УДК 517.98

М. Ф. Городний, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

АППРОКСИМАЦИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ НА Z^2 РЕШЕНИЯМИ СООТВЕТСТВУЮЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Existence and uniqueness conditions are studied for solutions of boundary-value difference problems in a Banach space and corresponding to a certain difference equation on Z^2. A theorem on approximating a single bounded solution of the considered equation by solutions of the corresponding boundary-value problems is proved.

Досліджено питання про існування і єдиність розв'язків крайових різницевих задач у банаховому просторі, відповідних одному різницевому рівнянню на Z^2. Доведено теорему про наближення єдиного обмеженого розв'язку розглядуваного рівняння розв'язками відповідних крайових задач.

Предложенный в работе [1] метод доказательства существования стационарных решений стохастического разностного уравнения на Z^2 используется для доказательства следующей теоремы о существовании и единственности ограниченного решения детерминированного разностного уравнения на Z^2.

Пусть B — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом $\vec{0}$; $\mathfrak{L}(B)$ — набор всех линейных ограниченных операторов, действующих из B в B; A — фиксированный оператор, принадлежащий $\mathfrak{L}(B)$; I и O — соответственно единичный и нулевой операторы в B.

Теорема 1. *Разностное уравнение*

$$Ax_{p,q} = x_{p-1,q} + x_{p,q-1} + x_{p+1,q} + x_{p,q+1} + y_{p,q}, \tag{1}$$

$$(p, q) \in Z^2,$$

имеет для любой ограниченной по норме в пространстве B *последовательности* $\{y_{p,q} : (p,q) \in Z^2\}$ *единственное ограниченное решение* $\{x_{p,q} : (p,q) \in Z^2\}$ *тогда и только тогда, когда отрезок* $[-4; 4]$ *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$ *оператора* A.

Подробное доказательство теоремы 1 можно получить с помощью рассуждений, приведенных в [2, 3] при доказательстве аналогичного результата для разностного уравнения, зависящего от одного индекса, поэтому мы его не приводим.

О прикладных задачах, приводящих к разностным уравнениям вида (1), см. также [3].

Уравнению (1) соответствует краевая разностная задача вида

$$Au_{p,q} = u_{p-1,q} + u_{p,q-1} + u_{p+1,q} + u_{p,q+1} + y_{p,q}, \tag{2}$$

$$|p| + |q| < m,$$

$$u_{p,q} = z_{p,q}, \quad |p| + |q| = m, \tag{3}$$

где m — натуральное число, $\{z_{p,q} : |p| + |q| = m\}$ — фиксированные элементы пространства B. Цель настоящей работы — изучить вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи (2), (3), а также вопрос о приближении ограниченного решения разностного уравнения (1) решениями семейства краевых задач (2), (3) при $m \to \infty$.

1. Решение краевой задачи. Пусть

$$M := \{-2; 0; 2\} \cup \left\{ \pm 4\cos\frac{j\pi}{2m} \cos\frac{k\pi}{2m} \mid 1 \le j,\ k \le m-1;\ m \ge 3 \right\}.$$

Полный ответ на вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи (2), (3) дает следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы для любого натурального числа* m *и любых наборов* $\{y_{p,q} : |p| + |q| < m\}$, $\{z_{p,q} : |p| + |q| = m\}$ *элементов* B *краевая разностная задача* (2), (3) *имела единственное решение* $\{u_{p,q} : |p| + |q| \le$ $\le m\}$, *необходимо и достаточно, чтобы множество* M *принадлежало* $\rho(A)$.

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим следующий частный случай краевой задачи (2):

$$A u_{p,q} = u_{p-1,q} + u_{p,q-1} + u_{p+1,q} + u_{p,q+1}, \quad |p| + |q| < m, \tag{4}$$

$$u_{k,m-k} = z_{k,m-k}, \quad 0 \le k \le m-1, \tag{5}$$

$$u_{p,q} = \vec{0}, \quad |p| + |q| = m, \quad p < 0 \quad \text{или} \quad q \le 0.$$

Достаточно проверить, что существование единственного решения $\{u_{p,q} : |p| +$ $+ |q| \le m\}$ задачи (4), (5) для любого $m \ge 1$ и любого набора $\{z_{k,m-k} : 0 \le$ $\le k \le m-1\}$ влечет включение $M \subset \rho(A)$.

Нетрудно проверить, что из существования единственного решения краевой задачи (4), (5) при $m = 1$ и $m = 2$ следует включение $\{-2; 0; 2\} \subset \rho(A)$.

Зафиксируем $m \ge 3$ и обозначим через B^{m-1} декартово произведение $m-1$ экземпляров пространства B; B^{m-1} является банаховым пространством с покоординатным сложением и умножением на скаляр и нормой

$$\|\vec{x}\|_{m-1} = \max_{1 \le k \le m-1} \|x_k\|, \quad \vec{x} = \{x_1, \ldots, x_{m-1}\} \in B^{m-1}.$$

Используя элементы решения $\{u_{p,q} : |p| + |q| \le m\}$ задачи (4), (5), соответствующего краевому условию $\{z_{k,m-k} : 0 \le k \le m-1\}$ такому, что $z_{0,m} = \vec{0}$, определим следующие векторы в B^{m-1}:

$$\vec{u}_j := \{u_{j-1,-m+j+1}; u_{j-2,-m+j+2}; \ldots u_{j-(m-1),-m+j+(m-1)}\}, \quad 0 \le j \le m;$$

$$\vec{z} := \{z_{m-1,1}; z_{m-2,2}; \ldots z_{1,m-1}\}.$$

Отметим, что с учетом краевых условий $\vec{u}_0$ — нулевой вектор в B^{m-1}, а также $\vec{u}_m = \vec{z}$. Выведем рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют векторы $\vec{u}_j$, $0 \le j \le m$. Заметим, что для любых p, q таких, что $|p| + |q| \le m-2$, выполняется равенство

$$(A^2 - 4I) u_{p,q} = u_{p-2,q} + u_{p,q-2} + u_{p+2,q} + u_{p,q+2} +$$
$$+ 2(u_{p-1,q-1} + u_{p-1,q+1} + u_{p+1,q-1} + u_{p+1,q+1}). \tag{6}$$

Рассмотрим линейные непрерывные операторы U_m и V_m, которые действуют на векторы из B^{m-1} согласно правилам матричного исчисления и задаются с помощью следующих матриц размера $(m-1)\times(m-1)$:

$$U_m = \begin{pmatrix} 2I & I & 0 & & \\ I & 2I & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & I & 2I & I \\ & & 0 & I & 2I \end{pmatrix}, \quad V_m = \begin{pmatrix} A^2 & 0 & & & \\ 0 & A^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A^2 & 0 \\ & & & 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

Элементы этих матриц являются операторами из $\mathfrak{L}(B)$, причем на незаполненных местах находятся нулевые операторы. В силу определения U_m, V_m и равенства (6) векторы $\vec{u}_{j-1}$, $\vec{u}_j$, $\vec{u}_{j+1}$ удовлетворяют операторному уравнению

$$V_m\vec{u}_j = U_m\vec{u}_{j+1} + 2U_m\vec{u}_j + U_m\vec{u}_{j-1}. \tag{7}$$

Непосредственно проверяется, что оператор U_m имеет ограниченный обратный оператор U_m^{-1}, который определяется следующим образом:

$$U_m^{-1}\vec{x} =$$

$$= \left\{\left(U_m^{-1}\vec{x}\right)_k = \frac{1}{m}\left(\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k+\nu}\nu(m-k)x_\nu + \sum_{\nu=k+1}^{m-1}(-1)^{k+\nu}k(m-\nu)x_\nu\right) : 1\le k\le m-1\right\}.$$

Обозначим через E_m единичный оператор в B^{m-1} и положим

$$T_m := V_mU_m^{-1} - 2E_m. \tag{8}$$

Учитывая, что $\vec{u}_0$ — нулевой вектор, из равенства (7) получаем следующую рекуррентную формулу для определения векторов $\vec{u}_j$, $2\le j\le m$, через вектор $\vec{u}_1$:

$$\vec{u}_2 = T_m\vec{u}_1; \quad \vec{u}_{j+1} = T_m\vec{u}_j - \vec{u}_{j-1}, \quad 2\le j\le m. \tag{9}$$

С помощью (9) по индукции проверяется, что

$$\vec{u}_j = \Psi_{j,m}\vec{u}_1, \quad 1\le j\le m, \tag{10}$$

где

$$\Psi_{1,m} = E_m,\ \Psi_{2,m} = T_m,\ \Psi_{k+1,m} = T_m\Psi_{k,m} - \Psi_{k-1,m},\ 2\le k\le m-1. \tag{11}$$

Полагая в (10) $j=m$, в силу равенства $\vec{u}_m = \vec{z}$ заключаем, что для любого $\vec{z}\in B^{m-1}$ операторное уравнение

$$\Psi_{m,m}\vec{u}_1 = \vec{z} \tag{12}$$

имеет решение. Докажем единственность решения этого уравнения. Пусть, от противного, для некоторого $\vec{z}\in B^{m-1}$ уравнение (12) имеет несколько решений. Тогда существует ненулевой элемент $\vec{v}\in B^{m-1}$ такой, что $\Psi_{m,m}\vec{v}$ — нулевой вектор. Положим $\vec{u}_1 = \vec{v}$ и с помощью соотношений (10) определим векторы $\vec{u}_j$, $2\le j\le m$. Нетрудно убедиться, что компоненты этих векторов образуют часть ненулевого решения задачи (4), (5) с краевым условием $\{z_{k,m-k} =$

$= \bar{0} : 0 \le k \le m-1 \}$, что противоречит единственности решения краевой задачи (4), (5).

Итак, доказано, что для любого $\bar{z} \in B^{m-1}$ уравнение (12) имеет единственное решение. Следовательно, оператор $\Psi_{m,m}$ имеет ограниченный обратный оператор $\Psi_{m,m}^{-1}$. Выпишем условия на $\rho(A)$, необходимые для существования $\Psi_{m,m}^{-1}$. Из равенств (11) и результатов работы [4] следует, что $\Psi_{m,m}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда резольвентное множество $\rho(T_m)$ оператора T_m содержит множество

$$\Lambda_m := \left\{ 2\cos\frac{j\pi}{m} \mid 1 \le j \le m-1 \right\}.$$

В силу соотношения (8) для выполнения включения $\Lambda_m \subset \rho(T_m)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $1 \le j \le m-1$ оператор

$$S_{j,m} := U_m - \left(2\cos\frac{j\pi}{2m}\right)^{-2} V_m$$

имел ограниченный обратный оператор. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 2 из [4], устанавливается, что операторы $S_{j,m}^{-1}$, $1 \le j \le m-1$, существуют в том и только в том случае, когда для любых $1 \le j \le m-1$, $1 \le k \le m-1$ множество $\rho(A)$ содержит числа $\pm 4\cos(j\pi/(2m))\cos(k\pi/(2m))$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем сначала существование решения краевой задачи (2), (3). Заметим, что с учетом симметрии краевое условие (3) представимо в виде суммы четырех краевых условий вида (5). Поэтому достаточно убедиться в том, что существует решение задачи (2), (5).

Будем использовать обозначения, введенные при доказательстве необходимости. При $m = 1, 2$ решение краевой задачи (2), (5) явно выписывается. Зафиксируем $m = 3$ и восстановим сначала элементы решения $\{ u_{p,q} : |p| + |q| \le \le m \}$, которые являются компонентами векторов $\bar{u}_j$, $1 \le j \le m-1$. Положим

$$y_{p,q} := \bar{0}, \quad |p| + |q| = m,$$

$$w_{p,q} := A y_{p,q} + y_{p-1,q} + y_{p,q-1} + y_{p+1,q} + y_{p,q+1}, \quad |p| + |q| \le m-1,$$

$$\vec{w}_j := \{ w_{j-1,-m+j+1}, w_{j-2,-m+j+2}, \ldots, w_{j-(m-1),-m+j+(m-1)} \}, \; 0 \le j \le m-1 .$$

Тогда аналоги формул (9) для краевой задачи (2), (5) имеют вид

$$\vec{u}_2 = T_m \vec{u}_1 - U_m^{-1} \vec{w}_1, \quad \vec{u}_{k+1} = T_m \vec{u}_k - \vec{u}_{k-1} - U_m^{-1} \vec{w}_k, \quad k \ge 2. \tag{13}$$

Поэтому, положив $\vec{u}_1 = \vec{\alpha}$, где $\vec{\alpha}$ — фиксированный элемент B^{m-1}, из соотношения (13) получим

$$\vec{u}_k = \Psi_{k,m} \vec{\alpha} - \sum_{j=1}^{k-1} \Psi_{k-j,m} U_m^{-1} \vec{w}_j, \quad 2 \le k \le m-1. \tag{14}$$

Поскольку согласно (5) $\vec{u}_m = \bar{z} + U_m^{-1} \bar{z}_*$, где $\bar{z}_* = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, z_{0,m})$, и оператор $\Psi_{m,m}^{-1}$ существует, то вектор $\vec{\alpha}$ определяется из равенства (14) при $k = m$.

Далее с помощью (14) восстанавливаются компоненты векторов $\bar{u}_j$, $1 \le j \le m - 1$. Остальные элементы решения $\{u_{p,q}: |p|+|q| \le m\}$ задачи (2), (5) определяются с помощью соотношения (2).

Для доказательства единственности решения используются рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве единственности решения операторного уравнения (12).

Теорема 2 доказана.

2. Аппроксимация ограниченного решения разностного уравнения (1) решениями семейства краевых разностных задач (2), (3) при $m \to \infty$. Возможность аппроксимации и ее скорость описывает следующая теорема.

Пусть $\{x_{p,q}: (p,q) \in Z^2\}$ — единственное ограниченное решение разностного уравнения (1), соответствующее ограниченной последовательности $\{y_{p,q}: (p,q) \in Z^2\}$; m — фиксированное натуральное число, $\{z_{p,q}: |p|+|q| = m\}$ — фиксированные элементы банахового пространства B, $\{u_{p,q}: |p| + |q| \le m\}$ — единственное решение краевой задачи (2), (3), соответствующей разностному уравнению (1).

Теорема 3. *Если отрезок $[-4; 4]$ содержится в $\rho(A)$, то найдутся константы $L > 0$, $0 < \sigma < 1$, зависящие только от оператора A и такие, что для любых целых p, q, удовлетворяющих неравенству $|p|+|q| \le m$, справедлива оценка*

$$\|x_{p,q} - u_{p,q}\| \le L\Bigg(\sigma^{m-p-q} \max_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha\ge0,\,\beta\ge0}} \|x_{\alpha,\beta} - z_{\alpha,\beta}\| + \sigma^{m+p-q} \max_{\substack{-\alpha+\beta=m\\ \alpha\le0,\,\beta\ge0}} \|x_{\alpha,\beta} - z_{\alpha,\beta}\| + \sigma^{m+p+q} \max_{\substack{-\alpha-\beta=m\\ \alpha\le0,\,\beta\le0}} \|x_{\alpha,\beta} - z_{\alpha,\beta}\| + \sigma^{m-p+q} \max_{\substack{\alpha-\beta=m\\ \alpha\ge0,\,\beta\le0}} \|x_{\alpha,\beta} - z_{\alpha,\beta}\|\Bigg). \tag{15}$$

Доказательство. Используем обозначения, введенные при доказательстве теоремы 2. Сначала проверим, что из включения $[-4; 4] \subset \rho(A)$ следует существование констант $C > 0$, $0 < \gamma < 1$, зависящих только от оператора A и таких, что для любого $m \ge 3$ и для любого набора $\{z_{k,m-k}: 0 \le k \le m-1\}$ элементов B нормы векторов $\bar{u}_j$, $0 \le j \le m-1$, построенных по единственному решению $\{u_{p,q}: |p|+|q| \le m\}$ краевой задачи (4), (5), оцениваются следующим образом:

$$\|\bar{u}_j\|_{m-1} \le C\gamma^{m-j} \|\bar{u}_m\|_{m-1}. \tag{16}$$

Докажем неравенство (16). Заметим, что включение $[-4; 4] \subset \rho(A)$ влечет существование оператора $\Psi_{m,m}^{-1}$. Поэтому в силу соотношений (10), (12) для проверки истинности (16) достаточно установить, что

$$\exists\, C_3 > 0 \ \ \exists\, 0 < \gamma_3 < 1 \ \ \forall\, m \ge 3 \ \ \forall\, 1 \le j \le m-1: \|\Psi_{j,m}\Psi_{m,m}^{-1}\| \le C_3\gamma_3^{m-j}. \tag{17}$$

Докажем неравенство (17). Для этого сначала проверим, что используемые для построения операторов $\Psi_{k,m}$, $m \ge 3$, $1 \le k \le m$, операторы T_m, $m \ge 3$, удовлетворяют следующим условиям:

$$\exists\,\delta>0\ \ \forall\, m\geq 3:\ \sigma(T_m)\subset K:=\left\{x+iy\,\left|\,\frac{x^2}{4(1+\delta^2)}+\frac{y^2}{4\delta^2}>1\right.\right\},\qquad(18)$$

а также

$$\exists\, C_4>0\quad \forall\,\lambda\in\partial K\quad \forall\, m\geq 3\ \ \|R(\lambda,T_m)\|\leq C_4.\qquad(19)$$

Здесь через ∂K, $\sigma(T_m)$, $R(\lambda, T_m)$ обозначены соответственно граница множества K, спектр и резольвента оператора T_m.

Поскольку $[-2;2]\subset C^1\setminus K$ и резольвента $R(\lambda,T_m)$ является аналитической функцией на множестве $C^1\setminus\sigma(T_m)$, то для проверки условий (18), (19) достаточно установить, что для любого $\lambda_0\in[-2;2]$ существуют возможно зависящие от λ_0 константы $C_5>0$, $\delta_1>0$ такие, что

$$\forall\,\lambda,\ |\lambda-\lambda_0|<\delta_1\quad\forall\, m\geq 3:\ \lambda\in\rho(T_m),\quad \|R(\lambda,T_m)\|\leq C_5.\qquad(20)$$

Вследствие равенства $T_m+2E_m=V_mU_m^{-1}$ истинность условия (20) для $\lambda_0=-2$ устанавливается непосредственно с учетом определения оператора U_m, равенства

$$T_m-\lambda E_m=(T_m-\lambda_0E_m)(E_m-(\lambda-\lambda_0)(T_m-\lambda_0E_m)^{-1})\qquad(21)$$

и теоремы Банаха об обратном операторе. Проверим выполнение условия (20) для фиксированного $-2<\lambda_0\leq 2$. В силу представления (8) оператор $(T_m-$ $-\lambda_0E_m)$ имеет ограниченный обратный оператор тогда и только тогда, когда существует обратный оператор для оператора $U_m-(\lambda_0+2)^{-1}V_m$. Поскольку $[-4;4]\subset\rho(A)$, то в силу теоремы Данфорда об отображении спектра справедливо включение $[-2;2]\subset\rho((\lambda_0+2)^{-1}A^2-2I)$. Поэтому существование обратного оператора для оператора $U_m-(\lambda_0+2)^{-1}V_m$ устанавливается с помощью перехода к рассмотрению определителя соответствующей этому оператору матрицы и рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 1 из [4], и выполнение условия (20) следует из равенства (21).

Таким образом, справедливость условий (18), (19) установлена. С учетом этих условий оценка (17) имеет место вследствие представления

$$\Psi_{k,m}\Psi_{m,m}^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_m}\frac{\varphi_k(\lambda)}{\varphi_m(\lambda)}R(\lambda,T_m)\,d\lambda,$$

в котором ∂D_m — граница множества $K\cap\{\lambda\in C^1\,|\,|\lambda|\leq 2\|T_m\|\}$, $\varphi_1(\lambda)\equiv 1$, $\varphi_2(\lambda)=\lambda$, $\varphi_{k+1}(\lambda)=\lambda\varphi_k(\lambda)-\varphi_{k-1}(\lambda)$, $k\geq 2$, и доказанной в [4] оценки

$$\exists\, R>1\ \ \exists\, L_1>1\ \ \forall\,\lambda\in K\cup\partial K:\ \left|\frac{\varphi_k(\lambda)}{\varphi_m(\lambda)}\right|\leq L_1R^{-m+k}.$$

Итак, истинность неравенства (16) доказана. С его помощью при $m\geq 3$ справедливость оценки (15) устанавливается следующим образом. Заметим, что множество $\{x_{p,q}-u_{p,q}:|p|+|q|\leq m\}$ задает единственное решение краевой разностной задачи

$$At_{p,q} = t_{p-1,q} + t_{p,q-1} + t_{p+1,q} + t_{p,q+1}, \quad |p| + |q| < m, \tag{22}$$

$$t_{p,q} = x_{p,q} - z_{p,q}, \quad |p| + |q| = m. \tag{23}$$

Поскольку задача (22), (23) представима в виде суммы четырех краевых задач вида (4), (5), то с учетом симметрии правильность неравенства (15) для индексов p, q таких, что $|p+q+m|$ — четное число, следует из равенства (10), определения оператора U_m^{-1} и оценки (16). Если число $|p+q+m|$ — нечетное, то для слагаемых из правой части (23) истинность неравенства (15) установлена выше. Поэтому вследствие существования оператора A^{-1} можно убедиться, увеличив при необходимости константу L, что оценка (15) справедлива и в этом случае.

Осталось заметить, что при $m = 1, 2$ справедливость неравенства (23) проверяется непосредственно.

Теорема 3 доказана.

В заключение отметим, что решение $\{x_{p,q} : (p,q) \in Z^2\}$ уравнения (1), соответствующее ограниченной последовательности $\{y_{p,q} : (p,q) \in Z^2\}$, удовлетворяет неравенству

$$\sup_{(p,q)\in Z^2} \| x_{p,q} \| \leq L_2 \sup_{(p,q)\in Z^2} \| y_{p,q} \|,$$

где $L_2 > 0$ зависит только от оператора A. Поэтому правая часть (15) представима в виде, не содержащем элементы $\{x_{p,q} : |p| + |q| \leq m\}$. Следовательно, результаты теорем 2, 3 можно использовать для приближенного определения части ограниченного решения разностного уравнения (1), соответствующего заданной ограниченной последовательности $\{y_{p,q} : (p,q) \in Z^2\}$.

1. *Городний М. Ф., Дороговцев А. Я.* О стационарных решениях одного стохастического двумерного разностного уравнения // Стохастический анализ и его прил. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 25 – 33.
2. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, №1. – С. 41 – 46.
3. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Выща шк., 1992. – 319 с.
4. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 1992. – **51**, вып. 4. – С. 17 – 22.

Получено 07.05.93