УДК 512.546

И. В. Протасов, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ИДЕАЛЫ ПОЛУГРУППЫ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

We construct two new series of closed left ideals of a semigroup $\overline{\tau}$ of ultrafilters of a topological group (G, τ). The first series gives a disjunctive decomposition of τ-absorbing ultrafilters. Under suitable restriction on the topology of the group (G, τ), the second series gives a disjunctive decomposition of a semigroup of free ultrafilters. For a nondiscrete metrizable topological group (G, τ), we construct a big free subsemigroup of the semigroup $\overline{\tau}$.

Побудовано дві нові серії замкнених лівих ідеалів півгрупи ультрафільтрів топологічної групи (G, τ). Перша серія дає диз'юнктний розклад ідеалу τ-поглинаючих ультрафільтрів. Запевних обмежень на топологію групи (G, τ) друга серія дає диз'юнктний розклад півгрупи вільних ультрафільтрів із $\overline{\tau}$. За умов недискретності на метризованості топологічної групи (G, τ) побудована велика вільна підпівгрупа півгрупи $\overline{\tau}$.

Известно, что любая топология на группе G, в которой непрерывны операции умножения и обращения, однозначно определяется фильтром τ окрестностей единицы. В свою очередь, фильтр τ индуцирует замкнутое подмножество $\overline{\tau} = \{ p \in \beta G : \tau \subseteq p \}$ в пространстве ультрафильтров βG чех-стоуновой компактификации группы G как дискретного пространства. Конструкция, возникшая в комбинаторике чисел, позволяет продолжить операцию умножения на группе G до полугрупповой операции на βG, причем подмножество $\overline{\tau}$ оказывается подполугруппой в βG. Как показано в работе [1], полугруппа $\overline{\tau}$ — достаточно мощный инструмент исследования тополого-алгебраических свойств группы G, связанных с разбиениями и некоторыми кардинальными инвариантами.

Поскольку строение любой полугруппы существенно зависит от ее насыщенности различными идеалами, изучение полугруппы $\overline{\tau}$ естественно начать с поиска и описания идеалов. На этом пути в работе [1] получена характеризация ультрафильтров, порождающих минимальные правые идеалы, минимальные замкнутые левые идеалы, а также построен идеал τ-поглощающих ультрафильтров.

Цель статьи — предложить конструкцию новых серий замкнутых левых идеалов полугруппы $\overline{\tau}$, основанную на следующем замечании. Каждое непустое замкнутое подмножество полугруппы $\overline{\tau}$ индуцируется некоторым фильтром φ на группе G, сходящимся к единице. Идеалы, о которых идет речь, получаются подчинением элементов фильтра φ, как подмножеств группы G, определенным топологическим требованиям.

В п. 1 изложены все необходимые сведения о чех-стоуновой компактификации, конструкция продолжения операции умножения, а также введено новое понятие равномерного левого идеала. В п. 2 доказана равномерность левого идеала полугруппы $\overline{\tau}$, индуцированного открытым фильтром, и получено разложение идеала τ-поглощающих ультрафильтров в дизъюнктное объединение замкнутых левых идеалов, индуцированных максимальными открытыми фильтрами. Привлечение новых понятий открытой оболочки фильтра и следа ультрафильтра позволило в п. 3 доказать при определенных ограничениях на топологию группы теорему о разложении полугруппы свободных ультрафильтров из τ в дизъюнктное объединение замкнутых левых идеалов. Наконец, в п. 4 показано, что в случае недискретности и метризуемости топологии на группе полугруппа $\overline{\tau}$ содержит достаточно большую свободную подполугруппу, при этом существенно использованы рассуждения, связанные с построенными идеалами.

1. Полугруппа ультрафильтров. Пусть X — дискретное пространство,

βX — чех-стоунова компактификация пространства X. Элементами пространства βX являются ультрафильтры на множестве X, а базу топологии образуют подмножества $\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$, где A пробегает все подмножества из X. Отметим, что подмножество $\overline{A}$ открыто и замкнуто в пространстве βX для любого подмножества $A \subseteq X$. Условимся пространство X отождествлять с подмножеством всех главных ультрафильтров из βX. Ультрафильтры из подмножества $\beta X \backslash X$ называются свободными.

Характеристичным является следующее свойство пространства βX: любое отображение f пространства X в компактное хаусдорфово пространство K однозначно продолжается до непрерывного отображения $\bar{f}$ пространства βX в K. Если в качестве K взять пространство βX, то для ультрафильтра $q \in \in \beta X$ базис ультрафильтра $\bar{f}(q)$ образуют подмножества $\bigcup \{F_x : x \in Q, F_x \in \in f(x)\}$, где Q пробегает элементы ультрафильтра q, а F_x — элементы ультрафильтра $f(x)$.

Для произвольного фильтра φ на множестве X обозначим через $\overline{\varphi}$ совокупность всех ультрафильтров на X, содержащих φ. Поскольку $\overline{\varphi} = = \bigcap \{\overline{F} : F \in \varphi\}$, то $\overline{\varphi}$ — замкнутое подпространство пространства βX. Будем говорить, что подпространство $\overline{\varphi}$ индуцируется фильтром φ. Отметим, что всякое непустое замкнутое подпространство из βX индуцируется подходящим фильтром на X.

Предположим теперь, что S — полугруппа с дискретной топологией, и изложим конструкцию продолжения на βS операции умножения полугруппы S. Такая конструкция возникла и интенсивно используется в комбинаторике чисел (см., например, [2]).

Для каждого элемента $a \in S$ определим отображение $R_a : S \to S$ правилом $R_a(x) = xa$ для всех $x \in S$. Так как $S \subseteq \beta S$, то отображение R_a продолжается до непрерывного отображения $\overline{R}_a : \beta S \to \beta S$. Ясно, что для каждого ультрафильтра $p \in \beta S$ $\overline{R}_a(p)$ — ультрафильтр с базисом $\{Pa : P \in p\}$. Таким образом, мы определили произведение $pa = \overline{R}_a(p)$ ультрафильтра $p \in \beta S$ и элемента $a \in S$. Далее, для каждого ультрафильтра $p \in \beta S$ рассмотрим отображение $L_p : S \to \beta S$, заданное правилом $L_p(x) = px$ для всех $x \in S$. Продолжим отображение L_p до непрерывного отображения $\overline{L}_p : \beta S \to \beta S$. Если $q \in \in \beta S$, то ультрафильтр $\overline{L}_p(q)$ называется произведением ультрафильтров p и q и обозначается pq.

Приведем следующее "конструктивное" описание ультрафильтра pq. Возьмем произвольное подмножество $Q \in q$ и для каждого элемента $x \in Q$ выберем подмножество $P_x \in p$. Подмножество $\bigcup \{P_x x : x \in Q\}$ является элементом ультрафильтра pq и каждый элемент ультрафильтра pq содержит подмножество такого вида.

Определенная выше операция произведения на βS ассоциативна, непрерывна по второму аргументу при фиксированном первом, а также непрерывна по первому аргументу, если фиксированный второй аргумент является главным ультрафильтром.

Пусть φ — фильтр на полугруппе S и $\overline{\varphi}$ — подполугруппа полугруппы βS. Отображение $f : S \to \beta S$ назовем *$\overline{\varphi}$-правильным*, если $f(x) = p_x x$, причем $p_x \in \overline{\varphi}$ для всех $x \in S$. Заметим, что отображение $L_p : S \to \beta S$ является $\overline{\varphi}$-правильным тогда и только тогда, когда $p \in \overline{\varphi}$. Поэтому подмножество $J \subseteq \subseteq \overline{\varphi}$ является левым идеалом полугруппы $\overline{\varphi}$ тогда и только тогда, когда $\overline{L}_p(q) \in J$ для любых $q \in J$ и $\overline{\varphi}$-правильного отображения L_p.

Подмножество $J \subseteq \overline{\varphi}$ назовем *равномерным левым идеалом* полугруппы $\overline{\varphi}$, если $\bar{f}(q) \in J$ для любых $q \in J$ и $\overline{\varphi}$-правильного отображения $f: S \to \beta S$.

Как и в работе [1], топологическую группу будем обозначать парой (G, τ), где G — группа, τ — фильтр окрестностей единицы некоторой групповой топологии на G. Никаких условий отделимости топологии, если особо не оговорено, не предполагается. Объект наших исследований — полугруппа $\overline{\tau}$, которая в [1] названа полугруппой ультрафильтров топологической группы (G, τ).

2. Левые идеалы, индуцированные открытыми фильтрами. Фильтр φ на топологической группе (G, τ) назовем *открытым*, если φ имеет базис из открытых подмножеств. Фильтр, максимальный в классе всех открытых фильтров, назовем *максимальным открытым фильтром*. Если φ, ψ — различные максимальные открытые фильтры, то, очевидно, $\overline{\varphi} \cap \overline{\psi} = \varnothing$.

2.1. **Лемма.** *Если φ — открытый фильтр на топологической группе (G, τ), сходящейся к единице, то $\overline{\varphi}$ — равномерный левый идеал полугруппы $\overline{\tau}$.*

Доказательство. Фиксируем ультрафильтр $q \in \overline{\varphi}$ и $\overline{\varphi}$-правильное отображение $f: G \to \beta G$. Возьмем произвольное открытое подмножество $U \in \varphi$. Так как $q \in \overline{\varphi}$, то $U \in q$. Пусть $f(x) = p_x x$, причем $p_x \in \overline{\tau}$ для всех $x \in G$. Для каждого элемента $x \in U$ подберем такое подмножество $P_x \in p_x$, что $P_x x \subseteq U$. Поскольку $\bigcup \{P_x x : x \in U\} \in \bar{f}(q)$, то $U \in \bar{f}(q)$ и в силу произвола выбора базисного элемента U фильтра φ $\bar{f}(q) \in \overline{\varphi}$.

Открытой оболочкой фильтра φ на топологической группе (G, τ) назовем наибольший открытый фильтр $o(\varphi)$, содержащийся в φ. Базис фильтра $o(\varphi)$ образует семейство всех открытых в топологической группе (G, τ) подмножеств, которые принадлежат фильтру φ. Отметим следующие очевидные свойства открытой оболочки.

2.2. $\overline{\varphi} \subseteq \overline{o(\varphi)}$.

2.3. Если $\varphi \subseteq \psi$, то $o(\varphi) \subseteq o(\psi)$.

2.4. Если φ — максимальный открытый фильтр, то $\varphi = o(p)$ для любого ультрафильтра $p \in \overline{\varphi}$.

2.5. Если $\tau \subseteq \varphi$, то $\tau \subseteq o(\varphi)$.

Для подмножества A топологической группы (G, τ) обозначим через $\mathrm{cl}(A)$ и $\mathrm{int}(A)$ соответственно замыкание и внутренность подмножества A. Согласно определению из работы [1] ультрафильтр $p \in \overline{\tau}$ называется *$\overline{\tau}$-поглощающим*, если $\mathrm{int}(F) \in p$ для любого замкнутого подмножества $F \in p$. Согласно теореме 3.11 из [1] множество всех $\overline{\tau}$-поглощающих ультрафильтров является идеалом полугруппы $\overline{\tau}$.

2.6. **Лемма.** *Ультрафильтр $p \in \overline{\tau}$ является $\overline{\tau}$-поглощающим тогда и только тогда, когда $o(p)$ — максимальный открытый фильтр.*

Доказательство. Предположим, что p — $\overline{\tau}$-поглощающий ультрафильтр, однако открытый фильтр $o(p)$ не является максимальным. Выберем такой открытый фильтр φ, что $o(p) \subset \varphi$, и зафиксируем открытое подмножество $U \in \varphi \setminus o(p)$. Положим $F = G \setminus U$ и допустим, что $F \notin p$. Тогда $U \in p$ и $U \in o(p)$, что противоречит выбору U. Следовательно, $F \in p$. Так как подмножество F замкнуто и ультрафильтр p τ-поглощающий, то $\mathrm{int}(F) \in o(p)$. Поскольку $o(p) \subseteq p$, то $\mathrm{int}(F) \in \varphi$. Поскольку $U \in \varphi$, $\mathrm{int}(F) \in \varphi$ и $U \cap \mathrm{int}(F) = \varnothing$, приходим к противоречию с тем, что φ — фильтр.

Наоборот, предположим, что $o(p)$ — максимальный открытый фильтр, однако ультрафильтр p не является τ-поглощающим. Выберем такое замкнутое подмножество $F \in p$, что $\operatorname{int}(F) \notin p$. Положим $H = F \setminus \operatorname{int}(F)$. Тогда $H \in p$ и $\operatorname{int}(H) = \varnothing$. Если $U = G \setminus H$, то $\operatorname{cl}(U) = G$. Поэтому $\{U \cap V : V \in o(p)\}$ — базис открытого фильтра φ, причем $o(p) \subseteq \varphi$. Поскольку $H \in p$ и $o(p) \subseteq \subseteq p$, то $H \cap V \neq \varnothing$ для любого подмножества $V \in o(p)$. Так как $H \cap U = \varnothing$, то $U \notin o(p)$. По определению фильтра φ $U \in \varphi$. Значит, $o(p) \subset \varphi$, что противоречит максимальности открытого фильтра $o(p)$.

2.7. **Теорема.** *Для любой топологической группы* (G, τ) *идеал* τ*-поглощающих ультрафильтров полугруппы* $\overline{\tau}$ *равен дизъюнктному объединению равномерных левых идеалов* $\overline{\varphi}$, *индуцированных максимальными открытыми фильтрами* φ, *сходящимися к единице.*

Доказательство. Пусть D — идеал τ-поглощающих ультрафильтров, $J = \bigcup \{ \overline{\varphi} : \varphi$ — максимальный открытый фильтр, $\tau \subseteq \varphi\}$. Дизъюнктность этого объединения отмечалась в начале п. 2, а равномерность каждого левого идеала $\overline{\varphi}$ подтверждается леммой 2.1. Включение $D \subseteq J$ следует из леммы 2.6, свойств 2.5 и 2.2. Пусть $p \in \overline{\varphi}$, φ — максимальный открытый фильтр, $\tau \subseteq \varphi$. Согласно свойству 2.4 $\varphi = o(p)$. Так как $\tau \subseteq \varphi$, то $p \in \overline{\tau}$ и по лемме 2.6 $p \in D$. Значит, $J \subseteq D$.

3. Левые идеалы, связанные с замкнутыми фильтрами. На протяжении п. 3 мы предполагаем все рассматриваемые топологические группы (G, τ) *хаусдорфовыми*, а их подпространства $G \setminus \{e\}$, где e — единица группы G, *нормальными*. Возможности отказа от требования нормальности обсуждаются в замечании 3.7.

Сходящийся к единице фильтр φ на топологической группе (G, τ) назовем *замкнутым*, если φ имеет базис из подмножеств подпространства $G \setminus \{e\}$, замкнутых в этом подпространстве. Фильтр, максимальный в классе всех замкнутых фильтров на топологической группе (G, τ), назовем *максимальным замкнутым фильтром.*

Замкнутой оболочкой свободного ультрафильтра $p \in \overline{\tau}$ назовем фильтр $c(p)$ с базисом из подмножеств $(\operatorname{cl}(A)) \setminus \{e\}$, где A пробегает все элементы ультрафильтра p. Очевидно, что $c(p) \subseteq p$ и $c(p)$ — замкнутый фильтр.

3.1. **Лемма.** *Для любого свободного ультрафильтра* $p \in \overline{\tau}$ *существует и единствен максимальный замкнутый фильтр* $\operatorname{tr}(p)$, *содержащий фильтр* $c(p)$. *Фильтр* $\operatorname{tr}(p)$ *назовем следом ультрафильтра* p.

Доказательство. Пользуясь леммой Куратовского – Цорна, дополним замкнутый фильтр $c(p)$ до максимального замкнутого фильтра φ, что и доказывает существование искомого фильтра. Предположим, что заключению леммы удовлетворяет также некоторый максимальный замкнутый фильтр ψ, отличный от φ. Так как $\varphi \neq \psi$ и φ, ψ — максимальные замкнутые фильтры, то найдутся такие замкнутые в подпространстве $G \setminus \{e\}$ подмножества A, B, что $A \in \varphi$, $B \in \psi$ и $A \cap B = \varnothing$. Пользуясь нормальностью подпространства $G \setminus \{e\}$ и хаусдорфовостью группы (G, τ), выберем такие дизьюктные открытые в (G, τ) подмножества U, V, что $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Так как $(G \setminus U) \cup \cup (G \setminus V) = G$, то по крайней мере одно из подмножеств объединения, например $G \setminus U$, принадлежит ультрафильтру p. Поскольку подмножество $G \setminus U$ замкнуто, то $G \setminus U \in c(p)$. Из включения $c(p) \subseteq \varphi$ следует, что $G \setminus U \in \varphi$. Так как $U \in \varphi$, $G \setminus U \in \varphi$ и $U \cap (G \setminus U) = \varnothing$, то получили противоречие с тем, что φ — фильтр.

3.2. **Лемма.** *Для любого свободного ультрафильтра* $p \in \overline{\tau}$ *выполняется включение* $o(\operatorname{tr}(p)) \subseteq p$.

Доказательство. Допустим противное и выберем такое открытое подмножество $U \in o(\mathrm{tr}(p))$, что $G \backslash U \in p$. Из включения $o(\mathrm{tr}(p)) \subseteq \mathrm{tr}(p)$ следует, что $U \in \mathrm{tr}(p)$. Так как подмножество $G \backslash U$ замкнуто и $G \backslash U \in p$, то $G \backslash U \in$ $\in c(p)$. Из включения $c(p) \subseteq \mathrm{tr}(p)$ вытекает, что $G \backslash U \in \mathrm{tr}(p)$. Поскольку $U \bigcap (G \backslash U) = \varnothing$, пришли к противоречию с тем, что $\mathrm{tr}(p)$ — фильтр.

3.3. **Лемма.** *Если* φ — *максимальный замкнутый фильтр на топологической группе* (G, τ), *то* $\overline{o(\varphi)} = \{p \in \overline{\tau} \backslash \{e\} : \mathrm{tr}(p) = \varphi\}$.

Доказательство. Пусть $p \in \overline{\tau} \backslash \{e\}$, $\mathrm{tr}(p) = \varphi$. По лемме 3.2 $o(\varphi) \subseteq p$, т. е. $p \in \overline{o(\varphi)}$.

Пусть $p \in \overline{o(\varphi)}$, однако $\mathrm{tr}(p) = \psi$ и $\varphi \neq \psi$. Так как φ, ψ — различные максимальные замкнутые фильтры, то найдутся такие замкнутые в $G \backslash \{e\}$ подмножества $A \in \varphi$, $B \in \psi$, что $A \bigcap B = \varnothing$. Поскольку группа (G, τ) хаусдорфова, а подпространство $G \backslash \{e\}$ нормально, существуют такие открытые подмножества U, V, что $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ и $U \bigcap V = \varnothing$. Из соотношений $V \in$ $\in o(\psi)$, $o(\psi) = o(\mathrm{tr}(p))$ и леммы 3.2 вытекает, что $V \in p$. Так как $o(\varphi) \subseteq p$ и $U \in o(\varphi)$, то $U \in p$. Поскольку $U \bigcap V = \varnothing$ и $U, V \in p$, получили противоречие с тем, что p — фильтр.

3.4. **Лемма.** *Если* φ, ψ — *различные максимальные замкнутые фильтры на топологической группе* (G, τ), *то* $\overline{o(\varphi)} \bigcap \overline{o(\psi)} = \varnothing$.

Доказательство непосредственно следует из однозначности в определении следа ультрафильтра и леммы 3.3.

3.5. **Теорема.** *Полугруппа* $\overline{\tau} \backslash \{e\}$ *равна дизъюнктному объединению равномерных левых идеалов* $\overline{o(\varphi)}$ *по всем максимальным замкнутым фильтрам* φ *на топологической группе* (G, τ).

Доказательство. Положим $J = \bigcup \{\overline{o(\varphi)}$, φ — максимальный замкнутый фильтр на группе $(G, \tau)\}$. Дизъюнктность этого объединения и равномерность левых идеалов $\overline{o(\varphi)}$ вытекают соответственно из лемм 3.4 и 2.1. Возьмем произвольный свободный ультрафильтр $p \in \overline{\tau}$ и положим $\varphi = \mathrm{tr}(p)$. По лемме 3.1 φ — максимальный замкнутый фильтр. Из леммы 3.3 следует, что $p \in$ $\in \overline{o(\varphi)}$. Значит, $\overline{\tau} \backslash \{e\} \subseteq J$. Обратное включение очевидно.

3.6. ***Замечание.*** Предположим, что топологическая группа (G, τ) недискретна и метризуема. Выберем последовательность a_n различных элементов группы G, сходящуюся к единице. Пусть A — подмножество из G, состоящее из членов этой последовательности. Очевидно, что любой свободный ультрафильтр, элементом которого является подмножество A, является максимальным замкнутым фильтром на (G, τ). Число γ таких ультрафильтров равно $\exp(\exp \aleph_0)$. По теореме 3.5 полугруппа $\overline{\tau}$ содержит семейство из γ попарно непересекающихся замкнутых левых идеалов. Этот факт интересно сравнить с теоремой Рупперта [3], согласно которой любой замкнутый левый идеал в βG является идеалом при условии, что группа G коммутативна. В этом случае любые два замкнутые левые идеалы полугруппы βG пересекаются.

3.7. ***Замечание.*** Откажемся от условия нормальности подпространства $G \backslash \{e\}$ и укажем некоторый аналог разложения полугруппы $\overline{\tau} \backslash \{e\}$ из теоремы 3.5. Замкнутый фильтр φ на топологической группе (G, τ) назовем *примитивным*, если для любых замкнутых в $G \backslash \{e\}$ подмножеств A и B условие $A \bigcup B \in \varphi$ влечет $A \in \varphi$, либо $B \in \varphi$. Очевидно, что любой максимальный замкнутый фильтр примитивен. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Если p — свободный ультрафильтр из $\overline{\tau}$, то $c(p)$ — примитивный замкнутый фильтр. Поэтому очевидно разложение $\overline{\tau} \backslash \{e\} = \bigcup \{\overline{o(\varphi)} : \varphi$ — примитивный замкнутый фильтр на $(G, \tau)\}$. Недостаток этого разложения

— отсутствие дизъюнктности даже в случае метризуемости топологии.

4. Свободные подполугруппы полугруппы $\bar{\tau}$. Подмножество A топологической группы (G, τ) назовем *сильно дискретным*, если для каждого элемента $a \in A$ можно выбрать такую его окрестность $U(a)$, что $U(a) \cap \cap U(b) = \varnothing$ для любых различных элементов $a, b \in A$.

4.1. **Лемма.** *Пусть ультрафильтр $q \in \bar{\tau}$ содержит сильно дискретное подмножество $Q \subseteq G$. Тогда для любых ультрафильтров p, $r \in \bar{\tau}$ из условия $pq = rq$ следует $p = r$.*

Доказательство. Для каждого элемента $a \in Q$ выберем такую его окрестность $U(a)$, что $U(a) \cap U(b) = \varnothing$ для любых различных элементов a, $b \in Q$. Допустим, что $p \neq r$. Тогда для каждого элемента $a \in Q$ найдутся такие подмножества $P_a \in p$ и $R_a \in r$, что $P_a \cap R_a = \varnothing$ и $P_a a \subseteq U(a)$, $R_a a \subseteq \subseteq U(a)$. Положим $P = \bigcup \{P_a a : a \in Q\}$, $R = \bigcup \{R_a a : a \in Q\}$. Тогда $P \in pq$, $R \in rq$ и $P \cap R = \varnothing$, что противоречит условию $pq = rq$.

4.2. **Лемма.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — подмножество свободных ультрафильтров из $\bar{\tau}$, причем любые два различные ультрафильтры из $\mathfrak{F}$ содержат непересекающиеся сильно дискретные подмножества, отделимые открытыми подмножествами топологической группы (G, τ). Тогда $\mathfrak{F}$ порождает свободную подполугруппу полугруппы $\bar{\tau}$.*

Доказательство. Пусть $\omega_1 = p_1 \dots p_n$, $\omega_2 = r_1 \dots r_m$, где $p_1, \dots, p_n, r_1, \dots \dots, r_m \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $\omega_1 = \omega_2$. По лемме 2.1 $\overline{o(p_n)}$, $\overline{o(r_m)}$ — левые идеалы полугруппы $\bar{\tau}$. Поскольку $p_n \in \overline{o(p_n)}$, $r_m \in \overline{o(r_m)}$, то $\omega_1 \in \overline{o(p_n)}$, $\omega_2 \in \overline{o(r_m)}$. Допустим, что $p_n \neq r_m$. Выберем такие сильно дискретные подмножества $P \in p_n$, $R \in r_m$ и непересекающиеся открытые подмножества U, V, что $P \subseteq U$, $R \subseteq V$. Тогда $V \in o(r_m)$, $U \in o(p_n)$ и $\bar{U} \cap \bar{V} = \varnothing$. Следовательно, $\overline{o(p_n)} \cap \overline{o(r_m)} = \varnothing$, что противоречит предположению $\omega_1 = \omega_2$. Поэтому $p_n = = r_m$ и по лемме 4.1 $p_1 \dots p_{n-1} = r_1 \dots r_{m-1}$. Доказательство завершается индуктивными рассуждениями.

4.3. **Теорема.** *Если (G, τ) — недискретная метризуемая группа, то полугруппа $\bar{\tau} \setminus \{e\}$ содержит плотную свободную подполугруппу ранга $\geq \exp(\exp \aleph_0)$.*

Доказательство. Для каждого свободного ультрафильтра $p \in \bar{\tau}$ и каждого подмножества $P \in p$ можно ввиду метризуемости группы (G, τ) выбрать последовательность различных элементов $a_n \in P$, сходящуюся к единице. Очевидно, что подмножество $A = \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ сильно дискретно и любые два непересекающиеся подмножества такого вида отделимы открытыми подмножествами. Обозначим через $\mathfrak{F}(p, P)$ семейство всех свободных ультрафильтров, элементами которых является подмножество A. Заметим, что $|\mathfrak{F}(p, P)| = \exp(\exp \aleph_0)$. Положим $\mathfrak{F} = \bigcup \{\mathfrak{F}(p, P) : p \in \bar{\tau} \setminus \{e\},\ P \in p\}$. Плотное в $\bar{\tau} \setminus \{e\}$ подмножество $\mathfrak{F}$ порождает согласно лемме 4.2 искомую свободную подполугруппу.

1. *Протасов И. В.* Ультрафильтры и топологии на группах // Сиб. мат. журн.–1993.–**34**, № 5. – С. 163–180.
2. *Hindman N.* Ultrafilters and combinatorial number theory // Lec. Notes Math.–1979.–**751**. – P. 49–184.
3. *Ruppert W.* In a left-topological semigroup with dense center the closure of any left ideal is an ideal // Semigroup Forum.–1987. – **36**.–P. 247.

Получено 27.01.94