитая при различных $y(\rho; t) = y_1(\rho; t)$ и $y(\rho; t) = y_2(\rho; t)$ левые и правые части равенства (55), заключаем, что найдется такое отличное от нулевого решение $y_0(\rho;\, t) = y_1(\rho;\, t) -$

$-y_2(\rho;t)$ уравнения (2), представимое в виде $y_0(\rho;t)=[\,Q_s(\rho)_r\, g\,](t)$ с функцией $g(t)=g(\rho;t)=(I+FQ_s(\rho)_r)^{-1}_{W_p^s}\,Fy_0(\rho;t)\in W_p^s$. Из определения функции $y_0(\rho;t)$ и из леммы 1 вытекает тождество $\partial_t^n y_0(\rho;t)+\rho^n y_0(\rho;t)=g(t)$, а по предположению $\partial_t^n y_0(\rho;t)+\rho^n y_0(\rho;t)=0$, т. е. функция $g(t)\equiv 0$, а значит, и функция $y_0(\rho;t)\equiv 0$. Тем самым показано, что $y_1(\rho;t)=y_2(\rho;t)$, $0\le$ $\le t\le 1$. Из полученного противоречия и следует взаимная однозначность соответствия (55).

И наконец, установим свойства аналитичности по ρ функций $x(\rho;t)$ и $y(\rho;t)$, сформулированные в последнем утверждении теоремы.

Пусть функция $y(\rho;\cdot)$ со значениями в W_p^{n+s} является аналитической по $\rho\in U_\delta(\rho_0)$. Тогда аналитичность функции $x(\rho;\cdot)$ со значениями в W_p^{n+s} по $\rho\in U_\delta(\rho_0)$ вытекает из представления (55), леммы 1 и из установленной аналитичности функции $(I+FQ_s(\rho)_r)^{-1}_{W_p^s}$ со значениями в $[\,W_p^s\,]$ по $\rho\in U_\delta(\rho_0)$.

Пусть теперь функция $x(\rho;\cdot)$, являющаяся решением уравнения (52), аналитична по $\rho\in U_\delta(\rho_0)$. Тогда, как было показано, найдется такое решение $y(\rho;t)$ уравнения (2), что функции $x(\rho;t)$ и $y(\rho;t)$ связаны равенством (53) с некоторой функцией $g(t)=g(\rho;t)$. Отсюда и из леммы 1 следует тождество $g(\rho;t)=\partial_t^n x(\rho;t)+\rho^n x(\rho;t)$, поэтому функция $g(\rho;\cdot)$, рассмотренная как вектор-функция аргумента $\rho\in U_\delta(\rho_0)$ со значениями в пространстве W_p^s, является аналитической. Используя это свойство вектор-функции $g(\rho;\cdot)$, предположение об аналитичности по $\rho\in U_\delta(\rho_0)$ вектор-функции $x(\rho;\cdot)$ со значениями в W_p^{n+s} и лемму 1, из равенства (53) получаем аналитичность по $\rho\in U_\delta(\rho_0)$ вектор-функции $y(\rho;\cdot)$ со значениями в W_p^{n+s}. (Заметим, что при доказательстве этого свойства не использовалась обратимость оператора $I+FQ_s(\rho)_r$ в пространстве W_p^{n+s}.)

Тем самым теорема 3 доказана.

Замечание **1.** Теорему 3 легко сформулировать и в случае, когда оператор F и правая часть уравнения (52) зависят от ρ. В частности, функция $x(\rho;\cdot)$ со значениями в W_p^{n+s} аналитична по $\rho\in U_\delta(\rho_0)$ в том и только в том случае, когда функции $f(\rho;\cdot)$ и $y(\rho;\cdot)$ со значениями соответственно в пространствах W_p^s и W_p^{n+s} являются аналитическими по $\rho\in U_\delta(\rho_0)$. Достаточность в этом утверждении является следствием формулы (55), а необходимость устанавливается точно так же, как и необходимость в теореме 3 с использованием тождества (53). Отметим, что в доказательстве необходимости не используется обратимость оператора $I+FQ_s(\rho)_r$ в пространстве W_p^s при $\rho\in U_\delta(\rho_0)$.

Следующий пример показывает, что условие обратимости оператора $I+$ $+FQ_s(\rho)_r$ в теореме 3 является достаточным, но не необходимым, для существования при $\rho=\rho_0$ фундаментальной системы решений уравнения (1), состоящей ровно из n функций.

***Пример* 2.** Уравнение $x''(t)+x(0)+\rho^2 x(t)=0$ записывается в виде (1) с оператором $(Fx)(t)=x(0)$, который принадлежит, например, множеству $[\,H,$ $W_p^s\,]$, т. е. удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 при произвольном $s=0,1,\ldots$ и при $\gamma=0$. При любом $\rho\in\mathbb{C}$ это уравнение имеет ровно два линейно независимых решения, в частности, ими будут $x_1(\rho; t) = e^{i\rho t} - (1+\rho^2)^{-1}$, $x_2(\rho; t) = e^{-i\rho t} - (1+\rho^2)^{-1}$ при $\rho \neq 0$, $\rho \neq \pm i$ и $x_1(0; t) = t$, $x_2(0; t) = t^2 - 2$, а $x_1(\pm i; t) = e^{-t} - e^{t}$, $x_2(\pm i; t) = 1$. В данном случае, если угол Ξ_1 совпадает с полуплоскостью $\Xi_1 = \{\rho : \operatorname{Im}\rho > 0\}$, соответствующий оператор $[FQ_0(\rho)_1 g](t) = (-i/2\rho) \int_0^1 e^{i\rho\tau} g(\tau) d\tau$. Поэтому оператор $I + FQ_0(\rho)_1$ необратим в бесконечном числе точек ρ, являющихся нулями уравнения $2\rho^2 + 1 - e^{i\rho} = 0$.

5. Доказательство теорем об асимптотике фундаментальной системы решений уравнения (1) опирается на приведенные далее оценки нормы преобразования $Q_s(\rho)_r$, рассмотренного как оператор, действующий из пространства W_p^s в пространство W_q^l или в пространство H^{μ}. При этом будет использовано неравенство

$$\| e^{-\sigma t} \|_q \leq \frac{2e^{\xi}}{(1+q|\sigma|)^{1/q}}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \xi \geq 0, \quad \sigma \geq -\xi, \tag{57}$$

в котором $(1+q|\sigma|)^{1/q} := 1$, если $q = \infty$.

Кроме того, потребуются следующие оценки функции $\varphi(\rho; p)$, заданной формулой (15):

$$2^{-1} |\rho|^{-1/p} \leq \varphi(\rho; p) \leq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad |\rho| \geq 1. \tag{58}$$

Действительно, при $|\rho| \geq 1$ и $1 \leq p < \infty$ имеем $1 + p|\operatorname{Re}\rho| \leq (1+p)|\rho|$, а значит,

$$\frac{1}{|\rho|^{1/p}} \leq \frac{(1+p)^{1/p}}{(1+p|\operatorname{Re}\rho|)^{1/p}} \leq \frac{2}{(1+p|\operatorname{Re}\rho|)^{1/p}}, \quad |\rho| \geq 1, \tag{59}$$

откуда и из определения (15) функции $\varphi(\rho; p)$ получаем первое из неравенств в (58). Второе из этих неравенств очевидно.

Лемма 3. *Пусть преобразования*

$$[J^+(\rho) g](t) = \int_t^1 e^{\rho(t-\tau)} g(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{60}$$

$$[J^-(\rho) g](t) = \int_0^t e^{-\rho(t-\tau)} g(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{61}$$

числа p, q и α удовлетворяют требованиям (17), *а* $\xi \geq 0$. *Тогда при* $\operatorname{Re}\rho \geq -\xi$ *с* $|\rho| \geq 1$ *справедливы неравенства*

$$\| J^{\pm}(\rho) \|_{[L_p, L_q]} \leq \frac{2e^{\xi}}{(1+\alpha|\operatorname{Re}\rho|)^{1/\alpha}}, \tag{62}$$

$$\| [J^{\pm}(\rho) g](\cdot) \|_{H_0^{\nu}} \leq \frac{6e^{\xi}|\rho|^{\nu} \|g\|_p}{(1+p'|\operatorname{Re}\rho|)^{1/p'}}, \quad 0 \leq \nu \leq 1/p', \tag{63}$$

$$\left\| \int_0^t [J^{\pm}(\rho) g](\zeta) d\zeta \right\|_{H_0^{\nu}} \leq \frac{8e^{\xi}|\rho|^{\nu-1} \|g\|_p}{(1+p'|\operatorname{Re}\rho|)^{1/p'}}, \quad 1/p' \leq \nu \leq 1, \tag{64}$$

причем функция $g \in L_p$ и при $\alpha = \infty$ или $p' = \infty$ в неравенствах (62) – (64) *считаем* $(1+\alpha|\operatorname{Re}\rho|)^{1/\alpha} := 1$ *или* $(1+p'|\operatorname{Re}\rho|)^{1/p'} := 1$.

Доказательство неравенств (62) – (64) проведем лишь для преобразования $J^+(\rho)$ (для преобразования $J^-(\rho)$ оно аналогично). Кроме того, везде далее считаем $\mathrm{Re}\,\rho \ge -\xi$, $|\rho| \ge 1$ и $\xi \ge 0$.

Для получения оценки (62) потребуется следующий частный случай неравенства Юнга (см., например, [16, с. 162]): пусть величины p, q и α связаны требованиями (17), а функции $f \in L_\alpha$ и $g \in L_p$, тогда функция $a(t) = \int_t^1 f(\tau - t)\, g(\tau)\, d\tau$ принадлежит пространству L_q и $\|a\|_q \le \|f\|_\alpha \|g\|_p$. Применяя это неравенство к преобразованию $J^+(\rho)$, имеем $\|[J^+(\rho)g](\cdot)\|_q \le \|e^{-t\mathrm{Re}\rho}\|_\alpha \|g\|_p$, откуда и из оценки (57) вытекает неравенство (62).

Далее потребуется неравенство

$$|1 - e^{-z}| \le 2e^{\xi}|z|^{\beta}, \quad 0 \le \beta \le 1, \quad \xi \ge 0, \quad \mathrm{Re}\,\rho \ge -\xi. \tag{65}$$

Для доказательства его рассмотрим аналитическую и ограниченную в полуплоскости $\{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ функцию $\psi(z) = z^{-\beta}(1 - e^{-z})$, где $z^{\beta} = |z|^{\beta}\exp(i\beta \arg z)$, а $-\pi < \arg z \le \pi$. На мнимой оси, т. е. при $z = i\tau$, эта функция непрерывна и $|\psi(i\tau)| = 2|\tau|^{-\beta}|\sin(\tau/2)| = 2^{1-\beta}|\tau/2|^{-\beta}|\sin(\tau/2)| \le 2^{1-\beta}$, откуда, применяя принцип максимума модуля к аналитической в полуплоскости $\{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ функции $\psi(z)$, получаем оценку (65) при $\mathrm{Re}\, z \ge 0$, т. е. при $\xi = 0$. Если же $\xi > 0$ и $-\xi \le \mathrm{Re}\, z \le 0$, то из оценки (65), установленной при $\xi = 0$, имеем $|1 - e^{-z}| = e^{-\mathrm{Re} z}|1 - e^{z}| \le 2e^{\xi}|-z|^{\beta}$; тем самым оценка (65) установлена и в общем случае: $\mathrm{Re}\, z \ge -\xi$.

Из вида (60) преобразования $J^+(\rho)$ следует

$$[J^+(\rho)g](t+\delta) - [J^+(\rho)g](t) = (1 - e^{-\delta\rho})[J^+(\rho)g](t+\delta) - \\ - \int_t^{t+\delta} e^{\rho(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau, \quad 0 \le t < t + \delta \le 1. \tag{66}$$

Записывая тождество

$$(1 - e^{-\delta\rho})[J^+(\rho)g](t+\delta) = \int_{t+\delta}^{1} \left(e^{\rho(t+\delta-\tau)} - e^{\rho(t-\tau)}\right) g(\tau)\, d\tau$$

и замечая, что согласно оценке (65) $\left|e^{\rho(t+\delta-\tau)} - e^{\rho(t-\tau)}\right| \le 2\delta^{\nu}|\rho|^{\nu}|e^{\rho(t-\tau)}|$, если $-\xi \le \mathrm{Re}\,\rho \le 0$ и $\xi > 0$, из неравенства Гельдера и из оценки (57) имеем

$$|(1 - e^{-\delta\rho})[J^+(\rho)g](t+\delta)| \le \frac{4e^{\xi}\delta^{\nu}|\rho|^{\nu}\|g\|_p}{(1 + p'|\mathrm{Re}\rho|)^{1/p'}}. \tag{67}$$

Для $\mathrm{Re}\,\rho \ge 0$ (т. е. при $\xi = 0$) эта оценка непосредственно вытекает из оценок (62) и (65).

Установим теперь, что

$$\|e^{-\rho t}\|_{L_{p'}[0,\delta]} \le \frac{2e^{\xi}\delta^{\nu}|\rho|^{\nu}}{(1 + p'|\mathrm{Re}\rho|)^{1/p'}}, \quad 0 < \delta \le 1, \quad 0 \le \nu \le 1/p'. \tag{68}$$

Используя оценку (57) и предположение о $0 < \delta \le 1$, находим

$$\|e^{-\rho t}\|_{L_{p'}[0,\delta]} = \delta^{1/p'}\|e^{-\delta\rho t}\|_{p'} \le \frac{2e^{\xi}\delta^{1/p'}}{(1 + p'\delta|\mathrm{Re}\rho|)^{1/p'}} \le \frac{2e^{\xi}}{(1 + p'|\mathrm{Re}\rho|)^{1/p'}},$$

поэтому оценка (68) установлена в случае $\delta \ge |\rho|^{-1}$. Так как $\|e^{-\rho t}\|_{L_{p'}[0,\delta]} \le$ $\le e^{\xi}\delta^{1/p'}$, то, используя неравенства (59) при значении p, равном p', имеем

$$\|e^{-\rho t}\|_{L_{p'}[0,\delta]} \le \frac{2e^{\xi}\,\delta^{1/p'}\,|\rho|^{1/p'}}{(1+p'|\mathrm{Re}\rho|)^{1/p'}},$$

откуда и следует оценка (68) в случае $0<\delta\le|\rho|^{-1}$.

Из тождества (66), оценок (67), (68) и неравенства Гельдера получаем соотношения

$$|[J^{+}(\rho)g](t+\delta)-[J^{+}(\rho)g](t)| \le \frac{4e^{\xi}\delta^{\nu}\,|\rho|^{\nu}\|g\|_p}{(1+p'|\mathrm{Re}\rho|)^{1/p'}} +$$

$$+\|e^{-\rho t}\|_{L_{p'}[0,\delta]}\|g\|_p \le \frac{6e^{\xi}\delta^{\nu}\,|\rho|^{\nu}\|g\|_p}{(1+p'|\mathrm{Re}\rho|)^{1/p'}},$$

из которых и определения (8) полунормы $\|\cdot\|_{H_0^{\nu}}$ следует утверждение (63) леммы 3 для преобразования $J^{+}(\rho)$.

Для доказательства неравенства (64) определим интегральное преобразование

$$[J(\rho)g](t) = \int_t^1 (e^{\rho(t-\tau)}-1)g(\tau)d\tau, \quad 0\le t\le 1,$$

для которого справедливы тождества

$$\int_0^t [J^{+}(\rho)g](\zeta)d\zeta = \int_0^1 [J^{+}(\rho)g](\zeta)d\zeta + \frac{1}{\rho}[J(\rho)g](t), \tag{69}$$

$$[J(\rho)g](t+\delta)-[J(\rho)g](t) = (1-e^{-\delta\rho})[J^{+}(\rho)g](t+\delta)+$$

$$+\int_t^{t+\delta}(1-e^{\rho(t-\tau)})g(\tau)d\tau, \quad 0\le t<t+\delta\le 1. \tag{70}$$

Отметим, что первое слагаемое в правой части равенства (70) оценено в неравенстве (67). Для оценки второго слагаемого воспользуемся неравенством (65) при значении $\beta=\nu-1/p'$, а далее применим неравенство Гельдера и получим соотношения

$$\left|\int_t^{t+\delta}(1-e^{\rho(t-\tau)})g(\tau)d\tau\right| \le 2e^{\xi}|\rho|^{\nu-1/p'}\int_t^{t+\delta}|t-\tau|^{\nu-1/p'}|g(\tau)|d\tau \le$$

$$\le 2e^{\xi}|\rho|^{\nu-1/p'}\left(\int_0^{\delta}\tau^{p'\nu-1}d\tau\right)^{1/p'}\|g\|_p = 2e^{\xi}(p'\nu)^{-1/p'}\delta^{\nu}|\rho|^{\nu-1/p'}\|g\|_p,$$

причем при $p'=\infty$ множитель $(p'\nu)^{-1/p'} := 1$, а так как в (64) $p'\nu\ge 1$, то при $1\le p'<\infty$ этот множитель меньше или равен единице. Отсюда, воспользовавшись при p, равном p', неравенствами (59) для оценки величины $|\rho|^{-1/p'}$, из полученных соотношений заключаем, что

$$\left|\int_t^{t+\delta}(1-e^{\rho(t-\tau)})g(\tau)d\tau\right| \le \frac{4e^{\xi}\delta^{\nu}|\rho|^{\nu}\|g\|_p}{(1+p'|\mathrm{Re}\rho|)^{1/p'}}, \quad \mathrm{Re}\rho\ge-\xi, \quad |\rho|\ge 1.$$

Из этой оценки, оценки (67) и равенства (70) следует неравенство

$$\|[J(\rho)g](\cdot)\|_{H_0^\nu} \le \frac{8e^{\xi}|\rho|^{\nu}\|g\|_p}{(1+p'|\operatorname{Re}\rho|)^{1/p'}}, \quad \operatorname{Re}\rho \ge -\xi, \quad |\rho| \ge 1. \tag{71}$$

Согласно равенству (69) функция $\int_0^t [J^+(\rho)g](\zeta)\,d\zeta$ отличается от функции $\rho^{-1}[J(\rho)g](t)$ на постоянную (зависящую лишь от функции g, а не от переменной t), поэтому их полунормы в пространстве H_0^ν совпадают. Отсюда и из оценки (71) вытекает неравенство (64) для преобразования $J^+(\rho)$.

Тем самым лемма 3 доказана.

Используя определения (43), (60) и (61) преобразований $R_m(\rho)_r$, $J^+(\rho)$ и $J^-(\rho)$, получаем представление

$$R_m(\rho)_r = \frac{1}{n}\sum_{j\in\Lambda_r^+}\omega_j^{1-m}J^+(\rho\omega_j) - \frac{1}{n}\sum_{j\in\Lambda_r^-}\omega_j^{1-m}J^-(-\rho\omega_j),$$

а так как количество индексов в объединении множеств Λ_r^+ и Λ_r^- равно n, то из оценок (62) – (64), определений (4), (5) и (15) множеств индексов $\Lambda_r^{\pm}$, областей $(\Xi_r)_\xi$ и функции $\varphi(\rho; p)$ вытекает следующее утверждение об оценке нормы преобразования $R_m(\rho)_r$.

Лемма 4. *Пусть числа p, q и α удовлетворяют требованиям* (17), *индекс $r = 1, \ldots, n w_n$, m — целое число, а $\xi \ge 0$. Тогда для преобразования $R_m(\rho)_r$, заданного равенством* (43), *справедливы оценки*

$$\|R_m(\rho)_r\|_{[L_p, L_q]} \le 2e^{\xi}\varphi(\rho;\alpha), \tag{72}$$

$$\|[R_m(\rho)_r g](\cdot)\|_{H_0^\nu} \le 6e^{\xi}|\rho|^{\nu}\varphi(\rho;p')\|g\|_p, \quad 0 \le \nu \le 1/p', \tag{73}$$

$$\left\|\int_0^t [R_m(\rho)_r g](\zeta)\,d\zeta\right\|_{H_0^\nu} \le 8e^{\xi}|\rho|^{\nu-1}\varphi(\rho;p')\|g\|_p, \quad 1/p' \le \nu \le 1, \tag{74}$$

при параметре $\rho \in (\Xi_r)_\xi$ с $|\rho| \ge 1$, причем в (73) *и* (74) *функция $g \in L_p$.*

Считая числа p, q и α удовлетворяющими требованиям (17), введем на функциях $g \in W_p^s$ новую норму

$$\|g\|_{W_{p,q}^s(\rho)} := \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\|g^{(k)}\|_q}{|\rho|^k} + \varphi(\rho;\alpha)\frac{\|g^{(s)}\|_p}{|\rho|^{s-1}}, \quad |\rho| \ge 1, \tag{75}$$

считая при этом $\|g\|_{W_{p,q}^0(\rho)} := |\rho|\,\varphi(\rho;\alpha)\|g\|_p$, $|\rho| \ge 1$.

В силу утверждения 1 норма $\|\cdot\|_{W_{p,q}^s(\rho)}$ при каждом фиксированном ρ с $|\rho| \ge 1$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{W_p^s}$. Пространство W_p^s, наделенное нормой (75), будем обозначать через $W_{p,q}^s(\rho)$.

Из определения (75) нормы $\|\cdot\|_{W_{p,q}^s(\rho)}$ вытекает неравенство

$$\|g^{(l)}\|_{W_{p,q}^{s-l}(\rho)} \le |\rho|^l\|g\|_{W_{p,q}^s(\rho)}, \quad g \in W_p^s, \quad l = 0, \ldots, s, \quad |\rho| \ge 1. \tag{76}$$

Следующая лемма посвящена оценкам нормы преобразования $Q_s(\rho)_r$, рассмотренного как оператор, действующий из пространства $W_{p,q}^s(\rho)$ в пространство W_q^l или H_{n+s}^μ.

Лемма 5. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$, *индекс* $r = 1, \dots, n w_n$, *а* $\xi \ge 0$. *Тогда для преобразования* $Q_s(\rho)_r$, *заданного равенством* (46), *справедливы оценки*

$$\|Q_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,q}(\rho), W^l_q]} \le 6e^{\xi}|\rho|^{l-n}, \quad l = 0, \dots, n+s-1, \tag{77}$$

$$\|Q_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,q}(\rho), H^{\mu}_{n+s}]} \le 24e^{\xi}|\rho|^{\mu-n+1/q}, \quad 0 \le \mu \le n+s-1/p, \tag{78}$$

при параметре $\rho \in (\Xi_r)_\xi$ *с* $|\rho| \ge 1$, *причем при* $p = q$ *оценка* (77) *справедлива при* $l = n + s$.

Доказательство. Далее считаем, что $\rho \in (\Xi_r)_\xi$ и $|\rho| \ge 1$. Согласно определениям (46) и (75) преобразования $Q_s(\rho)_r$ и нормы $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}(\rho)}$ с учетом оценки (72) имеем

$$\|[Q_s(\rho)_r g](\cdot)\|_q \le 2e^{\xi}|\rho|^{-n}\|g\|_{W^s_{p,q}(\rho)},$$

откуда, воспользовавшись правилом (48) дифференцирования по t функции $[Q_s(\rho)_r g](t)$ и неравенством (76), получаем

$$\|\partial^l_t [Q_s(\rho)_r g](t)\|_q \le 2e^{\xi}|\rho|^{l-n}\|g\|_{W^s_{p,q}(\rho)}, \quad l = 0, \dots, s. \tag{79}$$

Чтобы установить аналогичную оценку при $l > s$, примем во внимание формулы (44), (47) и (48), на основании которых

$$\partial^{l+s}_t [Q_s(\rho)_r g](t) = \rho^{l-n+1}[R_{-l}(\rho)_r g^{(s)}](t), \quad l = 0, \dots, n-1,$$

откуда с учетом оценки (72) имеем

$$\|\partial^{l+s}_t [Q_s(\rho)_r g](t)\|_q \le 2e^{\xi}|\rho|^{l-n+1}\varphi(\rho;\alpha)\|g^{(s)}\|_p, \quad l = 0, \dots, n-1, \tag{80}$$

а учитывая определение (75) нормы $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}(\rho)}$, —

$$\|\partial^{l+s}_t [Q_s(\rho)_r g](t)\|_q \le 2e^{\xi}|\rho|^{l+s-n}\|g\|_{W^s_{p,q}(\rho)}, \quad l = 0, \dots, n-1. \tag{81}$$

Для получения аналогичной оценки при $l = n + s$ и $p = q$ воспользуемся тождествами (47), (51), первой из оценок в (58) в случае $p = 1$ и оценкой (72) при $p = q$. В результате этого получим неравенство

$$\|\partial^{n+s}_t [Q_s(\rho)_r g](t)\|_p \le 4e^{\xi}|\rho|\varphi(\rho;1)\|g^{(s)}\|_p, \tag{82}$$

из которого и из определения (75) нормы $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}(\rho)}$ будем иметь

$$\|\partial^{n+s}_t [Q_s(\rho)_r g](t)\|_p \le 4e^{\xi}|\rho|^s\|g^{(s)}\|_{W^s_{p,q}(\rho)}.$$

Эта оценка и оценки (79), (81) показывают справедливость неравенства (77).

Установим теперь неравенство (78).

Из определения (15) функции $\varphi(\rho;p)$ вытекает, что для чисел p, q и α, связанных требованиями (17), справедливо неравенство $\varphi(\rho;p')\varphi(\rho;q) \le \le \varphi(\rho;\alpha)$, $\rho \in \mathbb{C}$, откуда с учетом первой оценки в (58) имеем

$$|\rho|^{-1/q}\varphi(\rho;p') \le 2\varphi(\rho;\alpha), \quad |\rho| \ge 1. \tag{83}$$

Используя определение (46) преобразования $Q_s(\rho)_r$ и оценку (72) при значении $q = \infty$, выводим неравенство

$$\|[Q_s(\rho)_r g](\cdot)\|_H \le \frac{1}{|\rho|^n}\left(\sum_{k=0}^{[s-1]_n}\frac{\|g^{(kn)}\|_H}{|\rho|^{kn}} + 2e^{\xi}\varphi(\rho;p')\frac{\|g^{(s)}\|_p}{|\rho|^{s-1}}\right). \tag{84}$$

Если число $k = 0, \ldots, [s-1]_n$ такое, что $kn < s-1$, то, применяя оценку (11) при значениях $p = q$ и $\delta = |\rho|^{-1}$, получаем неравенство

$$\| g^{(kn)} \|_H \le |\rho|^{1/q} (\| g^{(kn)} \|_q + |\rho|^{-1} \| g^{(kn+1)} \|_q).$$

Если же $s-1$ нацело делится на n, т. е. $[s-1]_n n = s-1$, то, применяя оценку (11) при значении $\delta = |\rho|^{-1}$ и учитывая требования (17), связывающие числа p, q и α, и первую оценку в (58), убеждаемся, что при $k = [s-1]_n$ справедливы неравенства

$$\| g^{(kn)} \|_H \le |\rho|^{1/q} (\| g^{(kn)} \|_q + |\rho|^{-1/\alpha} \| g^{(kn+1)} \|_p) \le$$

$$\le |\rho|^{1/q} (\| g^{(kn)} \|_q + 2\varphi(\rho; \alpha) \| g^{(s)} \|_p).$$

Подставляя полученные неравенства для $\| g^{(kn)} \|_H$ в правую часть неравенства (84) и учитывая оценку (83), выводим

$$\| [Q_s(\rho)_r g](\cdot) \|_H \le 6e^{\xi} |\rho|^{-n+(1/q)} \| g \|_{W^s_{p,q}(\rho)}. \tag{85}$$

Из этой оценки, принимая во внимание правило (48) дифференцирования по t функции $[Q_s(\rho)_r g](t)$ и неравенство (76), заключаем, что

$$\| \partial_t^l [Q_s(\rho)_r g](t) \|_H \le 6e^{\xi} |\rho|^{l-n+1/q} \| g \|_{W^s_{p,q}(\rho)}, \quad l = 0, \ldots, s. \tag{86}$$

Из оценки (80) при значении $q = \infty$ с учетом неравенства (83) и определения (75) нормы $\| \cdot \|_{W^s_{p,q}(\rho)}$ имеем

$$\| \partial_t^{l+s} [Q_s(\rho)_r g](t) \|_H \le 4e^{\xi} |\rho|^{l+s-n+1/q} \| g \|_{W^s_{p,q}(\rho)}, \quad l = 0, \ldots, n-1. \tag{87}$$

Отсюда и из оценки (86) с учетом мультипликативного неравенства (9) получаем неравенство (78) при всех $0 \le \mu \le n + s - 1$.

Покажем теперь справедливость неравенства (78) для значений μ, удовлетворяющих соотношениям $n + s - 1 < \mu \le n + s - 1/p$ при $p > 1$. Для этого последовательно воспользуемся тождествами (48), (47), (44) и оценкой (73). В результате получим соотношения

$$\| \partial_t^{n+s-1} [Q_s(\rho)_r g](t) \|_{H_0^\nu} = \| [R_{-n+1}(\rho)_r g](\cdot) \|_{H_0^\nu} \le$$

$$\le 6e^{\xi} |\rho|^{\nu} \varphi(\rho; p') \| g^{(s)} \|_p, \quad 0 \le \nu \le 1/p',$$

из которых с учетом оценки (83) и определения (75) нормы $\| \cdot \|_{W^s_{p,q}(\rho)}$ выводим

$$\| \partial_t^{n+s-1} [Q_s(\rho)_r g](t) \|_{H_0^\nu} \le 12 e^{\xi} |\rho|^{s+\nu-1+1/q} \| g \|_{W^s_{p,q}(\rho)}, \quad 0 \le \nu \le 1/p'.$$

Это неравенство, неравенства (85) и (87) при значении $l = n - 1$ доказывают справедливость (78) для значений μ с $n + s - 1 < \mu \le n + s - 1/p$ при $p > 1$.

Тем самым лемма 5 полностью доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Оценим норму оператора $FQ_s(\rho)_r$ в пространстве $W^s_{p,q}(\rho)$ при $\rho \in (\Xi_r)_\xi$. Для этого последовательно воспользуемся определениями (75) и (16) нормы $\| \cdot \|_{W^s_{p,q}(\rho)}$ и оператора $\partial^k F$, условиями (18), (19) и оценкой (78). В результате получим соотношения

$$\|FQ_s(\rho)_r g\|_{W^s_{p,q}(\rho)} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\|(\partial^k F)Q_s(\rho)_r g\|_q}{|\rho|^k} + \varphi(\rho;\alpha)\frac{\|(\partial^s F)Q_s(\rho)_r g\|_p}{|\rho|^{s-1}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{s-1} |\rho|^{-k} \|\partial^k F\|_{[H^{\gamma_k}, L_q]} \|Q_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,q}(\rho), H^{\gamma_k}]} + \right.$$

$$\left. + |\rho|^{1-s} \|\partial^s F\|_{[H^\gamma, L_q]} \|Q_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,q}(\rho), H^\gamma]} \right) \|g\|_{W^s_{p,q}(\rho)} \le$$

$$\le 24 e^{\xi} \left(\sum_{k=0}^{s-1} |\rho|^{\gamma_k - k - n + 1/q} \|\partial^k F\|_{[H^{\gamma_k}, L_q]} + \right.$$

$$\left. + |\rho|^{\gamma - n - s + 1 + 1/q} \|\partial^s F\|_{[H^\gamma, L_p]} \right) \|g\|_{W^s_{p,q}(\rho)},$$

откуда и из определений (20) и (21) чисел $c_q(F)$ и κ_q будем иметь

$$\|FQ_s(\rho)_r g\|_{W^s_{p,q}(\rho)} \le 24 e^{\xi} c_q(F) |\rho|^{-\kappa_q} \|g\|_{W^s_{p,q}(\rho)}. \tag{88}$$

Из этого неравенства и из определений (13) и (14) области $\Omega_r(c, \kappa)$ находим

$$\|FQ_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,q}(\rho)]} \le 1/2, \quad \rho \in \Omega_r(48 c_q(F), \kappa_q).$$

Следовательно, при $\rho \in \Omega_r(48 c_q(F), \kappa_q)$ оператор $I + FQ_s(\rho)_r$ обратим в пространстве $W^s_{p,q}(\rho)$. Но так как при каждом ρ с $|\rho| \ge 1$ нормы $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}(\rho)}$ и $\|\cdot\|_{W^s_p}$ эквивалентны, то оператор $I + FQ_s(\rho)_r$ обратим и в пространстве W^s_p и

$$\left\| (I + FQ_s(\rho)_r)^{-1}_{W^s_p} \right\|_{[W^s_{p,q}(\rho)]} \le 2, \quad \rho \in \Omega_r(48 c_q(F), \kappa_q). \tag{89}$$

Из обратимости оператора $I + FQ_s(\rho)_r$ в пространстве W^s_p при значениях $\rho \in \Omega_r(48 c_q(F), \kappa_q)$ вытекает, что при указанных ρ к уравнению (1) применима теорема 3. Полагая в утверждении (55) теоремы 3 функцию $f(t) \equiv 0$, а решение $y(\rho; t)$ уравнения (2) равным одной из функций $y_{j,r}(\rho; t)$, $j = 1, \ldots, n$, заданных формулами (6), получаем фундаментальную систему решений $x_{1,r}(\rho; t), \ldots, x_{n,r}(\rho; t)$ уравнения (1) и для нее согласно оценке (89) справедливы неравенства

$$\|x_{j,r}(\rho; \cdot) - y_{j,r}(\rho; \cdot)\|_{\mathfrak{B}} \le$$

$$\le 2 \|Q_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,q}(\rho), \mathfrak{B}]} \|F y_{j,r}(\rho; \cdot)\|_{W^s_{p,q}(\rho)}, \quad \rho \in \Omega_r(48 c_q(F), \kappa_q), \tag{90}$$

в которых функциональное пространство $\mathfrak{B} = W^l_q$ или $\mathfrak{B} = H^{\mu}_{n+s}$.

Оценим нормы функций $F y_{j,r}(\rho; \cdot)$ в пространстве $W^s_{p,q}(\rho)$, считая $\rho \in \in (\Xi_r)_\xi$ с $|\rho| \ge 1$. Последовательно используя определения (75) и (16) нормы $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}(\rho)}$ и оператора $\partial^k F$, условия (18), (19) и вторую из оценок в (28), как и при выводе неравенства (88), получаем

$$\|F y_{j,r}(\rho; \cdot)\|_{W^s_{p,q}(\rho)} \le$$

$$\le 4 e^{\xi} c_q(F) \left\{ \frac{1}{|\rho|^\beta} + \frac{\varphi(\rho;\alpha)}{|\rho|^{n+s-\gamma-1}} \right\} |\rho|^n, \quad \rho \in (\Xi_r)_\xi, \quad |\rho| \ge 1, \tag{91}$$

причем при $s=0$ слагаемое $|\rho|^{-\beta}$, находящееся в фигурных скобках в правой части этого неравенства, исчезает.

Подставляя оценку (91) в правую часть неравенства (90) и используя оценки (77) и (78), получаем соответственно утверждения (22) и (23) теоремы 1. Аналитичность по ρ так построенных решений $x_{j,r}(\rho;t)$ уравнения (1) вытекает из второго утверждения теоремы 3.

Тем самым теорема 1 доказана.

Пусть $1\le p\le q\le\infty$. На функциях $g\in W_p^s$ зададим новую норму

$$\|g\|_{W^s_{p,q}} := \sum_{k=0}^{s-1}\|g^{(k)}\|_q+\|g^{(s)}\|_p, \tag{92}$$

считая $\|g\|_{W^0_{p,q}} := \|g\|_p$. Очевидно, что

$$\|g\|_{W^s_{p,q}} \le \|g\|_{W^s_{p,\infty}},\quad g\in W_p^s, \tag{93}$$

$$\|g^{(l)}\|_{W^{s-l}_{p,q}} \le \|g\|_{W^s_{p,q}},\quad g\in W_p^s,\quad l=0,\dots,s. \tag{94}$$

В силу утверждения 1 и предположения о $p\le q$ норма $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{W^s_p}$. Пространство W_p^s, наделенное нормой $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}}$, будем обозначать через $W^s_{p,q}$.

Следующая лемма содержит оценки нормы преобразования $Q_s(\rho)_r$, рассмотренного как оператор, действующий из пространства $W^s_{p,q}$ в пространство W_q^l или H^{μ}_{n+s}.

Лемма 6. *Пусть числа p, q и α удовлетворяют требованиям* (17), *индекс $r=1,\dots,n\,w_n$, а $\xi\ge 0$. Тогда для преобразования $Q_s(\rho)_r$, заданного равенством* (46), *при параметре $\rho\in(\Xi_r)_\xi$ с $|\rho|\ge 1$ справедливы оценки*

$$\|Q_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,q},W^l_q]} \le 6e^{\xi}|\rho|^{-n}(1+|\rho|^{l-s+1}\varphi(\rho;\alpha)),\quad l=0,\dots,n+s-1, \tag{95}$$

и согласно неравенству (93)

$$\|Q_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,\infty},W^l_q]} \le 6e^{\xi}|\rho|^{-n}(1+|\rho|^{l-s+1}\varphi(\rho;\alpha)),\quad l=0,\dots,n+s-1, \tag{96}$$

причем при $p=q$, а значит, при $\alpha=1$, оценки (95) *и* (96) *справедливы и при $l=n+s$. Кроме того,*

$$\|Q_s(\rho)_r\|_{[W^s_{p,\infty},H^{\mu}_{n+s}]} \le 10e^{\xi}|\rho|^{-n}(1+|\rho|^{\mu-s+1}\varphi(\rho;p')),\quad 0\le\mu\le n+s-1/p. \tag{97}$$

Доказательство. Далее предполагаем, что $\rho\in(\Xi_r)_\xi$ и $|\rho|\ge 1$. Согласно определениям (46) и (92) преобразования $Q_s(\rho)_r$ и нормы $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}}$ с учетом оценки (72) имеем

$$\|Q_s(\rho)_r\,g\|_q \le 2e^{\xi}|\rho|^{-n}(1+|\rho|^{-s+1}\varphi(\rho;\alpha))\,\|g\|_{W^s_{p,q}},$$

откуда, используя правило (48) дифференцирования по t функции $[Q_s(\rho)_r\,g](t)$ и неравенство (94), получаем

$$\|\partial_t^l[Q_s(\rho)_r\,g](t)\|_q \le$$

$$\le 2e^{\xi}|\rho|^{-n}(1+|\rho|^{l-s+1}\varphi(\rho;\alpha))\,\|g\|_{W^s_{p,q}},\quad l=0,\dots,s.$$

Эта оценка, оценки (80) и (82), полученные в доказательстве леммы 5, показывают справедливость неравенства (95), а значит, и неравенства (96).

Установим теперь неравенство (97). Вначале рассмотрим случай $s=0$. Из равенств (44) и (47), воспользовавшись оценкой (72) при значении $q=\infty$ (а значит, при значении $\alpha = p'$), имеем

$$\| \partial_t^l [Q_0(\rho)_r g](t)\|_H \le$$
$$\le 2e^{\xi}|\rho|^{l-n+1}\varphi(\rho;p')\|g\|_p, \quad l=0,\ldots,n-1. \tag{98}$$

Если $n\ge 2$, то из этой оценки и из мультипликативного неравенства (9) получаем

$$\left\|\partial_t^l[Q_0(\rho)_r g](t)\right\|_{H_0^{\nu}} \le$$
$$\le 4e^{\xi}|\rho|^{l+\nu-n+1}\varphi(\rho;p')\|g\|_p, \quad l=0,\ldots,n-2, \quad 0\le\nu\le 1. \tag{99}$$

Из равенств (44), (47) и из оценки (73) выводим неравенство

$$\left\|\partial_t^{n-1}[Q_0(\rho)_r g](t)\right\|_{H_0^{\nu}} \le 6e^{\xi}|\rho|^{\nu}\varphi(\rho;p')\|g\|_p, \quad 0\le\nu\le 1/p',$$

из которого с учетом оценок (98) и (99) вытекает неравенство (97) в случае $s= = 0$.

Пусть теперь $s\ge 1$. Согласно определениям (46) и (92) преобразования $Q_s(\rho)_r$ и нормы $\|\cdot\|_{W_{p,\infty}^s}$ с учетом оценки (72) имеем

$$\|[Q_s(\rho)_r g](\cdot)\|_H \le 2e^{\xi}|\rho|^{-n}\|g\|_{W_{p,\infty}^s}, \tag{100}$$

откуда, учитывая правило (48) дифференцирования по t функции $[Q_s(\rho)_r g](t)$ и неравенство (94), заключаем, что

$$\|\partial_t^l[Q_s(\rho)_r g](t)\|_H \le 2e^{\xi}|\rho|^{-n}\|g\|_{W_{p,\infty}^s}, \quad l=0,\ldots,s-1. \tag{101}$$

Если $s\ge 2$, то из этой оценки и мультипликативного неравенства (9) получаем

$$\left\|\partial_t^l[Q_s(\rho)_r g](t)\right\|_{H_0^{\nu}} \le 4e^{\xi}|\rho|^{-n}\|g\|_{W_{p,\infty}^s}, \quad l=0,\ldots,s-2, \quad 0\le\nu\le 1. \tag{102}$$

Из равенств (46) и (48) вытекают тождества

$$\partial_t^{s-1}[Q_s(\rho)_r g](t) = [Q_1(\rho)_r g^{(s-1)}](t) = \frac{g^{(s-1)}(t)}{\rho^n} + \frac{[R_1(\rho)_r g^{(s)}](t)}{\rho^n},$$

из которых и из неравенств (10) и (73) следует оценка

$$\left\|\partial_t^{s-1}[Q_s(\rho)_r g](t)\right\|_{H_0^{\nu}} \le$$
$$\le |\rho|^{-n}(1+6e^{\xi}|\rho|^{\nu}\varphi(\rho;p'))\|g^{(s)}\|_p, \quad 0\le\nu\le 1/p'.$$

Отсюда с учетом оценок (101), (102) и определения (92) нормы $\|\cdot\|_{W_{p,\infty}^s}$ получаем неравенство (97) для значений $s=1,2\ldots$ и $0\le\mu\le s-1/p$ (причем для этих значений μ постоянную 10 в правой части неравенства (97) можно заменить на 8).

Покажем теперь справедливость неравенства (97) для значений μ, для которых $s-1/p\le\mu\le n+s-1/p$, а $s=1,2\ldots$. Для оценки l-й при $l\ge s$ производной функции $[Q_s(\rho)_r g](t)$ воспользуемся тождествами (44), (47), (48) и оценкой (72) при значении $q=\infty$. В результате получим неравенства

$$\| \partial_t^l [Q_s(\rho)_r g](t) \|_H \leq$$

$$\leq 2e^{\xi} |\rho|^{l-n-s+1} \varphi(\rho; p') \| g^{(s)} \|_p, \quad l = s, \ldots, n+s-1. \tag{103}$$

Аналогично, если воспользоваться оценкой (73), то

$$\left\| \partial_t^l [Q_s(\rho)_r g](t) \right\|_{H_0^\nu} \leq$$

$$\leq 6e^{\xi} |\rho|^{l+\nu-n-s+1} \varphi(\rho; p') \| g^{(s)} \|_p, \quad l = s, \ldots, n+s-1, \quad 0 \leq \nu \leq 1/p',$$

откуда и из оценок (100) и (103) вытекает неравенство (97) для значений μ, удовлетворяющих одному из следующих соотношений: $l \leq \mu \leq l + 1/p'$, $l = s, \ldots, n+s-1$ (причем для этих значений μ постоянную 10 в правой части неравенства (97) можно заменить на 8).

Тем самым, неравенство (97) осталось установить для значений μ, удовлетворяющих соотношениям $l - 1/p' < \mu < l$, $l = s, \ldots, n+s-1$, а $1 \leq p < \infty$. Согласно равенствам (44), (47) и (48) для указанных значений l справедливы тождества

$$\partial_t^{l-1} [Q_s(\rho)_r g](t) = (\partial_t^{l-1} [Q_s(\rho)_r g](t))|_{t=0} + \int_0^t (\partial_\zeta^l [Q_s(\rho)_r g](\zeta))\, d\zeta =$$

$$= (\partial_t^{l-1} [Q_s(\rho)_r g](t))|_{t=0} + \rho^{l-n-s+1} \int_0^t [R_{s-l}(\rho)_r g^{(s)}](\zeta)\, d\zeta,$$

т. е. функция $\partial_t^{l-1} [Q_s(\rho)_r g](t)$ отличается от функции $\rho^{l-n-s+1} \times \int_0^t [R_{s-l}(\rho)_r g^{(s)}](\zeta)\, d\zeta$ на постоянную (зависящую лишь от функции g, а не от переменной t), поэтому их полунормы в пространстве H_0^ν совпадают. Отсюда и из оценки (74) вытекает неравенство

$$\left\| \partial_t^{l-1} [Q_s(\rho)_r g](t) \right\|_{H_0^\nu} \leq$$

$$\leq 8e^{\xi} |\rho|^{(l-1)+\nu-n-s+1} \varphi(\rho; p')) \| g^{(s)} \|_p, \quad l = s, \ldots, n+s-1, \quad 1/p' \leq \nu \leq 1,$$

из которого и из оценок (100) и (103) и определения (92) нормы $\|\cdot\|_{W^s_{p,\infty}}$ следует неравенство (97) для значений параметра μ с $l - 1/p < \mu < l$, $l = s, \ldots, n + s - 1$ и $1 \leq p < \infty$.

Тем самым лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы **2** аналогично доказательству теоремы 1, если вместо леммы 5 воспользоваться леммой 6. Действительно, из условия $F \in [H^\gamma, W_p^s]$ вытекает $\partial^k F \in [H^\gamma, H]$, $k = 0, \ldots, s-1$, и $\partial^s F \in [H^\gamma, L_p]$. Отсюда, используя оценку (97) вместо оценки (78), норму $\|\cdot\|_{W^s_{p,\infty}}$ вместо нормы $\|\cdot\|_{W^s_{p,q}(\rho)}$, как и при выводе оценок (88) и (91), получаем неравенства

$$\| F Q_s(\rho)_r g \|_{W^s_{p,\infty}} \leq 20 e^{\xi} c(F) |\rho|^{-\kappa} \|g\|_{W^s_{p,\infty}}, \quad \rho \in (\Xi_r)_\xi, \quad |\rho| \geq 1,$$

$$\| F y_{j,r}(\rho; \cdot) \|_{W^s_{p,\infty}} \leq 4 e^{\xi} c(F) |\rho|^{\gamma}, \quad \rho \in (\Xi_r)_\xi, \quad |\rho| \geq 1,$$

с постоянными $c(F)$ и κ, заданными равенствами (24). Из этих неравенств, повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1, с учетом оценок (96) и (97) вместо оценок (77) и (78) получаем соответственно оценки (25) и (26).

Замечание 2. Как видно из приведенных здесь оценок норм преобразования $Q_s(\rho)_r$, постоянные, фигурирующие в них, несколько огрублены. Эти огрубления появились с самого начала, еще при выводе оценок (9), (57) и оценок из леммы 3, которые допускают несложные обобщения за счет учета зависимости постоянных от параметров p и ν. Например, ясно, что мультипликативное неравенство (9) справедливо, если в нем постоянную 2 заменить на $2^{1-\nu}$. Все эти уточнения не повлияют на качественную сторону теорем 1 и 2, однако приведут к более громоздким формулировкам и доказательствам.

1. *Krall A. M.* The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – **5**, № 4. – P. 493 – 542.
2. *Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф.* Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 5. – С. 771 – 797.
3. *Рахматуллина Л. Ф.* Линейные функционально-дифференциальные уравнения: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1982. – 24 с.
4. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1460 – 1469.
5. *Радзиевский Г. В.* О свойствах решений линейных функционально-дифференциальных уравнений, зависящих от параметра // Там же. – 1991. – **43**, № 9. – С. 1213 – 1231.
6. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**. – P. 219 – 231.
7. *Tamarkine J. D.* Sur quelques points de la théory des équations differentielles linéares ordinares et sur la généralization de la série de Fourier // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1912. – **34**. – P. 345 – 382.
8. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – **28**. – P. 695 – 761.
9. *Рассулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 462 с.
10. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
11. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
12. *Eberhard W., Freiling G.* Stone-reguläre Eigenvert – probleme // Math. Z. – 1978. – 160, № 2. – S. 132 – 161.
13. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1991. – 27, № 3. – С. 384 – 396.
14. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
15. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
16. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
17. *Radzievskii G.* The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions. – Kiev, 1994. – P. 14 – 27. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math.; 94. 26).
18. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.

Получено 29.12.94