УДК 519.21–517.983

Т. В. Каратаева, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРАЛА СТИЛЬТЬЕСА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

We obtain sufficient conditions of existence of the Stieltjes integral

$$\int_s^t f(\tau)\,d\mathcal{F}(\tau) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k)\left(\mathcal{F}(t_k^n) - \mathcal{F}(t_{k-1}^n)\right)$$

for functions of bounded variation which take values in a Banach algebra with unity. The integral does not depend on the choice of the points $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Одержані достатні умови існування інтеграла Стільтьєса

$$\int_a^b f(\tau)\,d\mathcal{F}(\tau) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k)\left(\mathcal{F}(t_k^n) - \mathcal{F}(t_{k-1}^n)\right)$$

для функцій обмеженої варіації зі значеннями в банаховій алгебрі з одиницею незалежно від вибору точки $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Пусть X — банахова алгебра с единицей, $f(t)$, $\mathcal{F}(t)$, $t \in [0, T]$, $T < \infty$, — функции, принимающие значения в X. Обозначим через $\Delta[0, T]$ разбиение отрезка $[0, T]$ точками t_k, т. е. $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_m \le T$, $\Delta_n[0, T]$ — последовательность разбиений отрезка $[0, T]$ при $n \to \infty$, т. е. $0 \le t_0^n \le t_1^n \le \ldots \le t_{m_n}^n \le T$. Обозначим норму в X через $|\cdot|$.

Везде в дальнейшем будем предполагать, что функции $f(t)$, $\mathcal{F}(t)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, T]$, т. е.

$$\sup_{\Delta[0,T]} \sum_{k=1}^{m_n} |\mathcal{F}(t_k) - \mathcal{F}(t_{k-1})| < \infty.$$

Предел слева функции $f(t)$ в точке τ обозначим через $f(\tau-)$, предел справа — через $f(\tau+)$, т. е.

$$f(\tau-) = f(\tau - 0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(\tau - h),\quad f(\tau+) = f(\tau + 0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(\tau + h).$$

Определение. *Если для функций $f(t)$, $\mathcal{F}(t)\colon [a, b] \to X$, $[a, b] \subseteq [0, T]$ существует предел*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k)\left(\mathcal{F}(t_k^n) - \mathcal{F}(t_{k-1}^n)\right),\quad \xi_k \in [\,t_{k-1}^n,\ t_k^n\,],\quad \delta_n = \max_k \left|t_k^n - t_{k-1}^n\right|,$$

не зависящий от последовательности разбиений $\{\Delta_n[a, b]\}$ и от выбора точки $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, то этот предел называется интегралом Стильтьеса от функции $f(t)$ по $\mathcal{F}(t)$ и обозначается $\int_a^b f(\tau)\,d\mathcal{F}(\tau)$.

В работе [1] рассматривался правый (левый) интеграл Стильтьеса для функций ограниченной вариации, не удовлетворяющих условию непрерывности, и были получены необходимые и достаточные условия его существования. В настоящей работе изучается вопрос существования интеграла Стильтьеса независимо от выбора точек $\xi_k \in [\,t_{k-1}^n,\ t_k^n\,]$.

Теорема. *Если функции ограниченной вариации $f(t)$, $\mathcal{F}(t)$ на $[a, b] \subseteq [0, T]$ в каждой общей точке разрыва τ удовлетворяют условиям*

$$(f(\tau)-f(\tau-))(\mathcal{F}(\tau)-\mathcal{F}(\tau-)) = 0, \quad (f(\tau+)-f(\tau))(\mathcal{F}(\tau+)-\mathcal{F}(\tau)) = 0,$$
$$(f(\tau)-f(\tau-))(\mathcal{F}(\tau+)-\mathcal{F}(\tau)) = 0, \quad (f(\tau+)-f(\tau))(\mathcal{F}(\tau)-\mathcal{F}(\tau-)) = 0, \tag{1}$$

то существует интеграл $\int_a^b f(\tau)\, d\,\mathcal{F}(\tau)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0,\ \forall\ \Delta_n[a,b]\ \delta_n<\delta(\varepsilon)\ \forall\ \Delta_r[a,b]\supseteq\Delta_n[a,b]$ справедливо

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k)(\mathcal{F}(t_k)-\mathcal{F}(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} f(\zeta_i)(\mathcal{F}(s_i)-\mathcal{F}(s_{i-1})) \right| < \varepsilon,$$

где $\Delta_r[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m_n}\{\Delta[t_{k-1},t_k]\}$, $\Delta[t_{k-1},t_k]$ — разбиение $[t_{k-1},t_k]$ точками $\{s_i^k\}$, $t_{k-1}\le s_0^k\le s_1^k\le\ldots\le s_{r_k}^k\le t_k$, $\zeta_i\in[s_{i-1},s_i]$. Рассмотрим разность

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k)(\mathcal{F}(t_k)-\mathcal{F}(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} f(\zeta_i)(\mathcal{F}(s_i)-\mathcal{F}(s_{i-1})) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k)\sum_{i=1}^{r_k}(\mathcal{F}(s_i)-\mathcal{F}(s_{i-1})) - \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} f(\zeta_i)(\mathcal{F}(s_i)-\mathcal{F}(s_{i-1})) =$$
$$= \sum\nolimits_{k=1}^{m_n}\sum\nolimits_{i=1}^{r_k}(f(\xi_k)-f(\zeta_i))(\mathcal{F}(s_i)-\mathcal{F}(s_{i-1})). \tag{2}$$

Так как $f(t)$, $\mathcal{F}(t)$ имеют ограниченную вариацию на $[a,b]\subseteq[0,T]$, то они имеют не более чем счетное число скачков θ_j, из которых можно выделить конечное число $N(\varepsilon)$ так, чтобы сумма оставшихся не превышала $\varepsilon\min\{[\operatorname{Var} f]^{-1}, [\operatorname{Var}\mathcal{F}]^{-1}\}/4$. Представим функции $f(t)$, $\mathcal{F}(t)$ в виде $f(t) = f_1(t)+f_2(t)+ +f_3(t)$, $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_1(t)+\mathcal{F}_2(t)+\mathcal{F}_3(t)$, где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — непрерывные функции, $f_2(t)$, $\mathcal{F}_2(t)$, $f_3(t)$, $\mathcal{F}_3(t)$ — ступенчатые функции. Скачки функций $f_3(t)$, $\mathcal{F}_3(t)$ совпадают по месту и величине с теми скачками функций f, $\mathcal{F}$, которые попали в выделенные $N(\varepsilon)$ скачков, и только с ними. Скачки функций $f_2(t)$, $\mathcal{F}_2(t)$ совпадают с оставшимися скачками $f(t)$ и $\mathcal{F}(t)$ по месту и величине и только с ними. Между точками скачков функции $f_2(t)$, $\mathcal{F}_2(t)$, $f_3(t)$, $\mathcal{F}_3(t)$ постоянны. Кроме того, функции $f_i(t)$, $\mathcal{F}_i(t)$, $i=\overline{1,3}$, имеют ограниченную вариацию на $[a,b]$ и во всех общих точках разрыва удовлетворяют условиям (1). Перепишем (2) в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}[f_1(\xi_k)-f_1(\zeta_i)][\mathcal{F}(s_i)-\mathcal{F}(s_{i-1})] +$$
$$+ [f_2(\xi_k)-f_2(\zeta_i)][\mathcal{F}(s_i)-\mathcal{F}(s_{i-1})] + [f_3(\xi_k)-f_3(\zeta_i)]\times$$
$$\times[\mathcal{F}_1(s_i)-\mathcal{F}_1(s_{i-1})] + [f_3(\xi_k)-f_3(\zeta_i)][\mathcal{F}_2(s_i)-\mathcal{F}_2(s_{i-1})] +$$
$$+ [f_3(\xi_k)-f_3(\zeta_i)][\mathcal{F}_3(s_i)-\mathcal{F}_3(s_{i-1})]. \tag{3}$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. Первое из них не превышает $\sup\limits_{k,i}[f_1(\xi_k)- -f_1(\zeta_i)]\operatorname{Var}\mathcal{F}$ и может быть сделано сколь угодно малым в силу равномерной непрерывности $f_1(t)$ на $[a,b]$. Второе и четвертое слагаемые не превышают

$$\frac{\varepsilon}{4}\min\left\{\left[\operatorname*{Var}_{[a,b]} f\right]^{-1}, \left[\operatorname*{Var}_{[a,b]}\mathcal{F}\right]^{-1}\right\}\operatorname{Var}\mathcal{F}, \quad \frac{\varepsilon}{4}\min\left\{\left[\operatorname*{Var}_{[a,b]} f\right]^{-1}, \left[\operatorname*{Var}_{[a,b]}\mathcal{F}\right]^{-1}\right\}\operatorname{Var} f$$

соответственно. Третье слагаемое в силу равномерной непрерывности $\mathcal{F}_1$ и построения f_3 также может быть сделано как угодно малым. Для оценки пятого слагаемого напомним, что функции $f_3(t)$, $\mathcal{F}_3(t)$ ступенчатые, содержащие конечное число скачков, поэтому их можно представить в виде

$$f_3(t) = \left[\sum_{\substack{j=1\\ a<\theta_j<b}}^{N(\varepsilon)} \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big)\right] + f(a+) - f(a) + f(b) - f(b-),$$

$$\mathcal{F}_3(t) = \left[\sum_{\substack{j=1\\ a<\theta_j<b}}^{N(\varepsilon)} \big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big)\right] + \mathcal{F}(a+) - \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(b-),$$

где θ_j — точки скачков функций $f_3(t)$, $\mathcal{F}_3(t)$, расположенные между a и b, $\mathcal{F}(\theta_j+)$, $f(\theta_j+)$, $\mathcal{F}(\theta_j-)$, $f(\theta_j-)$ обозначают пределы справа и слева соответственно этих функций в точках разрыва. Тогда

$$f_3(\xi_k) - f_3(\zeta_i) = \left[\sum_{\substack{a<\theta_j<\xi_k\\ j\le N(\varepsilon)}} \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big)\right] +$$

$$+ f(s+) - f(s) + f(\xi_k) - f(\xi_k-) -$$

$$- \left[\sum_{\substack{a<\theta_j<\zeta_i\\ j\le N(\varepsilon)}} \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big) - f(s+) - f(s) - f(\zeta_i) - f(\zeta_i-)\right] = \varphi(\xi_k, \zeta_i) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{\substack{\zeta_i<\theta_j<\xi_k\\ j\le N(\varepsilon)}} \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big) + f(\xi_k) - f(\xi_k-) + f(\zeta_i+) - f(\zeta_i), & \zeta_i < \xi_k, \\ \sum\limits_{\substack{\xi_k<\theta_j<\zeta_i\\ j\le N(\varepsilon)}} \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big) + f(\zeta_i) - f(\zeta_i-) + f(\xi_k+) - f(\xi_k), & \xi_k < \zeta_i, \\ 0, & \xi_k = \zeta_i, \end{cases} \tag{4}$$

и последнее слагаемое в (3) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} \varphi(\xi_k, \zeta_i)\left[\sum_{s_{i-1}<\theta_j<s_i} \big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{F}(s_{i-1}+) - \mathcal{F}(s_{i-1}) + \mathcal{F}(s_i) + \mathcal{F}(s_i-)\right]. \tag{5}$$

Обозначим

$$\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i) = \varphi(\xi_k, \zeta_i)\left[\sum_{s_{i-1}<\theta_j<s_i} \big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{F}(s_{i-1}+) - \mathcal{F}(s_{i-1}) + \mathcal{F}(s_i) + \mathcal{F}(s_i-)\right].$$

Покажем, что $\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i) \equiv 0$. Для этого отметим, что с ростом n δ_n

станет меньше $|\theta_i - \theta_j|$, $i \neq j$, отрезок $[t_{k-1}, t_k]$ будет содержать не более одной точки разрыва θ_j. Поэтому

$$\sum_{s_{i-1}<\theta_j<s_i} \mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-) = \mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-), \qquad \sum_{\zeta_i<\theta_j<\xi_k} f(\theta_j+) - f(\theta_j-) =$$
$$= f(\theta_j+) - f(\theta_j-), \qquad \sum_{\xi_k<\theta_j<\zeta_i} f(\theta_j+) - f(\theta_j-) = f(\theta_j+) - f(\theta_j-). \tag{6}$$

Везде в дальнейшем под записью $\theta_j \in (\zeta_i, \xi_k)$ будем понимать $\theta_j \in (\zeta_i, \xi_k)$, если $\zeta_i < \xi_k$, и $\theta_j \in (\xi_k, \zeta_i)$, если $\xi_k < \zeta_i$.

Обозначим через θ_1 множество точек скачков θ_j, $j \le N(\varepsilon)$, совпадающих с точками ξ_k, $k = \overline{1, m_n}$, ζ_i, $i = \overline{1, r_k}$, и попадающих в интервал между этими точками, через θ_2 — множество точек скачков θ_j, $j \le N(\varepsilon)$, совпадающих с точками s_{i-1}, s_i, $i = \overline{1, r_k}$, и попадающих в интервал между этими точками. Ясно, что если $\theta_1 = \varnothing$, $\theta_2 = \varnothing$, $\theta_1 \cap \theta_2 = \varnothing$, то слагаемое $\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i)$ равно 0. Также $\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i) = 0$ при $\xi_k = \zeta_i$. Если $\theta_1 \cap \theta_2 \neq \varnothing$, то $\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i)$ принимает различные значения в зависимости от расположения точки скачка θ_j относительно интервалов (ξ_k, ζ_i), (s_{i-1}, s_i) и точек ξ_k, ζ_i, s_{i-1}, s_i. Учитывая формулы (6), имеем, что при $\theta_j \in (\zeta_i, \xi_k) \cap (s_{i-1}, s_i)$ $\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i) = 0$. Если $\xi_k < \zeta_i$, то с использованием (6) получаем

$$\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i) =$$
$$= \begin{cases} \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big), & \theta_j = s_{i-1}, \quad \theta_j \in (\xi_k, \zeta_i), \\ \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big), & \theta_j = \zeta_i, \quad \theta_j \in (s_{i-1}, s_i), \\ \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big), & \theta_j = \xi_k, \quad \theta_j \in (s_{i-1}, s_i), \\ \big(f(\theta_j) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j)\big), & \theta_j = s_{i-1}, \quad \theta_j = \zeta_i, \\ \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j)\big), & \theta_j = \xi_k, \quad \theta_j = s_{i-1}. \end{cases}$$

Если $\zeta_i < \xi_k$, то с учетом (6) $\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i)$ имеет вид

$$\Phi(\xi_k, \zeta_i, s_{i-1}, s_i) =$$
$$= \begin{cases} \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big), & \theta_j = \zeta_i, \quad \theta_j \in (s_{i-1}, s_i), \\ \big(f(\theta_j) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j)\big), & \theta_j = s_{i-1}, \quad \theta_j = \zeta_i, \\ \big(f(\theta_j) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j+) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big), & \theta_j = \xi_k, \quad \theta_j \in (s_{i-1}, s_i), \\ \big(f(\theta_j) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big), & \theta_j = \xi_k, \quad \theta_j = s_i, \\ \big(f(\theta_j+) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big), & \theta_j = s_i, \quad \theta_j = (\zeta_i, \xi_k), \\ \big(f(\theta_j) - f(\theta_j-)\big)\big(\mathcal{F}(\theta_j) - \mathcal{F}(\theta_j-)\big), & \theta_j = s_i, \quad \theta_j = \zeta_i. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что во всех случаях с учетом условий (1) правая часть $\Phi(\xi_k,$ $\zeta_i, s_{i-1}, s_i)$ тождественно равна нулю.

1. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 12. – С. 3–6.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

Получено 31.03.93