УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко, студ. (Киев. ун-т)

О ЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ДИАГОНАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА

Necessary conditions for an operator diagonal with respect to the system of Hermitian polynomials to be local are given.

Наведено необхідні умови для локальності оператора, діагонального відносно системи поліномів Ерміта.

Пусть A — самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{L}_2(R^m, \mathcal{B}(R^m), \mu^m)$, где $d\mu^m = (2\pi)^{-m/2} e^{-x_1^2/2-\ldots-x_m^2/2} dx_1 \ldots dx_m$, диагональный относительно системы полиномов Эрмита, т. е.

$$AH_{k_1}(x_1) \ldots H_{k_m}(x_m) = \alpha_{k_1 \ldots k_m} H_{k_1}(x_1) \ldots H_{k_m}(x_m).$$

Здесь

$$H_k(x) = e^{x^2/2} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2/2}.$$

Введем обозначения: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — вектор из R^m, $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ — целочисленный вектор с неотрицательными составляющими k_i,

$$\vec{x}^{\vec{k}} = x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}, \quad \vec{k}! = k_1! \ldots k_m!, \quad |\vec{k}| = k_1 + \ldots + k_m,$$
$$H_{\vec{k}}(\vec{x}) = H_{k_1}(x_1) \ldots H_{k_m}(x_m).$$

Система $\{(\vec{k}!)^{-1/2} H_{\vec{k}}(\vec{x}) \mid \vec{k} \in Z_+^m\}$ образует ортонормированный базис в $\mathcal{L}_2(R^m, \mathcal{B}(R^m), \mu^m)$, значит, для каждого $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=k} a_{\vec{k}} H_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=k} a_{\vec{k}}^2 \vec{k}! < \infty$$

действие оператора A на f имеет вид

$$(Af)(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=k} \alpha_{\vec{k}} a_{\vec{k}} H_{\vec{k}}(\vec{x}),$$

и

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in \mathcal{L}_2(R^m, \mathcal{B}(R^m), \mu^m) \mid \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=k} \alpha_{\vec{k}}^2 a_{\vec{k}}^2 \vec{k}! < \infty \right\}.$$

Определение. *Оператор А называется локальным на $\mathcal{D}(A)$, если для каждого бруса*

$$(\vec{a}; \vec{b}) = \prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i), \quad a_i < b_i,$$

и $\{f, g\} \subset \mathcal{D}(A)$ из равенства

$$f|_{(\vec{a},\vec{b})} = g|_{(\vec{a},\vec{b})} \quad (\mathrm{mod}\, \mu^m)$$

следует равенство

$$Af|_{(\vec{a},\vec{b})} = A\,g|_{(\vec{a},\vec{b})} \pmod{\mu^m}.$$

Основной вопрос, рассматриваемый в данной работе, следующий: какими должны быть коэффициенты $\{\alpha_{\vec{k}} \mid \vec{k} \in Z_+^m\}$, чтобы соответствующий диагональный оператор A был локальным на $\mathcal{D}(A)$?

Теорема. *Пусть A — локальный оператор на $\mathcal{D}(A)$, диагональный относительно системы полиномов Эрмита, и для некоторого целого $l \geq 0$*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \max_{|\vec{k}|=k} \frac{|\alpha_{\vec{k}}|}{k^l} < \infty.$$

Тогда существует многочлен $P(x_1, \ldots, x_m)$ степени не выше l, такой, что для любого $\vec{k}$: $\alpha_{\vec{k}} = P(\vec{k})$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *$\mathcal{D}(A)$ содержит пространство*

$$G^{2l}(R^m) = \{f\colon \forall\, \vec{n},\ n_i \leq 2l\ \exists\ \mathcal{D}^{\vec{n}} f \in C(R^m) \cap \mathcal{L}_2(R^m, \mathcal{B}(R^m), \mu^m)\},$$

причем

$$\mathcal{D}^{\vec{n}} f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=k} a_{\vec{k}+\vec{n}} \frac{(\vec{k}+\vec{n})!}{\vec{k}!} H_{\vec{k}}(\vec{x}),$$

где

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=k} a_{\vec{k}}\, H_{\vec{k}}(\vec{x}).$$

Доказательство следует из [1, с. 120, 121].

Лемма 2. *Пусть $\{f; f_n, n \geq 1\} \subset G^{2l}(R^m)$ и выполняются условия:*

а) $f_n \to f$, $n \to \infty$ *в* $\mathcal{L}_2(R^m, \mathcal{B}(R^m), \mu^m)$;

в) $\forall\, i,\ 1 \leq i \leq m$ $\dfrac{\partial^{2l} f_n}{\partial x_i^{2l}} \to \dfrac{\partial^{2l} f}{\partial x_i^{2l}}$, $n \to \infty$ *в* $\mathcal{L}_2(R^m, \mathcal{B}(R^m), \mu^m)$.

Тогда $Af_n \to Af$, $n \to \infty$ *в* $\mathcal{L}_2(R^m, \mathcal{B}(R^m), \mu^m)$.

Доказательство очевидно.

Лемма 3. *Пусть $f \in C^p([-M, M])$, $M > 0$, $p \geq 1$.*

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ g(x) = g_{N,\varepsilon}$, $N \in \mathbf{N}$, *что:* а) g *является многочленом степени p на интервалах*

$$\left(-M;\ \frac{-[MN]}{M}\right);\quad \left(\frac{[MN]}{N};\ M\right);\quad \left(\frac{k}{N};\ \frac{k+1}{N}\right),$$
$$k = -[MN], \ldots, [MN]-1; \tag{1}$$

b) $g \in C^{p-1}([-M, M])$;

c) $\forall\, k = 0, \ldots, p-1$ $\forall\, x \in [-M, M]$: $|g^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| < \varepsilon$;

d) $\forall\, x_0 \in [-M, M]$, $\forall\, k = 0, \ldots, p$ *коэффициент a_k при x^k многочлена, которому равна g на отрезке из* (1), *содержащему точку x_0, удовлетворяет неравенству*

$$\left| a_k - \sum_{n=k}^{p} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} C_n^k (-1)^{n-k} x_0^{n-k} \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Это утверждение докажем индукцией по p. Проверим базис. Пусть $f \in C^1([-M, M])$, $[a; b] \subset [-M; M]$. Рассмотрим функцию

$$y_{[a,b]}(x) = \left(f(a) - a\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x,$$

$$y_{[a,b]}(a) = f(a), \quad y_{[a;b]}(b) = f(b),$$

f и f' непрерывны на $[-M; M]$, а значит, и равномерно непрерывны. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall [a; b] \subset [-M; M], \ a < b < a + \delta, \ \forall x_0 \in [a; b]$$

$$|f(x_0) - y_{[a,b]}(x_0)| < \varepsilon,$$

$$\left| \left(f(a) - a\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) - \frac{f(x_0)}{0!} C_0^0 + x_0 \frac{f'(x_0)}{1!} C_1^0 \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{f'(x_0)}{1!} C_1^1 \right| < \varepsilon.$$

Возьмем $N > 1/\delta$ и построим функцию g как линейную, такую, что $f(k/N) = g(k/N)$, $k = -[MN], \ldots, [MN]$; $f(-M) = g(-M)$; $f(M) = g(M)$. Тогда g будет удовлетворять 3a) – 3d).

Предположим, что утверждение леммы верно для всех $k \le p$. Докажем, что оно верно для $k = p + 1$.

Пусть $\delta > 0$ — произвольно, $f \in C^{p+1}([-M, M])$. Тогда $f' \in C^p([-M, M])$. Построим функцию $g(x) = g_{\delta, N}(x)$, удовлетворяющую 3a) – 3d) для функции f'.

Положим $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt + f(0)$. ($h(x)$ — многочлен степени $(p + 1)$ на отрезках (1), $h(x) \in C^p([-M, M])$). Оценим $|h^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|$, $x \in [-M; M]$, $k = 1, \ldots, p$:

$$|h^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| = |g^{(k-1)}(x) - (f'(x))^{(k-1)}| < \delta.$$

Если $k = 0$, то $\forall x \in [-M, M]: |h(x) - f(x)| = |\int_0^x g(t)\,dt + f(0) - \int_0^x f'(t)\,dt - f(0)| = |\int_0^x (g(t) - f'(t))\,dt| < \delta M$.

Пусть x принадлежит некоторому отрезку из (1). На этом отрезке h и g — многочлены: $g(x) = \sum_{n=0}^{p} b_n x^n$; $h(x) = \sum_{n=0}^{p+1} a_n x^n$; $b_n = (n + 1) a_{n+1}$, $n = 0, \ldots, p$. Тогда

$$\forall k = 1, \ldots, p + 1: \left| a_k - \left(\sum_{n=k}^{p+1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} C_n^k (-1)^{n-k} x^{n-k} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{b_{k-1}}{k} - \left(\sum_{n=k}^{p+1} \frac{(f'(x))^{(n-1)}}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^{n-k} x^{n-k} \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{k}\left| b_{k-1} - \left(\sum_{n=k-1}^{p} \frac{(f'(x))^{(n)}}{n!} C_n^{k-1} (-1)^{n-(k-1)} x^{n-(k-1)} \right) \right| < \frac{\delta}{k} \le \delta.$$

Пусть $k = 0$, тогда

$$M\delta > |a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p+1} x^{p+1} - f(x)| =$$

$$= \left| a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p+1} x^{p+1} - \left(f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-x)^1 + \ldots + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(x-x)^{p+1} \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{p+1} x^k \left(a_k - \sum_{n=k}^{p+1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} C_n^k (-1)^{n-k} x^{n-k} \right) \right|.$$

Поэтому

$$\left| a_0 - \sum_{n=0}^{p+1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} C_n^0 (-1)^n x^n \right| \le \sum_{k=1}^{p+1} \left| x^k \left(a_k - \sum_{n=k}^{p+1} C_n^k \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (-1)^{n-k} x^{n-k} \right) \right| +$$

$$+ \delta M < \delta \left(\sum_{k=1}^{p+1} M^k + M \right).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta = \min\left\{\varepsilon; \varepsilon \cdot \left(M + \sum_{k=1}^{p+1} M^k\right)^{-1}\right\}$ и построим функцию $g_{\delta, N}$ для f'.

Положим $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt + f(0)$. Тогда h удовлетворяет условиям 3a) — 3d).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть функция $f \in G^p(R)$. Существует последовательность функций $\{g_n, n \ge 1\}$ на R, удовлетворяющая условиям:*

a) *При $n \ge 1$ g_n является многочленом степени p на каждом из интервалов:*

$$(-\infty; -M_n); \quad (M_n; \infty); \quad \left(-M; \frac{-[M_n n]}{n}\right); \quad \left(\frac{[M_n n]}{n};\ M_n\right);$$

$$\left(\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right); \quad k = -[M_n n], \ldots, [M_n n] - 1;$$

причем $M_n \to \infty$, $n \to \infty$;

b) *существует производная порядка $p-1$ во всех действительных точках;*

c) *для любого $x_0 \in R$ последовательность коэффициентов при x^k, $k = 0, \ldots, p$ многочленов, равных g_n на отрезках $[j_n/n, (j_n+1)/n] \ni x_0$, сходится при $n \to \infty$ к выражению*

$$\sum_{j=k}^{p} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} C_j^k (-1)^{j-k} x_0^{j-k};$$

d) $g_n^{(k)}$ *сходится к* $f^{(k)}$ *в* $\mathcal{L}_2(R, \mathcal{B}(R), \mu)$, *где* $k = \overline{0, p-1}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $n \in N$, заданы. Для доказательства 4a) – 4d) достаточно показать существование функции g и $M \ge n$ таких, что g удовлетворяет условиям 4a), 4b), 3c), 3d) и неравенствам

$$\int_R (f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x))^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx < \varepsilon, \quad k = \overline{0,\ p-1}.$$

Пусть δ, $0<\delta<1$, и $n \in N$ произвольные. Найдем $M \geq n$ такое, что

$$\int_M^\infty (f^{(k)}(x))^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx < \delta, \qquad \int_{-\infty}^{-M} (f^{(k)}(x))^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx < \delta,$$

$$(f^{(k)}(\pm M))^2 \frac{e^{-M^2/2}}{\sqrt{2\pi}} < \delta, \quad k=0, \ldots, p-1.$$

Построим функцию $g(x)=g_{N,\,\delta/M}(x)$ из леммы 3 для отрезка $[-M, M]$. Доопределим $g(x)$ на $(-\infty; -M)$ и $(M; \infty)$ как многочлены, которым $g(x)$ равна на отрезках $(-M; -[MN]/N)$ и $([MN]/N; M)$ соответственно. Тогда $g(x)$ удовлетворяет 4a), 4b).

Оценим интеграл $\int_R (f(x)-g(x))^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$:

$$\int_R (f(x)-g(x))^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq 2 \int_{-\infty}^{-M} f^2(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx +$$

$$+ 2\int_{-\infty}^{-M} g^2(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx + 2M\frac{\delta^2}{M^2} + 2\int_M^\infty f^2(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx + 2\int_M^\infty g^2(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq$$

$$\leq 6\delta + 2\int_{-\infty}^{-M} g^2(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx + 2\int_M^\infty g^2(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx. \tag{2}$$

$g(x)$ является многочленом на $[M; \infty)$: $g(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_px^p$, поэтому

$$\int_M^\infty g^2(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq 2\int_M^\infty \left(\sum_{k=0}^p \frac{g^{(k)}(M)-f^{(k)}(M)}{k!}(x-M)^k \right)^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx +$$

$$+ 2\int_M^\infty \left(\sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(M)}{k!}(x-M)^k \right)^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq 2\delta p \int_M^\infty \sum_{k=0}^p \left(\frac{(x-M)^k}{k!} \right)^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx +$$

$$+ 2p\int_M^\infty \sum_{k=0}^p \left(\frac{f^{(k)}(M)}{k!} \right)^2 (x-M)^{2k} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx. \tag{3}$$

Отметим, что для любого $n \leq 2p$:

$$\int_M^\infty (x-M)^n \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq c\,\frac{e^{-M^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{4}$$

где $c = 2^{p-1/2}\Gamma(p+1/2)$.

Из (3) и (4) следует

$$\int_M^\infty g^2(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq 2\delta p^2 c \frac{e^{-M^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + 2p\sum_{k=0}^p c\,(f^{(k)}(M))^2 \frac{e^{-M^2/2}}{\sqrt{2\pi}} < 4p^2 c\delta.$$

Из этого неравенства и (2) вытекает

$$\int_R (f(x)-g(x))^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \;<\; \delta(6+8p^2c).$$

Аналогично показывается, что

$$\int_R (f^{(p-1)}(x)-g^{(p-1)}(x))^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \;<\; \delta(6+8p^2c).$$

Положим $\delta=\varepsilon/(6+8p^2c)$ и построим указанным способом функцию g. Она очевидно удовлетворяет условиям 3a), 3d), 4a), 4b) и неравенствам

$$\int_R (f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x))^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \;<\; \varepsilon, \qquad k=0,p-1.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть функция $f\in G^{2l+1}(R^m)$ разлагается в произведение $f(\vec{x})=\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_m(x_m)$, тогда $\varphi_i\in G^{2l+1}(R)$, $i=1,\ldots,m$.

Для $i=1,\ldots,m$ построим последовательности функций $\{g_{i,n}\,|\,n\geq 1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4 для функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ и $p=2l+1$.

Положим $g_n(\vec{x})=g_{1,n}(x_1)\ldots g_{m,n}(x_m)$. Из 4d) и леммы 2 следует

$$Ag_n\to Af,\quad n\to\infty \quad \text{в} \quad \mathcal{L}_2(R^m,\mathcal{B}(R^m),\mu^m).$$

Поскольку оператор A — локальный, то существуют измеримые функции $h_{\vec{k}}(\vec{x})$, $0\leq k_i\leq 2l+1$, такие, что для произвольной $g\in G^{2l+1}(R^m)$ и произвольного бруса $(\vec{a};\vec{b})\subset R^m$ из равенства

$$g(\vec{x})|_{(\vec{a},\vec{b})} \;=\; \vec{x}^{\vec{k}}|_{(\vec{a},\vec{b})} \quad (\mathrm{mod}\,\mu^m)$$

для $\vec{k}:\,0\leq k_i\leq 2l+1$ следует

$$(Ag)(\vec{x})|_{(\vec{a},\vec{b})} \;=\; h_{\vec{k}}(\vec{x})|_{(\vec{a},\vec{b})} \quad (\mathrm{mod}\,\mu^m).$$

Из 4a) – 4c) следует, что $\{Ag_n, n\geq 1\}$ почти всюду относительно меры μ^m сходится к выражению

$$\sum_{k_i\leq 2l+1} (\mathcal{D}^{\vec{k}}f(\vec{x}))\,p_{\vec{k}}(\vec{x}),$$

где $p_{\vec{k}}(\vec{x})$ — некоторые измеримые функции.

Следовательно,

$$(Af)(\vec{x}) \;=\; \sum_{k_i\leq 2l+1} p_{\vec{k}}(\vec{x})\,\mathcal{D}^{\vec{k}}f(\vec{x}).$$

Подставляя вместо f функции $H_{\vec{k}}(\vec{x})$, $k_i\leq 2l+1$, и учитывая, что $(AH_{\vec{k}})(\vec{x})=$ $=\alpha_{\vec{k}}H_{\vec{k}}(\vec{x})$, получаем систему уравнений относительно $p_{\vec{k}}$:

$$\sum_{k_i\leq n_i} p_{\vec{k}}(\vec{x})\,\mathcal{D}^{\vec{k}}H_{\vec{n}}(\vec{x}) \;=\; \alpha_{\vec{n}}H_{\vec{n}}(\vec{x}), \tag{5}$$

где $0\leq k_i\leq n_i\leq 2l+1$, $i=1,\ldots,m$ (если существует $k_i>n_i$, то $\mathcal{D}^{\vec{k}}H_{\vec{n}}(\vec{x})=0$).

Из системы (5) следует, что $p_{\vec{k}}$ — многочлены, коэффициенты которых выражаются через $\{\alpha_{\vec{k}} \mid k_i \le 2l+1\}$, причем максимальный показатель степени, с которым x_i входит в $p_{\vec{k}}$, не превышает k_i.

Рассмотрев равенство (5) для всех $\vec{n} \in Z_+^m$, можно выразить $\alpha_{\vec{n}}$ через коэффициенты многочленов $\{p_{\vec{k}} \mid k_i \le 2l+1\}$. Пусть $p_{\vec{k}}(\vec{x}) = \sum_{r_i \le k_i} \lambda_{\vec{r}}^{(\vec{k})} \vec{x}^{\vec{r}}$. Приравнивая в (5) слева и справа коэффициенты при $\vec{x}^{\vec{n}}$, получаем

$$\alpha_{\vec{n}} = \sum_{k_i \le 2l+1} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{k})} \frac{\vec{n}!}{(\vec{n}-\vec{k})!}; \quad \forall\, \vec{n} \in Z_+^m, \tag{6}$$

где $\vec{n}!/(\vec{n}-\vec{k})! = 0$, если существует $k_i > n_i$.

Из условия теоремы $\varlimsup\limits_{k \to \infty} \max\limits_{|\vec{k}|=k} |\alpha_{\vec{k}}|/|\vec{k}|^l < \infty$ следует, что в сумме (6) коэффициенты $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{k})}$ равны нулю, если $|\vec{k}| > l$.

Таким образом, $\alpha_{\vec{n}} = P(\vec{n})$, где

$$P(\vec{x}) = \sum_{k_i \le n_i} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{k})} \prod_{i=1}^{m} \left(x_i(x_i-1)\ldots(x_i-k_i+1) \right)$$

— полином степени не выше чем l.

Теорема доказана.

Отметим, что сужение оператора A на пространство $G^{2l}(R^m)$ является полиномом P от набора операторов $C_k = -\partial^2/\partial x_k^2 + x_k \partial/\partial x_k$, $k = 1, \ldots, m$, поскольку $C_k H_{\vec{n}} = n_k H_{\vec{n}}$.

Аналогичные результаты для тригонометрической системы функций получены в [2].

1. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978.
2. *Дороговцев А. А.* О локальных диагональных операторах // Ряды Фурье: Теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 27 – 30.

Получено 02.06.93