УДК 517.925.52

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, Рівне)

УМОВИ ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We obtain conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear almost periodic differential equations in a Banach space without using the $\mathcal{H}$-classes of these equations.

Получены условия существования почти периодических решений нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, не использующие $\mathcal{H}$-классы этих уравнений.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай E — довільний банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$ і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із банахового простору X у банаховий простір Y, з нормою $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$. Позначимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями у просторі E з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E$, а через C^1 банаховий простір функцій $x \in C^0$, для кожної з яких $dx/dt \in C^0$, з нормою $\|x\|_{C^1} = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \|dx/dt\|_{C^0}\right\}$.

Визначимо оператор зсуву $S_h \in L(C^0, C^0)$, $h \in \mathbb{R}$, формулою

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Елемент $y \in C^k$, $k = \overline{0,1}$, називається *майже періодичним* (за Бохнером) (див., наприклад, [1–3]), якщо замикання множини $\{S_h y \colon h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^k є компактною підмножиною цього простору.

Позначимо через B^0 і B^1 банахові простори майже періодичних елементів просторів C^0 і C^1 з нормами $\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}$ і $\|x\|_{B^1} = \|x\|_{C^1}$ відповідно.

Нехай Ω — область простору E, тобто відкрита зв'язна множина простору E, і $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх зв'язних компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо неперервне відображення $f\colon \mathbb{R}\times\Omega \to E$, що задовольняє умови:

1) $f(t,x)$ рівномірно неперервне по x на кожній множині $\mathbb{R}\times K$, де $K \in \mathcal{K}$;

2) $f(t,x)$ майже періодичне по t рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Як і в [3, с. 428, 429], можна показати, що для кожної множини $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ x\in K} \|f(t,x)\|_E < +\infty$$

і для довільної послідовності $(h_k)_{k\geqslant1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geqslant1}$, для якої послідовність $\big(f(t+h_{k_l},x)\big)_{l\geqslant1}$ збігається рівномірно на множині $\mathbb{R}\times K$.

Вважатимемо, що послідовність $\big(f(t+h_{k_l},x)\big)_{l\geqslant1}$ збігається рівномірно на кожній множині $\mathbb{R}\times K$, $K \in \mathcal{K}$, і граничне відображення $g\colon \mathbb{R}\times\Omega \to E$. що визначається співвідношенням

$$g(t,x) = \lim_{l\to\infty} f(t+h_{k_l},x), \tag{2}$$

задовольняє умови 1 і 2. Наведена вимога виконується, якщо, наприклад, простір E скінченновимірний, що показано в [3, с. 429]. Зазначимо, що у подальшому ця вимога відіграватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$\mathcal{H}$-класом цього рівняння називається множина всіх диференціальних рівнянь

$$\frac{dy(t)}{dt} = g\big(t, y(t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

права частина яких визначається за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов майже періодичності обмежених розв'язків рівняння (3) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння. При дослідженні рівняння (3) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння (множини значень цих розв'язків — підмножини компактних множин $K \in \mathcal{K}$). Цьому функціоналу приділимо увагу в п. 2.

2. Функціонал $\boldsymbol{\Delta}$. Позначимо через $\mathcal{N}(f, K)$ множину всіх обмежених розв'язків $x = x(t)$ рівняння (3), для кожного з яких замикання $\overline{R(x)}$ множини $R(x) = \{x(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ у просторі E є підмножиною множини $K \in \mathcal{K}$ і $\overline{R(x)} \neq K$.

Зафіксуємо довільні множину $K \in \mathcal{K}$ і обмежений розв'язок $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$ рівняння (3) (вважаємо, що $\mathcal{N}(f, K) \neq \varnothing$.) Покладемо

$$r(x^*, K, f) = \sup\Big\{\|x - y\|_E \colon x \in \overline{R(x^*)},\ y \in K\Big\}.$$

Зазначимо, що $r(x^*, K, f) > 0$ завдяки нерівності $\overline{R(x)} \neq K$. Також зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in \big[0, r(x^*, K, f)\big]$. Позначимо через $\Omega(x^*, K, f, \varepsilon)$ множину всіх елементів $y \in C^1$, для кожного з яких

$$x^*(t) + y(t) \in K$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\frac{d(x^*(t) + y(t))}{dt}\right\|_E \leqslant \sup_{s \in \mathbb{R},\ x \in K} \|f(s, x)\|_E$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$ і

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \big|\|y(t)\|_E - \varepsilon\big| = 0.$$

Розглянемо функціонал

$$\Delta(x^*, K, f, \varepsilon) = \inf_{y \in \Omega(x^*, K, f, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\|\frac{d(x^*(t) + y(t))}{dt} - f(t, x^*(t) + y(t))\right\|_E. \tag{4}$$

Застосування функціонала Δ до дослідження нелінійного майже періодичного рівняння (3) та аналогічних лінійних рівнянь наведемо у наступних пунктах.

3. Основна теорема.

Теорема 1. *Нехай* K *належить множині* $\mathcal{K}$. *Якщо для розв'язку* $z \in \mathcal{N}(f, K)$ *майже періодичного рівняння* (3) *і деякого числа* $\delta > 0$ *виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon) > 0 \tag{5}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, *то цей розв'язок майже періодичний.*

Доведення. Припустимо, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(f, K)$ рівняння (3) не є елементом простору B^1 (випадок, коли $z \in B^0$ і $dz/dt \notin B^0$, очевидно, неможливий). Тоді існує послідовність $\big(z\,(t + h_p)\,\big)_{p \geqslant 1}$, збіжна в кожній точці $t \in \mathbb{R}$, причому довільна її підпослідовність $\big(z\,(t + k_p)\,\big)_{p \geqslant 1}$ не збігається рівномірно на $\mathbb{R}$. Отже,

$$\lim_{p,q \to \infty} \big\| z(h_p) - z(h_q) \big\|_E = 0 \tag{6}$$

і для деяких послідовностей $(p_r)_{r \geqslant 1}$, $(q_r)_{r \geqslant 1}$ і числа $\gamma \in (0, \delta)$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \big\| z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r}) \big\|_E > \gamma, \quad r \geqslant 1. \tag{7}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати (на підставі обмежень на f), що послідовність $\big(f(t + k_p, x)\big)_{p \geqslant 1}$ збігається рівномірно на $\mathbb{R} \times K$. Тоді

$$\lim_{p,q \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R},\ x \in K} \big\| f(t + k_p, x) - f(t + k_q, x) \big\|_E = 0. \tag{8}$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon_0 \in (0, \gamma]$. Завдяки (6) і (7) для функцій

$$y_r(t) = z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r}), \quad r \geqslant 1,$$

виконується співвідношення

$$y_r \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, f, \varepsilon_0), \quad r \geqslant 1, \tag{9}$$

де S_h — оператор зсуву, визначений співвідношенням (1).

Покажемо, що

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon_0) = 0. \tag{10}$$

На підставі (4), (9) і того, що

$$\frac{dz(t + k_{p_r})}{dt} - f\big(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r})\big) \equiv 0, \quad r \geqslant 1,$$

виконуються співвідношення

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon_0) = \inf_{y \in \Omega(z, K, f, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(z(t) + y(t))}{dt} - f(t, z(t) + y(t)) \right\|_E =$$

$$= \inf_{y \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, f, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(z(t + k_{q_r}) + y(t))}{dt} - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{q_r}) + y(t)) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \frac{d(z(t+k_{q_r})+y_r(t))}{dt} - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{q_r})+y_r(t)) \right\|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \frac{dz(t+k_{p_r})}{dt} - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{p_r})) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \frac{dz(t+k_{p_r})}{dt} - f(t+k_{p_r}, z(t+k_{p_r})) \right\|_E +$$

$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t+k_{p_r}, z(t+k_{p_r})) - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{p_r})) \|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t+k_{p_r}, z(t+k_{p_r})) - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{p_r})) \|_E ,$$

з яких та з (8) випливає співвідношення (10). Це співвідношення суперечить (5).

Отже, припущення, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(f,K)$ рівняння (3) не є майже періодичним, є хибним.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Наведені умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (3) є новими. У теоремі 1 (у порівнянні з теоремою Амеріо (див., наприклад, [3, 4]) не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (3) та умова відокремлення обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння і банаховий простір E може бути нескінченновимірним.

4. Умови існування обмежених розв'язків рівняння (3). У теоремі 1 одна з умов — це умова існування для рівняння (3) обмеженого розв'язку. Наведемо достатні умови виконання цієї вимоги як для рівняння (3), так і для більш загального, ніж (3), майже періодичного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + h(t), \tag{11}$$

де $f(t,x)$ — та сама функція, що і в рівнянні (3), а h — довільний елемент простору B^0. Очевидно, що для дослідження рівняння (11) теорема 1 також є застосовною.

Позначимо через $\mathcal{D}$ множину неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $B = B(t)$ зі значеннями у просторі $L(E,E)$, для кожної з яких оператор $\mathcal{L}_B \colon C^1 \to C^0$, що визначається формулою

$$(\mathcal{L}_B x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} - B(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

має неперервний обернений оператор $\mathcal{L}_B^{-1} \colon C^0 \to C^1$.

Розглянемо замкнену кулю

$$B[0,r] = \big\{ x \colon \|x\|_E \leqslant r \big\}.$$

Справджуються наступні твердження.

Теорема 2 [5]. *Нехай* $\dim E < \infty$ *і для числа* $r > 0$ *та елемента* $B \in \mathcal{D}$ *виконуються співвідношення*

$$B[0,r] \subset \Omega,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x\|_E\leqslant r} \|f(t,x)-B(t)x\|_E \leqslant \frac{r}{\|\mathcal{L}_B^{-1}\|_{L(C^0,C^0)}}. \tag{12}$$

Тоді рівняння (3) *має хоча б один розв'язок* $x \in C^1$, *для якого* $\|x\|_{C^0} \leqslant r$.

Теорема 3 [6]. *Нехай* $\dim E < \infty$, $\Omega = E$ *і для кожного числа* $H > 0$ *існують такі число* $r > 0$ *та елемент* $B \in \mathcal{D}$, *що*

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x\|_E\leqslant r} \big\|f(t,x)-B(t)x\big\|_E \leqslant \frac{r}{\|\mathcal{L}_B^{-1}\|_{L(C^0,C^0)}} - H. \tag{13}$$

Тоді для кожного $h \in C^0$ (*і, отже, для кожного* $h \in B^0$) *рівняння* (11) *має хоча б один розв'язок* $x \in C^1$.

***Зауваження* 2.** У співвідношеннях (12) і (13) $\|\mathcal{L}_B^{-1}\|_{L(C^0,C^0)}$ можна замінити будь-яким числом a, для якого $\|\mathcal{L}_B^{-1}\|_{L(C^0,C^0)} \leqslant a$.

Більш загальні твердження, ніж теореми 2 і 3, містяться в [5, 7, 8].

5. Випадок лінійного рівняння (3). Застосуємо теорему 1 до дослідження лінійних майже періодичних диференціальних рівнянь.

Розглянемо неперервні відображення $f_i\colon \mathbb{R}\times E \to E$, $i=\overline{1,2}$, що визначаються рівностями

$$f_1(t,x) = A(t)x + h(t),$$

$$f_2(t,x) = A(t)x,$$

де $A(t)$ — неперервна і майже періодична на $\mathbb{R}$ функція зі значеннями в $L(E,E)$ і $h \in C^0$, а також відповідні лінійні диференціальні рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t) \tag{14}$$

і

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{15}$$

Очевидно, що рівняння (14), якщо $h \in B^0$, і (15) — окремі випадки рівняння (3).

Завдяки теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай* K *належить множині* $\mathcal{K}$ *і* $h \in B^0$. *Якщо лінійне рівняння* (14) *має обмежений розв'язок* $z \in \mathcal{N}(f_1,K)$ *і для деякого числа* $\delta > 0$ *виконується співвідношення*

$$\Delta(z,K,f_1,\varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\delta)$, *то цей розв'язок є майже періодичним.*

Також має місце наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай* K *належить множині* $\mathcal{K}$. *Якщо лінійне рівняння* (15) *має обмежений розв'язок* $z \in \mathcal{N}(f_2,K)$ *і для деякого числа* $\delta > 0$ *виконується співвідношення*

$$\Delta(z,K,f_2,\varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\delta)$, *то цей розв'язок є майже періодичним.*

***Зауваження* 3.** Наведені умови існування майже періодичних розв'язків лінійних рівнянь (14) і (15) є новими. У порівнянні з теоремою Фавара (див. [3, 9]) у теоремах 4 і 5 не використовуються $\mathcal{H}$-класи рівнянь (14) і (15).

На завершення зазначимо, що знаходженню умов існування майже періодичних розв'язків звичайних майже періодичних диференціальних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо деякі з них. Для лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [9], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [4]. Результати Фавара були значно покращені Е. Мухамадієвим [10, 11]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [12–14]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [15], Амеріо [16] та В. В. Жикову [17].

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. I Teil. Funktionen einer Variablen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – P. 119–147.
2. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. II Teil. Funktionen mehrerer Variablen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – P. 383–409.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.
5. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2012. – **203**, № 5. – С. 135–160.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541–1556.
7. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103–126.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1685–1698.
9. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31–81.
10. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269–274.
11. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1984. – **30**, № 3. – С. 443–460.
12. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1984. – **116(158)**, № 4(12). – С. 483–501.
13. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130(172)**, № 1(15). – С. 86–104.
14. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262–267.
15. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
16. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. – 1960. – **30**. – P. 288–301.
17. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121–126.

Одержано 19.10.12