УДК 519.21

Т. Н. Кравец (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

We study the stochastic stability problem for a solution of a generalized stochastic differential inclusion in a finite-dimensional space, having nonrandom coefficients and a maximally monotone operator in the coefficient deflection.

Досліджується питання про стійкість за ймовірністю розв'язку стохастичного диференціального включення у скінченновимірному просторі з невипадковими коефіцієнтами та максимально монотонним оператором у коефіцієнті зносу.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, — возрастающее семейство σ-алгебр, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, причем $\mathcal{F}_0$ содержит все P-нулевые множества.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$\begin{gathered} d\,u(t) + A(t, u(t))\,dt + C(u(t))\,dt + B(t, u(t))\,dw(t) \ni 0, \quad t \in (0, T), \\ u(0) = x, \end{gathered} \tag{1}$$

где $w(t)$ — винеровский процесс, заданный на потоке σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $u(t)$ и $w(t)$ принимают значения в $\mathcal{R}^d$. Функции $A(t, u) = \left(A_i(t,u)\right)_{i=1}^d$ и $B(t, u) = \left(B_{ij}(t,u)\right)_{i,j=1}^d$ определены на $[0, T] \times \mathcal{R}^d$ и принимают значения в $\mathcal{R}^d$ и $\mathcal{L}\left(\mathcal{R}^d\right)$ соответственно. Здесь $\mathcal{L}\left(\mathcal{R}^d\right)$ — пространство линейных операторов в $\mathcal{R}^d$ с нормой $\|\cdot\|$, а $C(u)$ — многозначный оператор из $\mathcal{R}^d$ в $\mathcal{R}^d$.

Приведем некоторые определения, касающиеся рассматриваемых в статье многозначных операторов.

Многозначный монотонный оператор C из $\mathcal{R}^d$ в $\mathcal{R}^d$ будем отождествлять с некоторым подмножеством C декартова произведения $\mathcal{R}^d \times \mathcal{R}^d$. Элементы декартова произведения будем обозначать $[x, y]$, а скалярное произведение — (x, y).

Определение 1. *Множество $C \subset \mathcal{R}^d \times \mathcal{R}^d$ и соответствующий оператор из $\mathcal{R}^d$ в $\mathcal{R}^d$ будем называть монотонным, если*

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$$

для любых $[x_i, y_i] \in C$, $i = 1, 2$. Будем говорить, что множество в $\mathcal{R}^d \times \mathcal{R}^d$ (и соответствующий оператор из $\mathcal{R}^d$ в $\mathcal{R}^d$) максимально монотонно, если оно не включается ни в какое другое монотонное множество.

Более подробно о монотонных операторах можно прочесть в книге Р. Рокафеллера [1].

Определение 2. *Решением стохастического дифференциального включения (1) будем называть $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $u(\cdot) \in L^2\left(\Omega \times [0, T]; \mathcal{R}^d\right)$;

2) *существует $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс $\eta(\cdot) \in L^2\left(\Omega \times [0, T]; \mathcal{R}^d\right)$ такой, что $\eta(t) \in C(u(t))$ почти всюду и*

$$u(t) + \int_0^t A(s,u(s))ds + \int_0^t \eta(s)ds + \int_0^t B(s,u(s))dw(s) = x.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $A(t,u)$ *и* $B(t,u)$ *— неслучайные функции, непрерывные по совокупности аргументов;*

2) *существует постоянная величина* l *такая, что для любых* $u, v \in \mathcal{R}^d$

$$|A(t,u) - A(t,v)| + \|B(t,u) - B(t,v)\| \le l|u-v|;$$

3) $C(u)$ *— неслучайный многозначный максимально монотонный оператор, определенный на всем пространстве* $\mathcal{R}^d$, *причем область значений многозначного оператора* $I + \lambda C$ *также совпадает со всем пространством* $\mathcal{R}^d$ *для любого* $\lambda > 0$;

4) *существует постоянная величина* L *такая, что для любого* $u \in \mathcal{R}^d$ *и* $v \in C(u)$ *выполняется неравенство*

$$|A(t,u)| + \|B(t,u)\| + |v| \le L(1 + |u|).$$

Тогда существует единственное решение стохастического дифференциального включения (1), *причем это решение является непрерывным марковским процессом.*

Доказательство единственности не представляет затруднений. А для доказательства существования следует рассмотреть последовательность аппроксимирующих уравнений

$$du_n(t) + A(t,u_n(t))dt + C_n(u_n(t))dw + B(t,u_n(t))dw(t) = 0,$$

$$u_n(0) = x,$$

где

$$C_n(u) = n(u - J_n(u)),$$

$$J_n(u) = \left(1 + \frac{1}{n}C\right)^{-1} u,$$

Эти операторы однозначны, а оператор C_n удовлетворяет необходимым для существования решений (2) свойствам.

Более подробно доказательство приведено в работах [2, 3].

Вопросы устойчивости решений стохастических дифференциальных включений рассматривались многими авторами. Наиболее подробное изложение приведено в книге Р. З. Хасьминского [4]. Методику, разработанную для стохастических дифференциальных уравнений, можно применить и для стохастических включений описанного типа.

По многим причинам самостоятельный интерес представляет случай тривиального решения. Именно этот случай будет рассмотрен ниже.

Будем считать, что функции A, B и C неслучайны и удовлетворяют условиям

$$A(t,0) \equiv B(t,0) \equiv 0, \quad C(0) \ni 0,$$

и рассмотрим задачу устойчивости решения $u(t) \equiv 0$.

Определение 3. *Решение* $u(t) \equiv 0$ *стохастического дифференциального включения* (1) *называется устойчивым по вероятности при* $t > 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x \to 0} P\{\sup |u_{s,x}(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

При решении вопросов устойчивости включений важную роль, как и в случае стохастических дифференциальных уравнений, играет многозначный дифференциальный оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \left(B_i(t,u), \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 - \left(A(t,u), \frac{\partial}{\partial u} \right) - \left(C(u), \frac{\partial}{\partial u} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t,u) \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_{i=1}^{d} A_i(t,u) \frac{\partial}{\partial u_i} - \sum_{i=1}^{d} C_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

В силу свойств монотонности лебегова мера множества „плохих" точек равна нулю, и, следовательно, оператор L почти всюду однозначен.

Лемма 1. *Пусть функция $V(t,u)$ дважды непрерывно дифференцируема по u и один раз по t в $[0,\infty] \times U$, где $U \subset \mathcal{R}^d$ — ограниченная замкнутая область, и пусть в этой области $LV(t,u) \in (-\infty, 0]$, т. е.*

$$L_v(t,u) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \left(B_i(t,u), \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 V - \left(A(t,u), \frac{\partial}{\partial u} \right) V - \left(v, \frac{\partial}{\partial u} \right) V \le 0 \tag{2}$$

для любого $v \in C(u)$. Пусть, кроме того, τ — момент первого выхода из U траектории процесса $u(t)$, определяемой включением (1). *Тогда процесс $V(t \wedge \tau, u(t \wedge \tau))$ представляет собой супермартингал.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}_s$ — σ-алгебра событий, связанных с течением процесса $u(t)$ до момента s, процессы $w(t) - w(s)$ независимы при $t > s$ от любого из событий из $\mathcal{N}_s$.

По формуле Ито для функции $V(t,u)$ можно записать

$$V(t \wedge \tau, u(t \wedge \tau)) - V(s, u(s)) =$$

$$= \int_s^{t \wedge \tau} L_{\eta_r}(r, u(r)) dr + \int_s^{t \wedge \tau} \left(B(r,u(r)), \frac{\partial V}{\partial u}(r,u(r)) \right) dw(r). \tag{3}$$

Возьмем математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{N}_s$. Согласно свойству стохастического интеграла

$$M \left\{ \int_s^{t \wedge \tau} \left(B(r,u(r)), \frac{\partial V}{\partial u}(r,u(r)) \right) dw(r) \Big/ \mathcal{N}_s \right\} = 0.$$

Для оценки первого интеграла в правой части (3) воспользуемся предположением леммы (2) и получим

$$M\{V(t \wedge \tau, u(t \wedge \tau)) / \mathcal{N}_s\} \le V(s, u(s)).$$

Последнее неравенство и означает, что процесс $V(t \wedge \tau, u(t \wedge \tau))$ — супермартингал.

Теорема 2. *Пусть $U_\varepsilon = \{|x| < \varepsilon\}$ и существуют некоторое $\varepsilon_0 > 0$ и функция Ляпунова $V(t,u) \in C^{1,2}(U_{\varepsilon_0})$, удовлетворяющая условиям*

$$\inf_{|u| > m,\, t > 0} V(t,u) = V_m > 0 \quad \textit{при} \quad m > 0;$$

$$L(t,0) = 0,$$

$$LV(t,0) \le 0 \quad \text{в области} \quad U_{\varepsilon_0}.$$

Тогда решение $u(t) \equiv 0$ *уравнения* (1) *устойчиво по вероятности.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_0$ произвольно и τ_ε обозначает момент первого достижения множества $|u| = \varepsilon$ траекторией процесса. Из леммы 1 для $|x| < \varepsilon$ находим

$$MV(\tau_\varepsilon \wedge t, u_{s,x}(t \wedge \tau_\varepsilon)) \le V(s,x).$$

Следовательно,

$$MV(\tau_\varepsilon \wedge t, u_{s,x}(\tau_\varepsilon \wedge t)) \ge P\left\{ \sup_{s \le r \le t} \left| u_{s,x}(r) \right| > \varepsilon \right\} V_\varepsilon.$$

В результате имеем оценку

$$P\left\{ \sup_{s \le r \le t} \left| u_{s,x}(r) \right| > \varepsilon \right\} \le \frac{V(s,x)}{V_\varepsilon}.$$

Полагая $x \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Пример. Пусть дано одномерное стохастическое дифференциальное включение

$$du(t) + au(t)dt + \mathrm{Sgn}(u(t))\,dt + Bu(t)\,dw(t) \ni 0,$$

$$u(0) = x$$

с постоянными коэффициентами a и b и многозначной максимально монотонной функцией $\mathrm{Sgn}\,(u)$:

$$\mathrm{Sgn}\,(u) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad u < -1; \\ [-1, 1] & \text{при} \quad u = 0; \\ 1 & \text{при} \quad u > 1. \end{cases}$$

Решение такого включения существует, оно единственно и это решение имеет, например, ограниченный второй момент. Оператор L для такой системы имеет вид

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - au\frac{\partial}{\partial u} - \mathrm{Sgn}\,(u)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}b^2u^2\frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Положим $V = u^2$. Тогда

$$LV = -2au^2 - 2u\,\mathrm{Sgn}\,(u) + b^2u^2 < u^2(-2a + b^2),$$

так как $u\,\mathrm{Sgn}\,(u) \ge 0$. Ясно, что при выполнении условия $b^2 - a < 0$ функция будет удовлетворять условиям теоремы 2. Следовательно, тривиальное решение устойчиво по вероятности.

1. *Рокафеллер Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
2. *Кравец Т. Н.* О решениях стохастических дифференциальных включений в конечно-разностных пространствах. – Донецк, 1985. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 1829.
3. *Кравец Т. Н.* Решение одномерного стохастического дифференциального включения как марковский процесс // Марковские процессы и их применение: Межвуз. сб. – 1988. – Вып. 2. – С. 56 – 64.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

Получено 21.03.94