УДК 517.9

А. С. Миненко, канд. физ.-мат. наук (Донецк. политехн. ин-т)

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Solvability of the boundary-value problem with the Bernoulli condition on a free boundary given by an inequality is proved. By using the Ritz method, an approximate solution convergent to an exact solution in the integral metric is constructed.

Доведена розв'язуваність граничної задачі, коли на вільній границі задана умова Бернуллі у вигляді нерівності. Методом Рітца будується наближений розв'язок, збіжний до точного розв'язку в інтегральній метриці.

Широкий класс нелинейных краевых задач со свободной границей, имеющих вариационную природу, допускает эффективное исследование методом интегральных функционалов с переменной областью интегрирования. При этом физическая сущность исследуемых проблем может быть достаточно разнообразной. Это могут быть задачи типа Стефана [1–4] в теплофизике или задачи нахождения свободных струй в гидродинамике, т. е. задачи типа Бернулли [5–7]. Основным достоинством вариационного подхода является возможность применения прямых методов математической физики. В частности, применение метода Ритца позволяет получить приближенное решение рассматриваемого класса задач и исследовать его сходимость к точному решению [8–11].

В данной работе исследуется осесимметричный поток, протекающий в расширяющейся области типа сопла. Доказана классическая разрешимость соответствующей нелинейной краевой задачи и установлена сходимость приближенного решения к точному решению в интегральной метрике. При доказательстве используется методика, развитая в работах [1, 12–14], которая существенно отличается от методики исследования вариационных проблем, разработанной в [15, 16].

1. Постановка задачи. Изучается осесимметрическое течение жидкости, когда ось Ox является осью симметрии потока, а на свободной границе задается условие Бернулли. Введем следующие обозначения. Пусть G — область, ограниченная снизу отрезком $B = (0 \le x \le a, y = 0)$, по бокам вертикалями $\Gamma_1 = (x = 0, 0 \le y \le c)$, $\Gamma_2 = (x = a, 0 \le y \le b)$ и сверху кривой $S: y = g(x)$, $0 \le \le x \le a$, где $c < b$, $g(0) = a$, $g(a) = b$, а $g(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция такая, что $g'(0) = 0$ и $g'(a) = 0$. Далее, пусть γ — достаточно гладкая кривая без самопересечений, расположенная в $G \bigcup S$. Предполагается, что одним концом γ служит точка $(0, c)$, а другой лежит на Γ_2. Наконец, через $G_\gamma \subset G$ будем обозначать область, ограниченную отрезком B, вертикалями Γ_1, Γ_2 и кривой γ.

Будем рассматривать следующую нелинейную краевую задачу со свободной границей γ. В односвязной области G_γ требуется определить функцию тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - y^{-1}\psi_y = \omega y, \quad (x, y) \in G_\gamma, \quad \omega = \text{const} > 0, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2}$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2, \tag{3}$$

$$\psi(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 \ge v^2 y^2, \quad (x, y) \in \gamma, \quad v = \text{const} > 0, \tag{5}$$

причем на части γ, лежащей внутри G_γ, в условии (5) должно выполняться равенство.

Решение задачи (1) – (5) описывает осесимметричный поток, протекающий в достаточно длинной, но ограниченной области G. Существенным отличием этой задачи от рассматриваемых ранее [16, 17] является наличие неравенства в условии (5), когда γ совпадает с S.

2. Вариационная постановка задачи (1) – (5). Введем в рассмотрение функционал с неизвестной областью интегрирования

$$J(\psi, \gamma) = \iint\limits_{G_\gamma} \left[\psi_x^2 + \psi_y^2 + \upsilon^2 y^2 + 2\omega y(\psi - 1)\right] \frac{dx\,dy}{y} \tag{6}$$

на множестве R допустимых пар, удовлетворяющих следующим условиям: γ — жорданова дуга, расположенная в $G \bigcup S$, концами которой служат точки $(0, c)$ и (a, b), причем все точки γ, за исключением точки $(0, c)$, находятся выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ — непрерывна в замыкании области G_γ, равна единице на γ, нулю на отрезке B и имеет непрерывно дифференцируемые производные в G_γ, причем $J(\psi, \gamma) < \infty$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть пара* (ψ, γ) *является классическим решением задачи* (1) – (5). *Тогда эта пара будет стационарной для функционала* (6) *на множестве* R. *Обратно, каждая стационарная пара* (ψ, γ) *функционала* (6) *на множестве* R, *где* γ *— достаточно гладкая кривая без самопересечений, является решением задачи* (1) – (5).

Доказательство. Предположим вначале, что концы свободной границы γ проходят через точки $(0, c)$ и (a, b). Тогда из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования следует

$$\delta J\left(\psi, G_\gamma; \delta\psi, \overline{\delta z}\right) = -2 \iint\limits_{G_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \omega\right] \delta\psi\, dx\, dy \; +$$

$$+\; 2 \int\limits_{\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2} \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial n}\delta\psi\, ds + \int\limits_{\gamma} \left[\upsilon^2 y^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2\right] \frac{\left(\vec{n}, \overrightarrow{\delta z}\right)}{y}\, ds. \tag{7}$$

Здесь $\delta\psi$ — вариация функции ψ при неизменной области интегрирования, $\overrightarrow{\delta z} = (\delta x, \delta y)$ — вариация независимых переменных при переходе от области G_γ к некоторой близкой к ней области, а $\vec{n}$ — внешняя нормаль. Учитывая теперь, что каждая из компонент пары (ψ, γ) может быть проварьирована независимо в пределах допустимости, получаем необходимое утверждение, так как на стационарной паре первая вариация либо обращается в нуль, либо принимает неотрицательные значения [14]. Заметим также, что на части γ, совпадающей с S, обязательно выполняется условие $(\vec{n}, \overrightarrow{\delta z}) \le 0$. Отсюда будет следовать, что в этом случае в условии (5) имеет место неравенство. Наконец, если концы γ проходят через точки $(0, c)$, (a, h), где $c < h < b$, то функционал (6) необходимо рассмотреть на множестве R_h. При этом R_h отличается от R лишь тем, что концы кривой γ проходят через точки $(0, c)$, (a, h) и все ее точки расположены ниже прямой $y = h$, за исключением правого конца (a, h) (величина h заранее неизвестна, более подробно этот случай рассмотрен при доказательстве теоремы существования).

3. Симметризация области G_γ. Будем считать γ фиксированной допустимой кривой, т. е. область G_γ предполагается заданной. Построим решение линейной задачи (1) – (4) в области G_γ. Для этого введем в рассмотрение множество U допустимых функций $\psi(x, y)$, непрерывных в $\overline{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируемых в G_γ, равных нулю на отрезке B, единице на γ и таких, что функционал

$$L(\psi) = \iint\limits_{G_\gamma} \left[\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2\omega(\psi - 1)y \right] \frac{dx\,dy}{y}$$

всегда принимает на U конечные значения.

Лемма 2. *Существует единственная функция* $\psi(x, y) \in U$, *на которой функционал* $L(\psi)$ *достигает своего наименьшего значения. Эта функция является единственным решением задачи* (1)–(4). *Если* γ *является также спрямляемой кривой, то справедливо следующее представление*:

$$J(\psi, \gamma) = \int\limits_B \left[\frac{1}{y} \psi_y(x, y) \right] \Bigg|_{y=0} dx + v^2 \iint\limits_{G_\gamma} dx\,dy + \omega \iint\limits_{G_\gamma} (\psi - 1)\,dx\,dy. \qquad (8)$$

Доказательство леммы основывается на формуле Грина и проводится аналогично тому, как это сделано в работе [1]. При этом отметим, что поскольку решение задачи (1)–(4) может быть представлено в виде $\psi(x, y) = y^2\alpha(x, y)$, где $\alpha(x, y)$ — достаточно гладкая функция, то

$$\int\limits_B \left[\frac{1}{y} \psi_y(x, y) \right] \Bigg|_{y=0} dx = 2 \int\limits_0^a \alpha(x, 0)\,dx.$$

Определим теперь симметризацию области G_γ относительно осей координат по Штейнеру [6] через симметризацию дополнения $\Omega = \Pi \setminus G_\gamma$, $\Pi = (0 < x < a,\ 0 < y < b)$, относительно оси Ox и прямой $y = b$ с последующим продолжением функции $\psi(x, y)$ единицей в Ω. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\psi(x, y)$ — *решение задачи* (1)–(4) *в области* G_γ, *а* $\psi^*(x, y)$ — *решение этой же задачи в просимметризованной относительно осей координат области* G^* *со свободной границей* γ^*. *Тогда* $J(\psi^*, \gamma^*) \le J(\psi, \gamma)$, *причем* $\psi_x^*(x, y) < 0$, $\psi_y^*(x, y) > 0$ *в* G^*, *а* γ^* *задается уравнением*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \le t \le T,$$

где $x(t)$, $y(t)$ — *монотонно возрастающие функции при* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Вначале рассмотрим симметризацию относительно оси Ox. Смысл ее состоит в том, что при каждом фиксированном $x_0 \in [0, a]$ функция $\psi(x_0, y)$ заменяется неубывающей функцией $\psi^*(x_0, y)$ такой, что при любом вещественном r справедливо равенство $\operatorname{mes}\{y : \psi(x_0, y) < r\} = \operatorname{mes}\{y : \psi^*(x_0, y) < r\}$.

Пусть G^* — область, полученная из G_γ с помощью симметризации относительно оси Ox, а γ^* — соответствующая ей свободная граница. Тогда аналогично тому, как это сделано в [6, 13], можно доказать, что

$$\iint\limits_{G^*} \left| \nabla \psi^* \right|^2 \frac{dx\,dy}{y} \le \iint\limits_{G_\gamma} |\nabla \psi|^2 \frac{dx\,dy}{y}.$$

Кроме того, непосредственно из определения симметризации и ее свойств следует равенство

$$\iint_{G^*}\left[v^2y^2+2\omega y\left(\psi^*-1\right)\right]\frac{dx\,dy}{y} = \iint_{G_\gamma}\left[v^2y^2+2\omega y(\psi-1)\right]\frac{dx\,dy}{y}.$$

Теперь нетрудно установить, что $J(\psi^*,\gamma^*)\le J(\psi,\gamma)$. Заменим затем функцию $\psi^*(x,y)$ решением задачи (1) – (4) в области G^*. Тогда в силу леммы 2 последнее неравенство только усилится. Поступая точно так же при симметризации области G^* относительно прямой $y=b$, докажем утверждение леммы, причем справедливость неравенств $\psi^*_y(x,y)>0$, $\psi^*_x(x,y)<0$ при $(x,y)\in G^*$ следует из геометрического смысла симметризации.

4. Доказательство теоремы существования. Пусть d — точная нижняя грань функционала (6) на множестве R, а (ψ_n, G_n) — минимизирующая последовательность. На основании леммы 3 свободные границы областей G_n задаются с помощью уравнений $x=x_n(t)$, $y=y_n(t)$, $t\in[0,T]$, где $x_n(t)$, $y_n(t)$ — монотонно возрастающие функции при $0\le t\le T$. В силу леммы 2 в качестве функций $\psi_n(x,y)$ берутся решения задачи (1) – (4) в областях G_n. Далее ввиду монотонности кривых γ_n из последовательности $\{\gamma_n\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой предельной кривой γ, в системе координат (ξ,η), повернутой относительно системы (x,y) на угол $\pi/4$ в положительном направлении. При этом предельная кривая γ не обязательно окажется допустимой, так как может иметь общие отрезки с вертикалями Γ_2 и горизонталью $y=c$. Установим теперь компактность последовательности $\psi_n(x,y)$, исходя из субгармоничности этих функций, ибо $\psi_{ny}(x,y)>0$ в G_n. Используя принцип максимума, нетрудно показать, что при $(x,y)\in\overline{G}_n$ справедливы неравенства $\psi_n(x,y)\le 1$ и $0\le y^2(1-\omega b^3/3)/b^2+$ $+\omega y^3/3\le\psi_n(x,y)$, причем оценка снизу имеет место в предположении, что

$$1-\frac{\omega b^3}{3}>0. \tag{9}$$

Кроме того, $\psi_n(x,y)\le y^2(1-\omega c^3/3)/c^2+\omega y^3/3$ при $0\le x\le a$, $0\le y\le c$. Воспользуемся затем представлением $\psi_n(x,y)=\xi_n(x,y)+\omega y^3/3$ при $(x,y)\in$ $\in\overline{G}_n$, где $\xi_n(x,y)$ — решение уравнения $\xi_{nxx}+\xi_{nyy}-y^{-1}\xi_{ny}=0$ в G_n, удовлетворяющее граничным условиям (2), (3) и условию $\xi_n(x,y)=1-\omega y^3/3$ при $(x,y)\in\gamma_n$. Рассматривая теперь гармонические в G_n функции $\varphi_n(x,y)$ такие, что $\varphi_{nx}=y^{-1}\xi_{ny}$, $\varphi_{ny}=-y^{-1}\xi_{nx}$, можно установить равномерную ограниченность производных любого порядка функций $\xi_n(x,y)$ в каждой замкнутой подобласти предельной области G_γ, не содержащей точек γ. Отсюда будет следовать, что предельная функция $\psi_n(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в G_γ и условию (3). Ввиду равномерной сходимости $\psi_n(x,0)$ к $\psi(x,0)$ (это справедливо в силу того, что функции $\psi_n(x,-y)$ являются решениями уравнения (1) в областях G'_n, симметричных областям G_n относительно оси Ox) можно показать также, что выполняется условие (2), т. е. $\psi(x,0)=0$, $0\le$ $\le x\le a$. Далее, функция $\psi(x,y)$ продолжается по непрерывности единицей в каждую внутреннюю точку $z_0=x_0+iy_0$ кривой γ. Для этого в плоскости $z=$ $=x+iy$ необходимо провести разрез вдоль луча l, проходящего через z_0 под углом $3\pi/4$ к оси абсцисс, и воспользоваться неравенством

$$|\psi_n(z)-1| \le A\,\mathrm{Re}\,[e^{i\pi/4}(z-z_n)]^{1/2}, \quad z_n \in \gamma_n, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0,$$

справедливым для любого $z \in \overline{G}_n$ при достаточно большом значении постоянной A [1]. Отсюда, взяв в качестве z произвольную точку области G_γ и перейдя к пределу при $n \to \infty$ и $z \to z_0$, получим требуемое утверждение: $\psi(x, y) = 1$ при $(x, y) \in \gamma$, включая левый и правый концы γ [1]. Таким образом, предельная функция $\psi(x, y)$ является решением задачи (1) – (4) и $J(\psi, \gamma) < \infty$. Применив теперь лемму 2, будем иметь

$$\iint\limits_{G_\gamma} \left[|\nabla\psi|^2 + v^2 y^2 + 2\omega y(\psi-1)\right] \frac{dx\,dy}{y} =$$

$$= 2\int\limits_B \alpha(x,0)\,dx + v^2 \iint\limits_{G_\gamma} y\,dx\,dy + \omega \iint\limits_{G_\gamma} (\psi-1)\,dx\,dy,$$

где $\psi(x, y) = y^2\alpha(x, y)$, $\psi_y y^{-1} = 2\alpha(x, 0) = \varphi_x(x, 0)$ при $y = 0$. Использовав затем равномерную сходимость $\psi_n(x, y) = y^2\alpha_n(x, y)$ к $\psi(x, y)$ при $0 \le x \le a$, $y = 0$, а тогда и $\alpha_n(x, 0)$ к $\alpha(x, 0)$ при $0 \le x \le a$, с учетом соотношения $(\psi_{ny} y^{-1})|_{y=0} = 2\alpha_n(x, 0) = \varphi_{nx}(x, 0)$ докажем, что

$$d = \lim_{n\to\infty} \left[2\int\limits_B \alpha_n(x,0)\,dx + v^2 \iint\limits_{G_\gamma} y\,dx\,dy + \omega \iint\limits_{G_\gamma} (\psi_n - 1)\,dx\,dy \right] = J(\psi, \gamma).$$

Наконец, воспользовавшись внутренними вариациями Шиффера [13], можно установить, что условие (5) на части γ, лежащей внутри G, выполняется почти всюду.

При дальнейшем исследовании предельной кривой γ получаем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (9) *и справедливы неравенства*

$$v < \frac{1}{c^2}\left[2 + \frac{\omega c^3}{3}\right], \quad \omega\,\mathrm{mes}\,G + \frac{2a}{c^2}\left[1 - \frac{\omega c^3}{3}\right] < v\int\limits_0^a \sqrt{1+g_x^2}\,dx. \quad (10)$$

Тогда предельная область G_γ *не может совпадать с* G *и все точки кривой* γ, *за исключением левого конца* $(0, c)$, *лежат выше прямой* $y = c$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть G_γ совпадает с G. Тогда, воспользовавшись формулой Грина, получим равенство

$$\int\limits_S \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial n}\,ds = 2\int\limits_B \alpha(x,0)\,dx + \omega \iint\limits_G dx\,dy.$$

Используя затем оценку $\psi(x, y) = y^2\alpha(x, y) \le y^2(1-\omega c^3/3)/c^2 + \omega y^3/3$, $\alpha(x, y) \le (1-\omega c^3/3)/c^2 + \omega y/3$ при $0 \le x \le a$, $0 \le y \le c$, получаем неравенство

$$v\int\limits_0^a \sqrt{1+g_x^2}\,dx \le \omega\,\mathrm{mes}\,G + \frac{2a}{c^2}\left[1 - \frac{\omega c^3}{3}\right],$$

которое противоречит предположению леммы.

Далее, пусть γ совпадает с отрезком $\gamma_0 = (0 \le x \le a, y = c)$. Тогда $\psi_0(x, y) = y^2(1-\omega c^3/3)/c^2 + \omega y^3/3$ является решением задачи (1) – (4) в $G_{\gamma_0} = \{0 < x < a, 0 < y < c\}$. В силу принципа максимума $\psi_0 \equiv \psi$ при $(x, y) \in \overline{G}_{\gamma_0}$. Следовательно, $J(\psi_0, \gamma_0) = J(\psi, \gamma) = d$. Вычислим теперь вариацию функционала (6) на паре (ψ_0, γ_0) при достаточно малых значениях $\max|\vec{\delta z}|$, $(\vec{n}, \vec{\delta z}) \geq$ ≥ 0 и $\vec{\delta z} = 0$ в точках $(0, c)$ и (a, c). Из формулы (7) следует, что

$$\delta J\left(\psi, G_\gamma; \delta\psi, \vec{\delta z}\right) = \int_{\gamma_0} \left\{ v^2 c^2 - \left[\frac{2}{c}\left(1 - \frac{\omega c^2}{3}\right) + \omega c^2 \right]^2 \right\} \frac{\left(\vec{n}, \vec{\delta z}\right)}{c} ds < 0.$$

Следовательно, для проварьированной области $\tilde{G}_\gamma$ со свободной границей $\tilde{\gamma}$ и решения задачи (1) – (4) $\tilde{\psi}(x, y)$ будем иметь $J\left(\tilde{\psi}, \tilde{\gamma}\right) < J(\psi, \gamma) = d$. Переходя затем к области G^*_γ, являющейся результатом симметризации области $\tilde{G}_\gamma$ относительно оси y, получаем для решения задачи (1)– (4) $\psi^*(x, y)$ в G^*_γ неравенство $J(\psi^*, \gamma^*) \leq J\left(\tilde{\psi}, \tilde{\gamma}\right) < d$ (здесь γ^* — свободная граница области G^*_γ). Построим теперь допустимую кривую γ', состоящую из части γ^* так, чтобы $G^*_\gamma \subset G_{\gamma'}$, и обозначим через $\psi'(x, y)$ решение задачи (1) – (4) в области $G_{\gamma'}$. Очевидно, $(\psi', \gamma') \in R$. Тогда, учитывая, что $\psi^*(x, y) - \psi'(x, y) \geq 0$ в $\overline{G^*_\gamma}$, аналогично тому, как это сделано в [6], получаем неравенство

$$d \leq J(\psi', \gamma') \leq J(\psi^*, \gamma^*) + v^2 b^2 \operatorname{mes}(G_{\gamma'} \setminus G^*_\gamma) < d,$$

справедливое при достаточно малых значениях величины $\operatorname{mes}(G_{\gamma'} \setminus G^*_\gamma)$. Итак, приходим к противоречию, так как (ψ', γ') — допустимая пара. Подобным образом исследуются остальные случаи. Лемма доказана.

Обозначим затем через $z_0 = x_0 + iy_0$ произвольную внутреннюю точку γ, расположенную внутри G, а через K_r — круг достаточно малого радиуса с центром в точке z_0. Используя методику работы [13], можно установить существование аналитической функции $g(t)$, $t = \xi + i\eta$, в области $G_\gamma \cap K_r$, которая непрерывна в этой области вплоть до границы γ и принимает на γ граничное значение $g(t) = \bar{t}$ [1, 18]. Пусть $w(t)$ — конформное отображение $G_\gamma \cap K_r$ на верхнюю полуплоскость. Согласно принципу Шварца функции $\Phi_1 = g(t) + \bar{t}$ и $\Phi_2 = g(t) - \bar{t}$ могут быть аналитически продолжены через те сегменты действительной оси w-плоскости, которые соответствуют γ. Тогда функция $t(w) = (\Phi_1 - \Phi_2)/2$ также аналитически продолжима через эти сегменты. Следовательно, γ — аналитическая дуга. Сформулируем теперь теорему существования.

Теорема 1. *Пусть S — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leq x \leq a$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, причем $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$. И пусть выполнены условия* (9) *и* (10). *Тогда существует единственное решение задачи* (1) – (5). *При этом пара (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ — монотонно возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G; $\psi(x, y)$ — функция, непрерывная в $\overline{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируемая всюду в $\overline{G}_\gamma$, за исключением точки (a, h), $c < h \leq b$, являющейся правым концом γ, и $\psi_y(x, y) > 0$ в G_γ.*

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда предельная кривая γ частично совпадает с Γ_2, т. е. содержит отрезок $x = a$, $h \leq y \leq b$, где $c < h$. Обозначим через γ_0 часть γ, лежащую в G, концами которой являются точки $(0, c)$ и (a, h). Очевидно, что $J(\psi, \gamma) = J(\psi, \gamma_0) = d$. Далее, рассмотрим задачу о минимуме функционала (6) на множестве допустимых пар R_h и покажем, что пара (ψ, γ_0) является решением этой задачи. Действительно, пусть d_h — точная нижняя грань функционала (6) на множестве R_h. Тогда, учитывая, что $(\psi, \gamma_0) \in R_h$, имеем $d_h \le J(\psi, \gamma_0) = d$, т. е. $d_h \le d$. С другой стороны, возьмем произвольную пару $(\psi_1, \gamma_1) \in R_h$, причем в качестве $\psi_1(x, y)$ можно взять решение задачи (1) – (4) в G_{γ_1}. Затем, используя кривую γ_1, построим кривую γ_2, допустимую в смысле R и такую, что $G_{\gamma_1} \in G_{\gamma_2}$. Пусть $\psi_2(x, y)$ — решение задачи (1) – (4) в G_{γ_2}. В силу принципа максимума имеем неравенство $\psi_1(x, y) - \psi_2(x, y) \ge 0$ в $\overline{G}_{\gamma_1}$. Отсюда, учитывая, что $\psi(x, y) = y^2\alpha_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y) = y^2\alpha_2(x, y)$, заключаем, что $\alpha_1(x, y) - \alpha_2(x, y) \ge 0$ в $\overline{G}_{\gamma_1}$. Далее, аналогично тому, как это сделано в лемме 4, получаем неравенство

$$d \le J(\psi_2, \gamma_2) \le J(\psi_1, \gamma_1) + v^2 b^2 \operatorname{mes}\left(G_{\gamma_2} \backslash G_{\gamma_1}\right).$$

В качестве $\psi_1(x, y)$ теперь можно взять произвольную допустимую функцию из R_h, определенную в $\overline{G}_{\gamma_1}$, так как правая часть последнего неравенства от этого лишь увеличится. Кроме того, величина $\varepsilon = v^2 b \operatorname{mes}\left(G_{\gamma_2} \backslash G_{\gamma_1}\right) \to 0$ при стягивании G_{γ_1} к G_{γ_2}. Следовательно, получим оценку $d \le d_h + \varepsilon$. Отсюда, устремив $\varepsilon \to 0$, будем иметь $d \le d_h$. Таким образом, $d = d_h = J(\psi, \gamma_0)$, т. е. пара (ψ, γ_0) является решением задачи (1) – (5), когда правым концом γ_0 служит точка (a, h) и $h \le b$. Теорема доказана. При этом единственность построенной пары (ψ, γ) следует из рассуждений Фридрихса, изложенных в [14].

5. Приближенное решение задачи (1) – (5) методом Ритца. В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (1) – (5) удовлетворяет условиям $\psi(x, y) \in C^1(\overline{G}_\gamma)$, $\psi_y(x, y) > 0$ в $\overline{G}_\gamma$, а кривые γ и S имеют конечное число общих точек. Следуя известной методике Фридрихса [14], представим функционал (6) следующим образом:

$$J_1(z) = \iint\limits_{\Delta} \left[\left(z_x + \frac{g_x}{g} z\right)^2 + \frac{1}{g^2} + v^2 g^2 z^2 z_\varphi^2 + 2\omega g(\varphi - 1) z z_\varphi^2\right] \frac{dx\,dy}{z z_\varphi}, \quad (11)$$

где $\Delta = (0 < x < a, 0 < \varphi < 1)$, $\varphi(x, z) = \psi(x, z g(x))$, $z(x, \varphi)$ — решение уравнения $\varphi(x, z) - \varphi = 0$. Функционал (11) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$D_z = \left\{ z:\ z \in C(\overline{\Delta}),\ \sqrt{\varphi}\, z_\varphi \in C(\overline{\Delta}),\ z(0,1) = 1,\ z(x,0) = 0, \right.$$

$$\left. \min_{(x,\varphi) \in \overline{\Delta}} \sqrt{\varphi}\, z_\varphi > 0 \right\}. \quad (12)$$

Через $z_0(x, \varphi)$ обозначим функцию, соответствующую решению задачи (1) – – (5). Очевидно, что $z_0 \in D_z$ и z_0 может быть представлено в виде $z_0 = \sqrt{\varphi}\, \eta(x, \varphi)$, где $\eta(x, \varphi)$ — достаточно гладкая функция и $\eta(x, 0) \ne 0$.

Лемма 5. *Элемент* $z_0(x, \varphi)$, *соответствующий решению задачи* (1) – (5), *доставляет наименьшее значение функционалу* (11) *на множестве* (12).

Доказательство. Положим $w(x, y) = \ln z(x, \varphi)$. Тогда семейство допустимых функций D_z перейдет в новое семейство D_w, при этом имеем

$$J_2(w) = \iint\limits_\Delta \left[\left(w_x + \frac{g_x}{g}\right)^2 + \frac{e^{-2w}}{g^2} + v^2 g^2 e^{2w} w_\varphi^2 + 2\omega g(\varphi-1)e^w w_\varphi^2\right]\frac{dx\,dy}{w_\varphi},$$

$$\int\limits_0^1 (1-\varepsilon)\frac{d^2 J_2(w_\varepsilon)}{d\varepsilon^2}d\varepsilon =$$

$$= 2\int\limits_0^1 (1-\varepsilon)\iint\limits_\Delta \left\{\left[w_{\varepsilon\varphi}\delta w_x - \delta w_\varphi\left(w_{\varepsilon x} + \frac{g_x}{g}\right)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-2w_\varepsilon}}{g^2}\left[w_{\varepsilon\varphi}^2 \delta w^2 + \left(w_{\varepsilon\varphi}\delta w + \delta w_\varphi\right)^2\right]\right\}\frac{d\varepsilon\,dx\,d\varphi}{w_{\varepsilon\varphi}^2} +$$

$$+ 2v^2 \int\limits_0^1 (1-\varepsilon)\int\limits_0^a g^2(x)\,e^{2w_\varepsilon(x,1)}\delta w^2(x,1)\,d\varepsilon\,dx, \tag{13}$$

где $J_1(z) = J_1(e^w) = J_2(w)$, $w_\varepsilon = w_0 + \varepsilon\delta w$, $\delta w = w - w_0$, $w_0 = \ln z_0$, $\delta z = z - z_0 = z_0\delta w$, $0 \le \varepsilon \le 1$, w — произвольный элемент из D_w. Используя теперь формулу Фридрихса [14]

$$J_2(w) = J_2(w_0) + \frac{d}{d\varepsilon}J_2(w_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} + \int\limits_0^1 (1-\varepsilon)\frac{d^2 J_2(w_\varepsilon)}{d\varepsilon^2}d\varepsilon \tag{14}$$

и учитывая, что первая вариация функционала $J_2(w)$, вычисленная на элементе w_0, обратится в нуль, заключаем, что $J_1(z_0) = J_2(w_0) \le J_2(w) = J_1(z)$ для любого элемента $z \in D_z$. Лемма доказана.

Будем минимизировать функционал (11) на множестве (12) с помощью сумм

$$z_n(x,\varphi,\alpha_{kj}) = z_n(x,\varphi) =$$

$$= \sqrt{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kJ}\,x^j\varphi^k, \quad n = \sup_{0\le k\le m}\left(k + m_k\right). \tag{15}$$

Включение $z_n \in D_z$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов α_{kj} область допустимости D_r, где

$$r = \sum_{k=0}^{m}\left(m_k + 1\right), \quad D_r = E_0^r \cap D_r^+, \quad E_0^r:\ \sum_{k=0}^{m} a_{k0} - 1 = 0,$$

$$D_r^+ = \left\{a_{kj}:\ z_n \in C(\overline{\Delta}),\ \sqrt{\varphi}\,z_{n\varphi} \in C(\overline{\Delta}),\ z_n(0,1) = 1,\ z_n(x,0) = 0,\right.$$

$$\left.\min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta}}\sqrt{\varphi}\,z_{n\varphi} > 0\right\}.$$

Неизвестные коэффициенты a_{kj} и множитель Лагранжа λ определяются из нелинейной системы Ритца:

$$\frac{\partial J_3(a_{kj})}{\partial a_{p0}} + \lambda = 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

$$\frac{\partial J_3(a_{kj})}{\partial a_{pq}} = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, m_p; \quad p = 0, 1, \ldots, m, \tag{16}$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_{k0} - 1 = 0, \quad J_3(a_{kj}) = J_1\left(\sqrt{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}\,x^j\varphi^k\right).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функция* $J_3(a_{kj})$ *принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке* a^*_{kj} *множества* D_r, *лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства* E_r.

Доказательство. Вначале покажем, что если последовательность (a_{kjp}) при неограниченном возрастании номера p стремится произвольным образом к бесконечности, то тогда $J_3(a_{kjp}) \to \infty$. Для этого обозначим через M_p^2 выражение $M_p^2 = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kjp}^2$ и положим $c_{kjp} = a_{kjp}/M_p$. Отсюда, учитывая соотношение $\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} c_{kjp}^2 = 1$, заключаем, что из последовательности $\{c_{kjp}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее предел через c^*_{kj}. Следовательно, можно считать, что $c_{kjp} \to c^*_{kj}$ при $p \to \infty$ для всех $j = 0, 1, 2, \ldots, m_k$; $k = 0, 1, \ldots, m$. Очевидно, не все числа c^*_{kj} одновременно обращаются в нуль. Далее, имеем

$$\frac{v^2}{2}\iint\limits_{\Delta} g^2(x)\frac{\partial}{\partial z} z_n^2(x,\varphi;a_{kjp})\,dx\,d\varphi = \frac{M_p^2}{2}v^2\int\limits_0^a g^2(x)\,z_n^2(x,1;c_{kjp})\,dx.$$

Переходя затем к пределу при $p \to \infty$, получаем $J_3(\alpha_{kjp}) \to +\infty$, так как

$$\lim_{p\to\infty} M_p^2\int\limits_0^a g^2(x)\,z_n^2(x,1;c_{kjp})\,dx = \int\limits_0^a g^2(x)\,z_n^2(x,1;c^*_{kj})\,dx \lim_{p\to\infty} M_p^2 \to +\infty$$

ввиду того, что $z_n(x,1;c^*_{kj}) \not\equiv 0$ при $x \in [0,a]$.

Рассмотрим теперь минимизирующую последовательность (a_{kjp}) для функции $J_3(a_{kj})$ на множестве D_r и пусть $d_r = \min J_3(a_{kj})$ при $a_{kj} \in D_r$. Эту последовательность можно считать компактной в E_r. Обозначим ее предел через a^*_{kj}, $j = 0, 1, 2, \ldots, m_k$; $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Очевидно, что предельная точка лежит на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r.

Установим теперь, что точка a^*_{kj} не может принадлежать границе множества D_r. Предположим противное. Тогда имеем

$$\min_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} \sqrt{\varphi}\, z_{n\varphi}(x,\varphi;a^*_{kj}) = \sqrt{\varphi_0}\, z_{n\varphi}(x_0,\varphi_0;a^*_{kj}) = 0, \quad (x_0,\varphi_0) \in \bar{\Delta}.$$

Рассмотрим случай, когда $\varphi_0 > 0$. Очевидно, что

$$\sqrt{\varphi_0}\, z_{n\varphi}(x_0,\varphi_0;a^*_{kj}) = (x - x_0)^{\alpha}(\varphi - \varphi_0)^{\beta}\kappa(x,\varphi),$$

где $1 \le \alpha$, $1 \le \beta$, а $\kappa(x,\varphi)$ — достаточно гладкая функция такая, что $\kappa(x_0, y_0) \ne 0$. Отсюда будет следовать, что $J_3(a^*_{kj}) \to \infty$, так как выражение

$$\iint\limits_{\Delta}\frac{1}{g^2}\frac{dx\,d\varphi}{z_n(x,\varphi;a^*_{kj})\,z_{n\varphi}(x,\varphi;a^*_{kj})}$$

имеет неинтегрируемую особенность. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Таким образом, существует внутренняя точка a^*_{kj} множества D_r, в которой функция $J_3(a_{kj})$ принимает свое наименьшее значение на d_r. Тогда в этой точке частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в нуль. Следовательно, система уравнений (16) имеет решение. Теорема доказана.

6. Сходимость приближений Ритца. Решив систему уравнений (16) при каждом фиксированном n, можно затем построить последовательность приближений (15) в виде $z_n\left(x,\varphi;a_{kj}^*\right) = z_n^*$.

Лемма 6. *Приближения* (15), *построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала* (11) *на множестве* (12).

Доказательство. Элемент $z_0 = \sqrt{\varphi}\,\eta(x,\varphi)$, доставляющий наименьшее значение функционалу (11) на множестве (12), может быть аппроксимирован многочленом в следующей норме:

$$\| z \| = \max|z| + \max|z_x| + \max\left|\sqrt{\varphi}\, z_n\right|,$$

где максимум берется по всем $(x,\varphi)\in\overline{\Delta}$. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и пусть $P_n(x,\varphi)$ — многочлен такой, что

$$\left\| z_0 - \sqrt{\varphi}\, P_n \right\| < \varepsilon, \quad P_n(z,\varphi) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} b_{kj}\, x^j \varphi^k .$$

Заметим, что в качестве $P_n(x,\varphi)$ можно взять многочлен, приближающий функцию $\eta(x,\varphi)\in C^1(\overline{\Delta})$ в силу теоремы Вейерштрасса. Покажем, что при этом многочлен $Q_n(x,\varphi)=\sqrt{\varphi}P_n(x,\varphi)$ можно считать допустимым. Действительно, если $Q_n(0,1)\neq 1$, то тогда положим $\tilde{Q}_n(x,\varphi)=Q_n(x,\varphi)/Q_n(0,1)$. Отсюда, ввиду того, что $Q_n(0,1)\to 1$ при $n\to\infty$, следует, что многочлен $\tilde{Q}_n(x,\varphi)$ также будет аппроксимировать элемент . $z_0(x,\varphi)$. Далее, имеем $\min\sqrt{\varphi}\, z_{0\varphi}>0$ при $(x,\varphi)\in\overline{\Delta}$. Следовательно, по крайней мере начиная с некоторого достаточно большого номера N и $\min\sqrt{\varphi}\,\tilde{Q}_{n\varphi}>0$ при $(x,\varphi)\in$ $\in\overline{\Delta}$. Итак, получим $\tilde{Q}_n\in D_z$. Рассмотрим теперь цепочку неравенств

$$J_1\left(z_n^*\right) - d \le J_1(z_n) - d = J_1(z_n) - J_1(z_0) < \tilde{\varepsilon},$$

где d — наименьшее значение функционала (11) на множестве (12), $z_n=$ $=\tilde{Q}_n(x,\varphi)$, а $d=J_1(z_0)$ в силу леммы 5. Отсюда следует утверждение леммы ввиду произвольности числа $\tilde{\varepsilon}$ [19].

Последовательность функций $z_n(x,1)$ позволяет приближенно найти свободную границу γ_n задачи (1)–(5) в виде $y_n(x,1)=g(x)z_n(x,1)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда последовательность* $z_n(x,1)$ *сходится по норме в* $L_2(0,a)$ *к* $z_0(x,1)$, *где* $z_0(x,\varphi)$ — *элемент, соответствующий решению задачи* (1)–(5).

Доказательство. Последовательность многочленов (15), коэффициенты которых удовлетворяют системе уравнений (16), образует минимизирующую последовательность для функционала (11) на множестве (12). Следовательно, имеем $\varepsilon_n=J_1(z_n)-J_1(z_0)\to 0$ при $n\to\infty$. Далее, из формулы (14) следует неравенство

$$\int_0^1 (1-\varepsilon)\frac{d^2 J_2\left(w_\varepsilon\right)}{d\varepsilon^2}\, d\varepsilon \le \varepsilon_n,$$

где $w_\varepsilon=w_0+\varepsilon(w_n-w_0)$, $w_0=\ln z_0$, $w_n=\ln z_n$, $0\le\varepsilon\le 1$. Отсюда можно получить

$$2v^2\int_0^1(1-\varepsilon)\int_0^a g^2(x)\,e^{2w_\varepsilon(x,1)}\delta w^2(x,1)\,d\varepsilon\,dx \le \varepsilon_n, \quad \delta w = w_n - w_0.$$

Произведя затем интегрирование по ε с учетом того, что $\delta z = \delta w \exp(w_0)$, получим оценку

$$\int_0^a \delta z^2(x,1)\,dx \le \frac{2\varepsilon_n}{v^2c^2}, \quad \delta z = z_n - z_0.$$

Таким образом, $\| z_n(x,1) - z_0(x,1)\|_{L_2(0,a)} \to 0$ при $n\to\infty$. Теорема доказана.

Замечания. **1.** В работе [11] изучалась задача (1)–(5) в случае двух геометрических переменных. Там установлена сходимость приближенного решения Ритца $z_n(x,\varphi;a_{kj})$ к точному решению $z_0(x,\varphi)$ в $C(\overline{\Delta})$. В основу доказательства положены результаты Л. В. Канторовича по минимизации квадратичного функционала методом Ритца [19].

2. Замена Фридрихса [14], на которой основана минимизация функционала (6), в монографии [20] использовалась при приближенном решении нестационарных задач Стефана.

1. *Миненко А. С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 6. – С. 413 – 416.
2. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О вариационном методе изучения квазистационарной задачи Стефана // Успехи мат. наук. – 1981. – **43**, № 5. – С. 228.
3. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* Об одной вариационной теплофизической задаче со свободной границей // Сб. докл. конф. по смешанным граничным задачам для дифференц. уравнений с частными производными и задачам со свободными границами (Штутгарт, 5 – 10 сент. 1978 г.). – Штутгарт, 1978. – С. 9 – 18.
4. *Данилюк И. И.* С. О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5. – С. 133 – 185.
5. *Данилюк И. И.* Об интегральных функционалах с переменной областью интегрирования // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **118**. – С. 1 – 112.
6. *Миненко А. С.* О вариационном методе исследования одной нелинейной задачи потенциального течения жидкости // Нелинейн. граничн. задачи. – 1991. – Вып. 3. – С. 60 – 66.
7. *Миненко А. С.* О вариационном методе исследования одной задачи вихревого течения жидкости со свободной границей // Там же. – 1993. – Вып. 5. – С. 58 – 64.
8. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291 – 294.
9. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* Об одной оптимизационной задаче со свободной границей // Там же. – 1976. – № 5. – С. 389 – 392.
10. *Миненко А. С.* О сходимости метода Ритца в одной задаче со свободной границей // Краевые задачи мат. физики. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 139 – 145.
11. *Миненко А. С.* Проблема минимума одного класса интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1993. – Вып. 16. – С. 48 – 52.
12. *Миненко А. С.* Исследование осесимметричного течения со свободной границей // Нелинейн. граничн. задачи. – 1993. – Вып. 5. – С. 65 – 71.
13. *Garabedian P. R., Lewy H., Schiffer M.* Axially symmetric cavitational flow // Ann. Math. – 1952. – **56**, № 3. – P. 560 – 602.
14. *Friedrichs K. O.* Uber ein Minimumproblem fur Potentialstromungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**. – P. 60 – 82.
15. *Alt H. W., Friedman A., Caffarelli L. A.* Axially symmetric jet flows // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1983. – **81**, № 2. – P. 97 – 149.
16. *Friedman A.* Axially symmetric cavities in flows // Commun. Partial Different. Equat. – 1983. – **8**, № 9. – P. 949 – 997.
17. *Лаврентьев М. А.* О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй // Мат. сб. – 1938. – **4**, № 3. – С. 391 – 453.
18. *Миненко А. С.* Об аналитичности свободной границы в одной теплофизической задаче // Мат. физика. – 1983. – Вып. 33. – С. 80 – 82.
19. *Канторович Л. В.* О сходимости вариационных процессов // Докл. АН СССР. – 1941. – **32**, № 2. – С. 95 – 97.
20. *Crank J.* Free and moving foundary problems. – Oxford: Univ. press, 1984. – 425 p.

Получено 27.07.93