УДК 512.54

О. С. Пилявская, канд. физ.-мат. наук,
О. В. Печенюк, студ. (Винниц. пед. ин-т)

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ГРУПП ПОРЯДКА p^5

The automorphisms of groups of order p^5 (p is an odd prime) are investigated. The groups without any automorphism of order 2 and the groups with the group of automorphisms of order p^6 are pointed.

Досліджуються автоморфізми груп порядку p^5 (p – просте непарне число). Знайдено групи, що не мають автоморфізму порядку 2, а також групи з групою автоморфізмів порядку p^6.

В работе [1] при изучении групп с группой автоморфизмов малого порядка и групп, группа автоморфизмов которых является p-группой, доказано, что если порядок группы G равен p^n с $n \le 5$ и класс нильпотентности равен 2, то G имеет автоморфизм порядка 2, и высказано ошибочное предположение, что если G и $\operatorname{Aut} G$ — p-группы $(p > 2)$, то $|\operatorname{Aut} G| \ge p^{10}$.

Целью работы является следующая теорема.

Теорема. 1. *Каждая группа порядка* 3^5 *имеет автоморфизм порядка* 2.

2. *При* $p > 3$ *каждая группа порядка* p^5 *кроме групп, заданных соотношениями*

$$G = \Phi_{10}(221)_{b_r} = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \mid [\alpha_i, \alpha] = \alpha_{i+1}, \ [\alpha_1, \alpha_2]^k = \alpha_4^k = \alpha_1,$$

$$\alpha^p = \alpha_{i+1}^p = 1, \ [\alpha, \alpha_4] = [\alpha_i, \alpha_3] = [\alpha_i, \alpha_4] = 1, \ (i = 1, 2, 3) \rangle, \qquad (1)$$

где $k = g^r$, g *— некоторый образующий мультипликативной группы поля* $\mathbb{F}_p$, $r + 1$ *пробегает целые числа от* 1 *до* $(p-1, 3)$ *— наибольшего общего делителя чисел* $p - 1$ *и* 3, *имеет автоморфизм порядка* 2.

3. *Среди групп порядка* p^5, $p > 3$, *группы, заданные соотношениями* (1) *при* $(p-1, 3) = 1$, *и только они имеют* p*-группу в качестве группы автоморфизмов. Порядок группы* $\operatorname{Aut}(G)$ *в этом случае равен* p^6. *Соответствующая группа автоморфизмов изоморфна группе* $\Phi_7(1^6)$ *из списка* [2].

Отметим, что любая группа порядка p^4 имеет автоморфизм порядка 2.

Полный список групп порядка p^5 был получен в 1898 г. Багнером. Список содержал неточности при $p \le 3$, которые были устранены независимо Бендером и Блэкбурном. Мы будем пользоваться списком групп порядка p^5, $p \ge 3$, из статьи Джеймса [2]*. В этом списке группы порядка p^5 разбиты на 10 семейств изоклинности $\Phi_1, \ldots, \Phi_{10}$; группы одного семейства имеют изоморфные коммутанты и фактор-группы по центру.

Пусть G — группа порядка p^5. Рассмотрим автоморфизмы G порядка 2. Согласно теореме Бернсайда о базисе (см. [3], гл. 12), гомоморфизм

$$f\colon G \to A \simeq G / F(G),$$

где $F(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, каждую систему образующих $X = \{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ группы G переводит в базис элементарной абелевой группы A и таким образом индуцирует гомоморфизм

---

* Работа [2] содержит также список групп порядка p^6, $p > 2$. Некоторые неточности в этом списке отмечены в [4]. В частности, в [2] пропущена серия групп семейств Φ_{12} и Φ_{15}, группа семейства Φ_{30}; семейства Φ_{15} и Φ_{21} содержат изоморфные группы и др.

$$h:\ \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} A.$$

Если X — минимальная система образующих, то ядро этого гомоморфизма состоит из автоморфизмов ξ вида

$$\xi(\alpha_i) = \alpha_i\beta_i, \quad \beta_i \in F(G). \tag{2}$$

Порядок ядра делит $p^{r(n-r)}$, где p^n — порядок группы G, r — минимальное число образующих группы G. При этом порядок подгруппы Фраттини группы G равен p^{n-r}.

Образ гомоморфизма h удобно задавать матрицами размерности $r \times r$, рассматривая элементарную абелеву группу a как векторное пространство над полем F_p из p элементов и фиксируя в этом пространстве некоторый базис. Легко видеть, что каждый автоморфизм порядка 2 группы G отображается в некоторый автоморфизм порядка 2 группы A.

Согласно [2] у всякой группы G порядка p^5 семейства Φ_9 или Φ_{10} минимальная система образующих состоит из двух элементов $\{\alpha, \alpha_1\}$, подгруппа Фраттини совпадает с коммутантом и имеет порядок p^3. Группа $A \simeq G/F(G)$ имеет порядок p^2 и базис

$$\{\, \overline{\alpha} = \alpha F(G),\ \overline{\alpha}_1 = \alpha_1 F(G)\}.$$

Автоморфизмы порядка 2 группы A задаются матрицами над полем $\mathbb{F}_p$ вида

$$\begin{pmatrix} a & (1-a)/c \\ c & a \end{pmatrix}, \quad c \neq 0, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Далее будем отождествлять автоморфизмы группы A с соответствующими матрицами.

Лемма 1. *Автоморфизмы ζ группы A вида*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad-bc \neq 0, \quad c \neq 0,$$

не содержатся в образе $h:\ \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} A$.

Доказательство. Согласно [2] множество определяющих соотношений групп семейств Φ_9, Φ_{10} содержит соотношение

$$w_1(\alpha_1, \alpha) = \big[[[\alpha_1, \alpha], \alpha], \alpha_1\big] = 1,$$

в то время как

$$w_2(\alpha_1, \alpha) = \big[[[\alpha_1, \alpha], \alpha], \alpha\big] \neq 1.$$

Если $\zeta \in \operatorname{Im}(h)$, то существует автоморфизм $\overline{\zeta} \in \operatorname{Aut}(G)$ такой, что

$$\overline{\zeta}(\alpha) = \alpha^a\alpha_1^b(\operatorname{mod} F(G)), \quad \overline{\zeta}(\alpha_1) = \alpha^c\alpha_1^d(\operatorname{mod} F(G)) \quad (ad-bc \neq 0).$$

Учитывая, что для групп семейств Φ_9, Φ_{10} класс нильпотентности равен 4 и подгруппа Фраттини совпадает с коммутантом и третьим членом верхнего центрального ряда, получаем

$$\overline{\zeta}(w_1(\alpha_1, \alpha)) = w_1(\overline{\zeta}(\alpha_1), \overline{\zeta}(\alpha)) = \big[[[\alpha^c\alpha_1^d, \alpha^a\alpha_1^b], \alpha^a\alpha^b], \alpha^c\alpha_1^d\big] =$$

$$= w_1(\alpha_1, \alpha)^{\Delta ad} w_2(\alpha_1, \alpha)^{\Delta ac} \neq 1 \quad (\Delta = ad - bc \neq 0,\ a \neq 0).$$

При $a = 0$ получаем $\zeta(w_2(\alpha_1, \alpha)) = 1$. Мы пришли к противоречию, поскольку каждый автоморфизм должен сохранять все определяющие соотношения группы. Лемма доказана.

Согласно лемме автоморфизмам порядка 2 группы G из Φ_9 или Φ_{10} могут соответствовать только автоморфизмы (4) группы A.

Лемма 2. *Группа* $G = \Phi_{10}(221)_{b_r}$ *порядка* p^5 *семейства* Φ_{10}, *заданная соотношениями* (1), *не имеет автоморфизма порядка* 2.

Все остальные группы порядка p^5 *семейств* Φ_9 *и* Φ_{10} *имеют автоморфизмы порядка* 2. *Им соответствуют автоморфизмы вида* (4) *группы* A.

Замечание. Группы с соотношениями (1) существуют только при $p > 3$.

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

Лемма 3. *Любая группа порядка* p^5 *семейств* $\Phi_1 - \Phi_8$ *имеет автоморфизм порядка* 2.

Доказательство. Для групп класса нильпотентности 2 и для групп, имеющих абелев прямой сомножитель, существование автоморфизма порядка 2 следует из результатов работы [1]. Для остальных групп наличие автоморфизма, которому соответствует матрица вида (4), легко проверяется непосредственно.

Лемма 4. *Для группы* G, *заданной соотношениями* (1), *при* $(p-1, 3) = 1$ *образ* h *совпадает с единичной подгруппой.*

Доказательство. Согласно лемме 1 в образе h могут содержаться только матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $ad \neq 0$. Однако, если $b \neq 0$, то отображение $\zeta\colon \alpha \mapsto$ $\mapsto \alpha^a \alpha_1^b (\operatorname{mod} F(G))$ не может быть расширено до автоморфизма группы G. Действительно, поскольку $F(G)$ является абелевой группой экспоненты p и совпадает с коммутантом, для всякого автоморфизма ζ, учитывая $\alpha^p = 1$, получаем

$$1 = \zeta(\alpha)^p = (\alpha^a \alpha_1^b)^p (\operatorname{mod} F(G)) = \alpha^{pa} \alpha_1^{pb} (\operatorname{mod} F(G)) = \alpha_4^{kb},$$

откуда $b = 0$.

Из соотношений (1) вытекает

$$[[[\alpha, \alpha_1], \alpha], \alpha] = [\alpha_1, \alpha_2] = \alpha_1^{-kp}.$$

Автоморфизм $\zeta\colon \alpha \mapsto \alpha^a (\operatorname{mod} F(G))$, $\zeta\colon \alpha \mapsto \alpha_1^d (\operatorname{mod} F(G))$ сохраняет эти соотношения, откуда, учитывая

$$\zeta([[[\alpha, \alpha_1], \alpha], \alpha]) = [[[\zeta(\alpha), \zeta(\alpha_1)], \zeta(\alpha)], \zeta(\alpha)] =$$

$$= [[[\alpha, \alpha_1], \alpha], \alpha]^{a^3 d} = \alpha_4^{a^3 d},$$

$$[\zeta(\alpha_1), \zeta(\alpha_2)] = [\alpha_1^d, \alpha_2^{ad}] = \alpha_4^{ad^2},$$

$$\zeta(\alpha_1^{-kp}) = (\alpha_1^d)^{-kp} = \alpha_4^d,$$

получаем $a^3 d = ad^2 = d$ и $a^3 = ad = 1$. В случае, когда $p-1$ и 3 взаимно просты, уравнению $a^3 = 1$ в поле $\mathbb{F}_p$ удовлетворяет только $a = 1$. Следовательно, любому автоморфизму группы G может соответствовать только единичный автоморфизм группы $A \simeq G / F(G)$. Лемма доказана.

Отметим, что если $p-1$ и 3 не взаимно просты, то соответствующие группы будут иметь автоморфизм порядка 3.

Следствие. *Группа автоморфизмов группы G, заданной соотношениями* (1), *при $(p-1, 3) = 1$ является p-группой порядка p^6.*

Доказательство. Согласно лемме 2 группа автоморфизмов группы G состоит только из автоморфизмов вида (2). Поскольку $F(G)$ совпадает с коммутантом и является абелевой группой экспоненты p, получаем, что каждое отображение ζ: $\zeta(\alpha_i) = \alpha_i \beta_i$, где $\beta_i \in F(G)$, сохраняет соотношения (1) и может быть продолжено до автоморфизма группы G.

Из доказанных утверждений непосредственно вытекает теорема.

В заключение укажем образующие и определяющие соотношения группы автоморфизмов группы $G = \Phi_{10}(221)_{b_r}$ при $(p-1, 3) = 1$. Пусть $\zeta: \zeta(\alpha) = \alpha\alpha_2$, $\zeta(\alpha_1) = \alpha_1$; $\xi: \xi(\alpha) = \alpha$, $\xi(\alpha_1) = \alpha_1\alpha_2$; $\beta(\alpha) = \alpha$, $\beta(\alpha_1) = \alpha_1\alpha_3$; γ: $\gamma(\alpha) = \alpha$, $\gamma(\alpha_1) = \alpha_1\alpha_4$. Тогда $\mathrm{Aut}\, G = \langle \xi, \zeta, \beta, \gamma \mid [[\zeta,\xi],\xi] = [\beta,\zeta],\ [\beta,\xi] = [[\beta,\zeta],\zeta] = [\gamma,\zeta] = 1,\ [[\zeta,\xi],\zeta] = [[\beta,\zeta],\xi] = [\gamma,\xi] = [\gamma,\beta] = 1,\ \zeta^p = \xi^p = \beta^p = \gamma^p = 1\rangle$.

1. *MacHale D.* Some finite groups which are rarely atomorfizm groups.II // Proc. Roy. Irish Acad. A. – 1983. – **83**, №2. – P. 189 – 196.
2. *James R.* The groups of Order p^6 (p an odd Prime) // Math. Comput. – 1980. – **34**, №150. – P. 613 – 637.
3. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
4. *Пилявская О. С.* Применение матричных задач в теории групп: Автореф. дис. .... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1990. – 12 с.

Получено 23.11.93