УДК 552.12

О. В. Домша, Б. В. Забавський (Львів. нац. ун-т)

БЛОЧНО-ДІАГОНАЛЬНА РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД n-ПРОСТОЮ ОБЛАСТЮ БЕЗУ $(n \geq 3)$

It is known that simple Bezout domain is elementary divisors domain if and only if it is 2-simple. In this work block-diagonal reduction of matrices over n-simple Bezout domain $(n \geq 3)$ is showed.

Известно, что простая область Безу является областью элементарных делителей тогда и только тогда, когда она 2-простая. В работе показана блочно-диагональная редукция матриц над n-простой областью Безу $(n \geq 3)$.

Нехай R — просте кільце. Тоді для довільного ненульового елемента $a \in R$ $RaR = R$, тобто існують такі елементи $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in R$, що $u_1av_1 + u_2av_2 + \ldots + u_nav_n = 1$. Якщо для кожного ненульового елемента $a \in R$ існує натуральне число n таке, що $u_1av_1 + \ldots + u_nav_n = 1$, до того ж число n є найменшим зі всіх можливих, то кільце R називається n-простим [1]. У роботі [2] показано, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою.

Нагадаємо, що права (ліва) область Безу — це область, в якій довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал є головним. Областю Безу називається область, яка є правою і лівою областю Безу одночасно [2].

Поставимо питання редукції матриць над n-простою областю Безу. У загальному випадку $n \geq 3$ відповіддю на це питання є наступна теорема [3].

Теорема 1. *Нехай R — n-проста область Безу $(n \geq 3)$, A — довільна квадратна матриця порядку m, $m \geq n$. Тоді існують зворотні матриці P, Q порядку m такі, що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & A_k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

де $A_1, \ldots, A_k$ — деякі трикутні матриці порядку n.

Перш ніж доводити теорему, доведемо наступний результат.

Теорема 2. *Нехай R — n-проста область. Тоді для довільних ненульових елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ існують такі елементи $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n \in R$, що*

$$u_1a_1v_1 + u_2a_2v_2 + \ldots + u_na_nv_n = 1.$$

Доведення. Оскільки R — область і $a_1 \neq 0, \ldots, a_n \neq 0$, то $a_1 a_2 \ldots a_n \neq 0$. Внаслідок того, що R є n-простою, існують елементи $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in R$ такі, що

$$x_1 a_1 \ldots a_n y_1 + \ldots + x_n a_1 \ldots a_n y_n = 1.$$

Покладемо

$$\begin{aligned}
&x_1 = u_1,\\
&a_2 \ldots a_n y_1 = v_1,\\
&x_2 a_1 = u_2,\\
&a_3 \ldots a_n y_2 = v_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_1 a_1 \ldots a_{n-1} = u_n,\\
&y_n = v_n.
\end{aligned}$$

Тоді $u_1 a_1 v_1 + u_2 a_2 v_2 + \ldots + u_n a_n v_n = 1$, що й потрібно було довести.

Область називається правою (лівою) ермітовою, якщо над даною областю всі (1×2) $((2 \times 1))$-матриці мають діагональну редукцію. Область Ерміта — це область, яке є правою і лівою ермітовою [4].

Доведення теореми **1** проведемо індукцією по числу m. Нехай $m = n$. Оскільки область Безу є областю Ерміта, то можна вважати, що матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо можливі випадки.

1. Нехай $a_{11} = 0$, тобто матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Оскільки R — область Ерміта, то для матриці

$$A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

існує зворотна матриця Q' порядку $n-1$ така, що $A'Q' = B$ — трикутна матриця. Отже, матриця A еквівалентна матриці

$$\begin{pmatrix} B & O \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

що й потрібно було довести.

2. Нехай $a_{ii} = 0$, де $i > 1$, тобто матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & 0 & 0 & a_{i+1i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & a_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді для рядка $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ii-1}$ існує зворотна матриця Q'' порядку $i-1$ така, що $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ii-1})Q'' = (a'_{i1}, 0, \dots, 0)$ і матриця A еквівалентна матриці

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Переставляючи рядки, бачимо, що A' еквівалентна матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a'_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Оскільки для стовпчика $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a'_{i1} \end{pmatrix}$ існує зворотна матриця P така, що

$$P \begin{pmatrix} a_{11} \\ a'_{i1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a''_{i1} \end{pmatrix}$$

для деякого $a''_{i1} \in R$, то матриця A', а отже і матриця A, еквівалентна матриці

$$\begin{pmatrix} B & O \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де B — деяка трикутна матриця порядку $m = n$, що й доводить твердження.

3. Нехай A з точністю до еквівалентності матриць має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$. Покажемо, що тоді існує матриця T порядку n така, що

$$AT = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

для деяких елементів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in R$.

Нехай $a_{21} \neq 0$. Оскільки область Безу є областю Оре [2], то для елементів $a_{21}, a_{22} \in R$ існують ненульові елементи $x, y \in R$ такі, що $a_{21}x = -a_{22}y$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $a_{11}x \neq 0$. Отже, випадок $a_{21} \neq 0$ зводиться до випадку, коли $a_{21} = 0$. Продовжуючи даний процес, рухаючись вниз по матриці, отримуємо матрицю T таку, що

$$AT = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_1 \neq 0,\ \varepsilon_2 \neq 0, \dots, \varepsilon_n \neq 0$.

Оскільки область R є n-простою, то для елементів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ існують такі $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in R$, що

$$u_1 \varepsilon_1 v_1 + \ldots + u_n \varepsilon_n v_n = 1.$$

Тоді

$$(u_1 \ldots u_n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_n & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 1.$$

Звідси

$$(u_1 \ldots u_n) A T \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 1.$$

Нехай

$$T \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

для деяких елементів $w_1, w_2, \ldots, w_n \in R$. З рівності

$$(u_1 \ldots u_n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_n & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 1$$

випливає, що $Rw_1 + \ldots + Rw_n = R$.

Оскільки R — область Ерміта, то, згідно з [4], рядок $u_1 \ldots u_n$ і стовпчик $v_1 \ldots v_n$ можна доповнити до зворотних матриць U і V відповідно. Звідси $UAV = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

Очевидно, що матрицю UAV елементарними перетвореннями можна звести до вигляду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & A' \end{pmatrix}$. Таким чином, базу індукції доведено.

Індукція за розмірами матриці завершує доведення теореми.

1. *Olszewski J.* On ideals of products of rings // Demonst. Math. Poland. – 1994. – **27**, № 1. – P. 1 – 7.
2. *Забавский Б. В.* Простые кольца елементарных делителей // Мат. студ. – 2004. – **22**, № 2. – С. 129 – 133.
3. *Zabavsky B. V.* Almost diagonal matrices over n-simple Besout domains // Groups and Group Rings (XI Bedlewo, Poland, June, 4). – 2005. – P. 22.
4. *Amitsur S. A.* Remarks of principal ideal rings // Osaka Math. J. – 1963. – **15**. – P. 59 – 69.
5. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 1. – P. 134 – 148.

Одержано 21.05.09,
після доопрацювання — 26.11.09