УДК 517.94

К. Кенжебаев, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОБ ОДНОМ КОНСТРУКТИВНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

In degenerate cases of systems of differential equations, conditions for existence of periodic solutions are obtained in terms of conditions on coefficients and iterative algorithms for finding the solutions are developed.

Одержано коефіцієнтні умови існування та розроблено ітераційні алгоритми знаходження періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь у вироджених випадках.

В данной работе развит метод исследования периодических систем дифференциальных уравнений, изложенный в работах [1, 2]. Основное внимание уделяется исследованию вопроса существования и разработке удобных для практической реализации на ЭВМ алгоритмов построения периодических решений этих систем в вырожденных случаях. Исследованы вопросы сходимости, скорости сходимости полученных алгоритмов. Получены условия существования, выраженные через коэффициенты исследуемой системы уравнений.

Сначала рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны и периодичны с периодом $\omega > 0$.

Пусть

$$B(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $B(t) = \int_0^t A(\tau)\,d\tau$.

В системе (1) выполним замену по формуле

$$x = (\exp B(t))\, y. \tag{3}$$

Тогда получим систему

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y + g(t), \tag{4}$$

где

$$Q(t) = \exp(-B(t))(A(t)\exp B(t) - d(\exp B(t))/dt),$$
$$g(t) = \exp(-B(t))f(t).$$

Согласно [3] матрица $Q(t)$ может быть представлена в виде

$$Q(t) = \int_0^1 \mu \exp(-\mu B(t))[A(t), B(t)]\exp(\mu B(t))\,d\mu.$$

Здесь

$$[A, B] \overset{\text{def}}{=} AB - BA = A(adB),$$

где adB — оператор внутреннего дифференцирования в $L(n, \mathbb{R})$-пространстве вещественных квадратных матриц порядка n.

Наряду с системой (4) рассмотрим систему с параметром $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda Q(t)y + g(t). \tag{5}$$

Пусть $y(t, \lambda)$ — ω-периодическое решение системы (5). Согласно теореме единственности решение $y(t, \lambda)$ будет ω-периодическим тогда и только тогда, когда выполнено граничное условие

$$y(\omega, \lambda) = y(0, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

На основании (5), (6) имеем

$$\lambda \int_0^{\omega} Q(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^{\omega} g(\tau) d\tau = 0. \tag{7}$$

Обозначим

$$\Phi(t) = \int_0^t Q(\tau) d\tau.$$

Пусть выполнено условие

$$\det \Phi(\omega) \neq 0. \tag{8}$$

Следуя методу [1, 2], на основании (5), (7) получаем векторное интегральное уравнение

$$y(t, \lambda) = \lambda \int_0^{\omega} K(t, \tau) Q(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau + r(t) + \frac{1}{\lambda} a, \tag{9}$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \Phi^{-1}(\omega) \int_0^{\tau} Q(\sigma) d\sigma, & 0 \le \tau \le t \le \omega; \\ \Phi^{-1}(\omega) \int_{\omega}^{\tau} Q(\sigma) d\sigma, & 0 \le t < \tau \le \omega, \end{cases}$$

$$r(t) = \int_0^{\omega} K(t, \tau) g(\tau) d\tau, \quad a = -\Phi^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} g(\tau) d\tau.$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение $y(t, \lambda)$ уравнения (9) является решением граничной задачи (5), (6). Таким образом, при выполнении условия (8) граничная задача (5), (6) эквивалентна интегральному уравнению (9).

Примем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \| Q(t) \|, \quad \gamma = \| \Phi^{-1}(\omega) \|, \quad b = \max_t \| y_0(t) \|,$$

$$\| y \|_C = \max_t \| y(t) \|, \quad q = \frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \omega^2,$$

где $t \in [0, \omega]$, $\| \cdot \|$ — мультипликативная норма.

Решение уравнения (9) будем искать в виде

$$y(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} y_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k(t), \tag{10}$$

где y_{i-1}, $i = 0, 1, 2, \ldots$, — ω-периодические функции, подлежащие определению.

Для нахождения этих функций подставим (10) в (9) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях полученных соотношений. Тогда получим

$$y_{-1}(t) = a, \quad y_0(t) = r(t) + \int_0^{\omega} K(t, \tau) Q(\tau) y_{-1} d\tau,$$

$$y_k(t) = \int_0^{\omega} K(t, \tau) Q(\tau) y_{k-1}(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Исследуем вопрос сходимости ряда (10). Из (11) имеем рекуррентные оценки

$$\| y_k(t)\| \leq \gamma\alpha^2\left(\int_0^t \tau\| y_{k-1}(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega (\omega-\tau)\| y_{k-1}(\tau)\| d\tau\right). \tag{12}$$

Используя (12), нетрудно доказать, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k(t), \tag{13}$$

мажорируется функциональным рядом

$$b\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t), \tag{14}$$

где

$$\varepsilon = |\lambda|\gamma\alpha^2, \quad z_0 = 1, \quad t\in[0,\omega],$$

$$z_{k+1}(t) = \int_0^t \tau z_k(\tau)\,d\tau + \int_t^\omega (\omega-\tau) z_k(\tau)\,d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

С помощью приемов, используемых в работе [4], можно доказать, что ряд (14) сходится равномерно относительно $t\in[0,\omega]$ в окрестности

$$|\lambda| < \frac{\mu}{\gamma\alpha^2\omega^2}, \tag{15}$$

где μ — корень уравнения

$$\varphi\int_0^1 \tau\exp[\varphi\tau(\tau-1)]\,d\tau - 1 = 0$$

($\mu\approx 3,416$). При этом сумма ряда (14) находится по формуле

$$z(t,\lambda) = \frac{b}{1-\beta(\lambda)}\exp[|\lambda|\gamma\alpha^2 t(t-\omega)],$$

где $\beta(\lambda) = r\int_0^1 \tau\exp[r\tau(\tau-1)]\,d\tau$. Здесь $r = |\lambda|\gamma\alpha^2\omega^2$.

При указанных в (15) значениях λ ряд (13) сходится равномерно относительно $t\in\mathbb{R}$. Для функции

$$\tilde{Y}(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k(t)$$

справедлива оценка $\left\|\tilde{Y}(t,\lambda)\right\| \leq z(t,\lambda)$.

Таким образом, при

$$0 < |\lambda| < \frac{\mu}{\gamma\alpha^2\omega^2} \tag{16}$$

решение уравнения (9) представимо рядом (10), сходящимся равномерно относительно $t\in\mathbb{R}$.

Очевидно, что если $\gamma\alpha^2\omega^2 < \mu$, то область (16) содержит точку $\lambda = 1$, т. е. ряд

$$y(t) \equiv y(t,1) = y_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t) \tag{17}$$

дает ω-периодическое решение системы (4), при этом справедлива оценка

$$\| y(t)\| \leq \| a\| + z(t,1). \tag{18}$$

В соответствии с (3), (17) ω-периодическое решение системы (1) представимо в виде

$$x(t) = x_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t), \tag{19}$$

где

$$x_{-1}(t) = (\exp B(t))\, y_{-1},$$
$$x_k(t) = (\exp B(t))\, y_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Из (13), (18) для решения $x(t)$ следует оценка

$$\| x(t) \| \le \| \exp B(t) \| \left(\| a \| + z(t, 1) \right). \tag{20}$$

По сути доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2), (8) *и* $\gamma\alpha^2\omega^2 < \mu$. *Тогда* ω*-периодическое решение системы* (1) *существует и единственно. Это решение представимо в виде* (19), *при этом справедлива оценка* (20).

Выведем теперь оценки для равномерной нормы, аналогичные оценкам (18), (20).

Из (11) имеем

$$\| y_k(t) \| \le \int_0^{\omega} \| K(t, \tau) \| \, \| Q(\tau) \| \, \| y_{k-1}(\tau) \| \, d\tau \le$$

$$\le \alpha \max_t \int_0^{\omega} \| K(t, \tau) \| \, d\tau \, \| y_{k-1}(t) \|_C. \tag{21}$$

Поскольку

$$\max_t \int_0^{\omega} \| K(t, \tau) \| \, d\tau \le \frac{1}{2} \gamma \alpha \omega^2,$$

то из (21) следует рекуррентная оценка

$$\| y_k(t) \|_C \le q \| y_{k-1}(t) \|_C, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Из (22) легко получить следующие неравенства:

$$\| y_k(t) \|_C \le q^k \| y_0(t) \|_C, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{23}$$

Используя (23), можно получить неравенства, характеризующие скорость сходимости алгоритма (11)

$$\| y(t) - \tilde{y}_m(t) \|_C \le \frac{\| y_0(t) \|}{1 - q} q^{m+1}, \tag{24}$$

где $\tilde{y}_m(t) = y_{-1} + \sum_{k=0}^{m} y_k(t)$, $m = 0, 1, \ldots$.

Аналогично выведем оценку

$$\| y(t) \|_C \le \| a \| + \frac{b}{1 - q}. \tag{25}$$

На основании (24) из (3) имеем

$$\| x(t) - \tilde{x}_m(t) \|_C \le \frac{\delta b}{1 - q} q^{m+1},$$

где $\delta = \max_t \| \exp B(t) \|$, $\tilde{x}_m(t) = (\exp B(t))\, \tilde{y}_m(t)$.

Аналогично на основании (25) из (3) имеем

$$\| x(t) \|_C \leq \delta \left(\| a \| + \frac{b}{1-q} \right).$$

Покажем, что множество матриц, полученных при условиях (2), (8), не пусто. Матрица $Q(t)$ представима в виде

$$Q(t) = \frac{1}{2} A(t)\left(adB(t) + \tilde{Q}(t) \right), \tag{26}$$

где

$$\tilde{Q}(t) = \int_0^1 \mu\, d\mu \int_0^\mu \exp(-\rho B) A (adB)^2 \exp(\rho B)\, d\rho.$$

Для каждой матрицы-функции $A(t)$ класса C со значениями в $L(n, \mathbb{R})$ справедлива оценка

$$\| A(t)(adB(t))^k \|_C \leq \beta (2\beta\omega)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

где $\beta = \max\limits_t \| A(t) \|$.

Используя (27), для матрицы $\tilde{Q}(t)$ в (26) получаем оценку

$$\max_t \| \tilde{Q}(t) \| \leq 4\beta^3\omega^2 \int_0^1 \mu\, d\mu \int_0^\mu \exp(2\rho\beta\omega)\, d\rho. \tag{28}$$

На основании (27), (28) заключаем, что при достаточно малых $\tilde{\beta} = \beta\omega$ из невырожденности матрицы

$$\Phi_0(\omega) = \int_0^\omega A(t)(adB(t))\, dt$$

следует невырожденность матрицы $\Phi(\omega)$.

Условие $\det \Phi_0(\omega) \neq 0$ выполняется, например, для матрицы $A(t)$ вида

$$A(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R} / \{0\}$ и достаточно мало по модулю.

***Замечание* 1.** В отличие от непосредственного применения к (1) метода малого параметра изучение вырожденного случая (2) на основе замены (3) позволяет учитывать специфику линейных систем. В частности, если $[A(t), B(t)] = 0 \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}$, т. е. матрица $A(t)$ коммутирует со своим интегралом $B(t)$, система (4) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = g(t). \tag{29}$$

Условие $y(\omega) = y(0)$ будет выполняться для решений системы (29) тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\omega g(\tau)\, d\tau = 0. \tag{30}$$

Пусть (30) выполняется. Тогда формула

$$x(t) = (\exp B(t)) \left(C + \int_0^t g(\tau)\, d\tau \right),$$

где C — произвольный постоянный вектор, дает решение системы (1).

Рассмотрим теперь нелинейную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{31}$$

где вектор-функция $f(t,x)$ определена и непрерывна по совокупности переменных $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяет относительно x условию Липшица с постоянной L, ω-периодична по t, причем $f(t,0) \not\equiv 0$.

Используя замену (3), преобразуем систему (31). При этом получим следующую систему:

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y + \varphi(t,y), \tag{32}$$

где $\varphi(t,y) = (\exp - B(t)) f(t, \exp B(t) y)$.

Пусть выполнены условия (2), (8). Используя метод [1, 2], получаем векторное интегральное уравнение

$$y(t) = \int_0^\omega K(t,\tau) g(\tau, y(\tau))\, d\tau - \Phi^{-1}(\omega) \int_0^\omega \varphi(\tau, y(\tau))\, d\tau, \tag{33}$$

эквивалентное ω-периодической краевой задаче для системы (32); здесь $g(t, y(t)) \equiv Q(t)y(t) + \varphi(t, y(t))$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$\tilde{\delta} = \max_t \| \exp(-B(t)) \|, \quad \nu = \delta\tilde{\delta}, \quad \tilde{q} = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2 + \frac{1}{2}\nu\gamma\alpha L\omega^2 + \nu\gamma L\omega,$$

$$\tilde{\tilde{q}} = \frac{\tilde{q} - \nu\gamma L\omega}{1 - \nu\gamma L\omega}, \quad \tilde{h} = \max_t \| \exp(-B(t)) f(t,0) \|; \quad t \in [0, \omega].$$

На основе исследования уравнения (33) с помощью принципа сжатых отображений [5] можно получить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2), (8) *и*

$$\tilde{q} < 1. \tag{34}$$

Тогда ω-*периодическое решение системы* (1) *существует и единственно.*

Следует отметить, что классический метод последовательных приближений (см., например, [5]), примененный к уравнению (33), приводит к появлению приближенных решений, не являющихся периодическими функциями. Покажем, что ω-периодическое решение системы (31) может быть представлено как предел равномерно сходящейся последовательности ω-периодических вектор-функций, определяемых рекуррентными интегральными соотношениями.

ω-Периодическое решение будем строить на основе итерационного алгоритма

$$y_k(t) = y_k(0) + \int_0^t [Q(\tau) y_{k-1}(\tau) + \varphi(\tau, y_{k-1}(\tau))]\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

где в качестве начального приближения берется постоянный вектор y_0, определяемый из уравнения

$$C = -\Phi^{-1}(\omega) \int_0^\omega \varphi(\tau, c)\, d\tau. \tag{36}$$

Из условия (34) следует неравенство

$$\nu\gamma L\omega < 1. \tag{37}$$

Используя (37), на основании принципа сжатых отображений заключаем, что уравнение (36) имеет единственное решение y_0.

Приближение $y_k(t)$ определим как решение задачи

$$y_k(t) = y_k(0) + \int_0^t [Q(\tau)y_{k-1}(\tau) + \varphi(\tau, y_{k-1}(\tau))]\,d\tau, \tag{38}$$

$$\int_0^\omega [Q(\tau)y_k(\tau) + \varphi(\tau, y_k(\tau))]\,d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{39}$$

Следуя [1, 2], нетрудно показать, что задача (38), (39) эквивалентна интегральному уравнению

$$y_k(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)g(\tau, y_{k-1}(\tau))\,d\tau - \Phi^{-1}(\omega)\int_0^\omega \varphi(\tau, y_k(\tau))\,d\tau, \tag{40}$$

где $g(t, y_{k-1}(t)) \equiv Q(t)y_{k-1}(t) + \varphi(t, y_{k-1}(t))$.

Как видим, приближение $y_k(t)$ следует находить из интегрального уравнения (40), которое в соответствии с (37) имеет на основании принципа сжатых отображений единственное решение.

Таким образом, нами построена последовательность $\{y_k(t)\}_1^\infty$ ω-периодических функций, являющихся приближенными решениями уравнения (33).

Исследуем вопросы сходимости и скорости сходимости алгоритма (40).

Исходя из (40), имеем

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)(g(\tau, y_k(t)) - g(\tau, y_{k-1}(\tau)))\,d\tau -$$

$$- \Phi^{-1}(\omega)\int_0^\omega (\varphi(\tau, y_{k+1}(\tau)) - \varphi(\tau, y_k(\tau)))\,d\tau. \tag{41}$$

Производя в (41) оценки по норме, получаем рекуррентное неравенство

$$\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\|_C \le \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha + \nu L)\|y_k - y_{k-1}\|_C +$$

$$+ \gamma\nu L\omega\|y_{k+1} - y_k\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{42}$$

Поскольку $\gamma\nu L\omega < 1$, из (42) следует рекуррентная оценка

$$\|y_{k+1} - y_k\|_C \le \tilde{\tilde{q}}\|y_k - y_{k-1}\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{43}$$

Из (43) нетрудно получить неравенство

$$\|y_{k+1} - y_k\|_C \le \tilde{\tilde{q}}^k\|y_1 - y_0\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{44}$$

Далее легко доказать, что последовательность $\{y_k(t)\}_1^\infty$ сходится равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ к точному решению $y(t)$ интегрального уравнения (33).

Используя (44), получаем оценку

$$\|y_k - y\|_C \le \frac{\tilde{\tilde{q}}^k}{1 - \tilde{\tilde{q}}}\|y_1 - y_0\|_C, \tag{45}$$

характеризующую скорость сходимости алгоритма (40).

Получим оценку для $\|y_1 - y_0\|_C$. Из (40) имеем

$$y(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)(Q(\tau)y_0 + \varphi(\tau, y_0))\,d\tau - \Phi^{-1}(\omega)\int_0^\omega \varphi(\tau, y_1(\tau))\,d\tau. \tag{46}$$

Из (36), (46) имеем

$$y_1(t) - y_0 = \int_0^{\omega} K(t,\tau)(Q(\tau)y_0 + \varphi(\tau, y_0))\,d\tau -$$
$$- \Phi^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}(\varphi(\tau, y_1(\tau)) - \varphi(\tau, y_0))\,d\tau. \tag{47}$$

Производя в (47) оценки по норме, получаем

$$\| y_1 - y_0 \|_C \le \frac{1}{1-\nu\gamma L\omega} \max_t \left\| \int_0^{\omega} K(t,\tau)(Q(\tau)y_0 + \varphi(\tau, y_0))d\tau \right\|. \tag{48}$$

Из (48) нетрудно получить оценку

$$\| y_1 - y_0 \|_C \le \frac{\gamma\alpha\omega^2}{2(1-\nu\gamma L\omega)}\left((\alpha + \nu L)\| y_0 \| + \tilde{h}\right). \tag{49}$$

Поскольку

$$\| y_0 \| \le \frac{\gamma\omega\tilde{h}}{1-\nu\gamma L\omega}, \tag{50}$$

из оценки (49) следует

$$\| y_1 - y_0 \|_C \le \frac{\gamma\alpha\omega^2(1+\gamma\alpha\omega)\tilde{h}}{2(1-\nu\gamma L\omega)^2}. \tag{51}$$

Таким образом, оценка (45) определена полностью на основе оценки (51).

Для решения $y(t)$ справедлива оценка

$$\| y \|_C \le \frac{\| y_0 \|}{1-\tilde{\tilde{q}}} + \frac{\gamma\alpha\omega^2\tilde{h}}{2(1-\nu\gamma L\omega)\left(1-\tilde{\tilde{q}}\right)}. \tag{52}$$

Используя (50), из оценки (52) получаем оценку

$$\| y \|_C \le \frac{(2+\alpha\omega)\gamma\omega\tilde{h}}{2(1-\tilde{q})}. \tag{53}$$

Из (53) нетрудно получить оценку, выраженную через исходные параметры системы (31).

Алгоритм (40) неудобен тем, что на каждом итерационном шаге приходится решать интегральные уравнения относительно искомых приближений. В связи с этим интерес представляет получение эффективного алгоритма типа (40).

Будем строить ω-периодическое решение системы (32) на основе итерационного алгоритма

$$y_{k+1}(t) = y_{k+1}(0) + \int_0^t [Q(\tau)y_k(\tau) + \varphi(\tau, y_{k-1}(\tau))]\,d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

В этом случае в качестве начального приближения берем нулевой вектор, а вектор y_1 находим в виде постоянной из условия периодичности приближения $y_2(t)$, т. е.

$$y_1 = -\Phi^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}\varphi(\tau, 0)\,d\tau.$$

Приближение $y_k(t)$ определим как решение задачи

$$y_{k+1}(t) = y_{k+1}(0) + \int_0^t [Q(\tau)y_k(\tau) + \varphi(\tau, y_{k-1}(\tau))]\,d\tau, \tag{54}$$

$$\int_0^{\omega} [Q(\tau) y_{k+1}(\tau) + \varphi(\tau, y_k(\tau))]\, d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{55}$$

Используя соответствующую методику из [1, 2], можно показать, что задача (54), (55) эквивалентна рекуррентному интегральному соотношению

$$y_{k+1}(t) = \int_0^{\omega} K(t,\tau)[Q(\tau) y_k(\tau) + \varphi(\tau, y_{k-1}(\tau))]\, d\tau - $$
$$- \Phi^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} \varphi(\tau, y_k(\tau))\, d\tau. \tag{56}$$

Из (56) имеем

$$\| y_{k+2} - y_{k+1} \|_C \le \tilde{q}_1 \| y_{k+1} - y_k \|_C + \tilde{q}_2 \| y_k - y_{k-1} \|_C, \quad k = 1, 2, \ldots , \tag{57}$$

где

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \omega^2 + \nu \gamma L \omega, \quad \tilde{q}_2 = \frac{1}{2} \nu \gamma L \omega^2.$$

С помощью несложных выкладок можно доказать, что при выполнении условия (34) последовательность $\{ y_k(t) \}_1^{\infty}$, построенная согласно алгоритму (56), сходится равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ к ω-периодическому решению $y(t)$ интегрального уравнения (33), а тем самым к решению системы (32). При этом справедлива оценка

$$\| y_{k+1} - y_k \|_C \le a_1 \mu_1^k + a_2 \mu_2^k, \quad k = 1, 2, \ldots , \tag{58}$$

где

$$\mu_{1,2} = \frac{\tilde{q}_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\tilde{q}_1^2}{4} + \tilde{q}_2}, \quad a_1 = \frac{\delta_0 \mu_2 - \delta_1}{\mu_2 - \mu_1}, \quad a_2 = \frac{\delta_0 \mu_1 - \delta_1}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Здесь $\delta_i = \| y_{i+1} - y_i \|_C$, $i = 0, 1$.

На основе оценки (58) нетрудно доказать, что скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\| y_k - y \|_C \le \frac{a_1}{1 - \mu_1} \mu_1^k + \frac{a_2}{1 - \mu_2} \mu_2^k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

***Замечания.* 2.** Последовательные приближения для ω-периодического решения системы (31) определяются на основе формулы (3). Соответствующие оценки получаем так же, как и оценки в линейном случае.

3. В других случаях вырождения, аналогичных рассмотренным в данной работе, для нахождения периодических решений также следует воспользоваться методикой из [1, 2].

1. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* О некоторых итерационных методах отыскания периодических решений неавтономных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, №3. – С. 345 – 352.
2. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* Исследование периодической краевой задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений. – Киев, 1990. – 28 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; №90.49).
3. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* Об одном методе построения решений линейных многоточечных краевых задач // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – №9. – С. 10 – 13.
4. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н.* Об оценках периодических решений дифференциальных уравнений // Там же. – №1. – С. 30 – 32.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

Получено 04.02.94