УДК 517.51+510.644

И. Г. Величко, П. Г. Стеганцева
(Запорож. нац. ун-т)

ПРИМЕР ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, КОТОРАЯ НЕ МОЖЕТ БЫТЬ R-ФУНКЦИЕЙ

We call attention to the fact that the definition of an R-function depends on the choice of some surjection. The problem of the construction of a function of two variables, that is not the R-function at any choice of the surjective mapping, is formulated. We show that the function $x_1x_2 - 1$ possesses this property and prove the theorem, according to which, in the case of finite sets, any mapping should be the R-mapping under the appropriate choice of the surjection.

Звернено увагу на те, що означення R-функції залежить від вибору деякої сюр'єкції. Сформульовано задачу про побудову такої функції двох змінних, яка не є R-функцією ні при якому виборі сюр'єктивного відображення. Показано, що функція $x_1x_2 - 1$ має таку властивість. Доведено теорему про те, що у випадку скінченних множин будь-яке відображення буде R-відображенням при слушному виборі сюр'єкції.

Введение. В последнее время в различных приложениях широко применяются R-функции, введенные В. Л. Рвачевым в 1963 г. [1]. Они позволяют достаточно просто решить обратную задачу аналитической геометрии — записать уравнение кривой, которая ограничивает заданную область. Это оказывается полезным при решении задач математического программирования, оптимального расположения объектов на плоскости, теории устойчивости, математической физики и др.

Наиболее полно теория R-функций изложена в фундаментальных монографиях автора метода [2 – 4]. Отметим также работы [5 – 8], в которых решаются задачи механики и математического моделирования.

Почти все работы об R-функциях посвящены приложениям. Математическое обоснование этого аппарата имеется только в публикациях автора метода. Вместе с тем изучение самого понятия R-функции является необходимым для обобщения результатов на новые объекты.

В литературе приводятся определение R-функции и примеры R-функций, но нет ни одного примера функции, которая не является R-функцией. В данной работе приведен пример конкретной функции и доказано, что она не может быть R-функцией.

Постановка задачи. Напомним определение R-отображения и R-функции [2, с. 101]). Пусть заданы множество X, содержащее не менее $k > 1$ элементов, и сюръективное отображение $S_k : X \to B_k$, где $B_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение. *Отображение* f: $X^n \to X^m$ *называется* R *-отображением, если существует такая функция* k*-значной логики* $F : B_k^n \to B_k^m$, *которая вместе с* f *образует коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{f} & X^m \\ \downarrow{\scriptstyle S_k^n} & & \downarrow{\scriptstyle S_k^m} \\ B_k^n & \xrightarrow{F} & B_k^m \end{array}$$

или, другими словами, если

$$S_k^m \circ f \;=\; F \circ S_k^n. \tag{1}$$

Здесь $S_k^n : X^n \to B_k^n$, $S_k^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \big(S_k(x_1), S_k(x_2), \ldots, S_k(x_n)\big)$.

При этом функция F k*-значной логики называется сопровождающей для* f*. Если* $X = R$*, то* R*-отображение называется* R*-функцией.*

Пример. Пусть $X = R$. Зададим сюръективное отображение

$$S_3(t) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0, \\ 1, & \text{если} \quad t = 0, \\ 2, & \text{если} \quad t > 0. \end{cases}$$

Покажем, что функция $f(x_1, x_2) \;=\; x_1 x_2$ является R-функцией.

Поскольку $f\colon R^2 \to R^1$, то $n = 2$, $m = 1$. Функцию F зададим следующим образом:

X_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
X_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
F	2	1	0	1	1	1	0	1	2

Для доказательства того, что функция f является R-функцией, нужно взять всевозможные значения x_1, x_2 и проверить выполнение равенства (1).

Если, например,

$$x_1 \;<\; 0, \qquad x_2 \;=\; 0,$$

то

$$f(x_1, x_2) \;=\; x_1 x_2 \;=\; 0, \qquad S_3\big(f(x_1, x_2)\big) \;=\; 1.$$

С другой стороны,

$$S_3^2(x_1, x_2) \;=\; \big(S_3(x_1), S_3(x_2)\big) \;=\; (0, 1), \qquad F\big(S_3^2(x_1, x_2)\big) \;=\; F(0, 1) \;=\; 1.$$

Значит, для этого случая равенство (1) выполняется:

$$S_3\big(f(x_1, x_2)\big) \;=\; 1 \;=\; F\big(S_3^2(x_1, x_2)\big).$$

Остальные 8 случаев (каждая из переменных отрицательна, равна нулю или положительна) проверяются аналогично.

Приведенное выше определение является, на самом деле, определением R-отображения относительно заданной сюръекции S_k, которая, в свою очередь, определяет и число k.

Легко показать, что функция $g(x_1, x_2) \;=\; x_1 x_2 - 1$ уже не будет R-функцией относительно заданного отображения S_3.

Возьмем $x_1 \;=\; 1$, $x_2 \;=\; t > 0$. Тогда

$$S_3^2(x_1, x_2) \;=\; \big(S_3(x_1), S_3(x_2)\big) \;=\; \big(S_3(1), S_3(t)\big) \;=\; (2, 2).$$

С другой стороны,

$$S_3(g(x_1, x_2)) = S_3(1 \cdot t - 1) = S_3(t-1).$$

Значит, в силу (1), должно выполняться равенство $F(2,2) = S_3(t-1)$.
Поскольку левая часть не зависит от t, правая тоже не должна зависеть от t. Но это неверно:

$$S_3\big|_{t=0,5} = S_3(0{,}5-1) = S_3(-0{,}5) = 0 \neq 2 = S_3(1) = S_3(2-1) = S_3\big|_{t=2},$$

а значит, функция $g(x_1, x_2) = x_1x_2 - 1$ уже не будет R-функцией относительно заданного отображения.

Не исключен тот факт, что она будет R-функцией относительно другого отображения S_k.

Целью данной работы является построение примера функции двух переменных, которая не является R-функцией ни для какого сюръективного отображения.

Основная часть. Докажем, что функция $g(x_1, x_2) = x_1x_2 - 1$ не является R-функцией.

Если заданная функция $g\colon R^2 \to R^1$ есть R-функция, то должны существовать натуральное $k > 1$ и сюръективная функция $S\colon R^1 \to B_k$ такие, что выполняется равенство

$$F(S(x_1), S(x_2)) = S(x_1x_2 - 1) \qquad \forall x_1, x_2 \in R. \tag{2}$$

На множестве R^1 введем бинарное отношение $\sim$ следующим образом:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad S(x) = S(y).$$

Легко убедиться, что оно является отношением эквивалентности. Если $x_1 \sim y_1 \wedge x_2 \sim y_2$, то

$$S(x_1x_2 - 1) = F(S(x_1), S(x_2)) = F(S(y_1), S(y_2)) = S(y_1y_2 - 1).$$

Таким образом, если

$$g(x_1, x_2) = x_1x_2 - 1$$

является R-функцией, то

$$x_1 \sim y_1 \wedge x_2 \sim y_2 \Rightarrow (x_1x_2 - 1) \sim (y_1y_2 - 1). \tag{3}$$

Если $x_2 = y_2 = t$, то $x_2 \sim y_2$, и соотношение (3) принимает вид

$$x_1 \sim y_1 \Rightarrow (x_1t - 1) \sim (y_1t - 1) \qquad \forall t \in R. \tag{4}$$

Существуют два возможных варианта строения класса элементов, эквивалентных нулю. Рассмотрим их.

1. Существует ненулевое число x, эквивалентное нулю. Выберем $x_1 = 0$, $y_1 = x$, и подставим в (4). В результате получим

$$tx - 1 \sim -1 \qquad \forall t \in R. \tag{5}$$

Положив в (5) $t = 1/x$, будем иметь

$$0 \sim -1. \tag{6}$$

Поскольку S — сюръекция и $k \geq 2$, существует элемент

$$b \nsim 0. \tag{7}$$

Положив в (5) $t = (b+1)/x$, получим $b \sim -1$. Таким образом,

$$b \sim -1 \sim 0 \;\Rightarrow\; b \sim 0,$$

что противоречит (7). Следовательно, этот вариант не может быть реализован.

2. Не существует ненулевых чисел, эквивалентных нулю, т. е. класс эквивалентности, содержащий нуль, состоит из одного элемента.

Поскольку количество классов эквивалентности равно k, т. е. является конечным (в принципе, можно было бы рассматривать и счетное множество классов), существует класс, содержащий, по крайней мере, два различных ненулевых элемента a и b.

Положив в (4) $t = 1/a$, $x_1 = a$, $y_1 = b$, получим

$$a \sim b \;\Rightarrow\; \left(a \cdot \frac{1}{a} - 1\right) \sim \left(b \cdot \frac{1}{a} - 1\right) \;\Rightarrow\; 0 \sim \frac{b}{a} - 1 \;\Rightarrow\; \frac{b}{a} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; b = a.$$

Полученное противоречие (по условию элементы a и b различны) показывает, что и этот вариант не может реализовываться.

Таким образом, соотношение (4) не может выполняться ни при каком выборе числа $k \geq 2$ и ни при каком способе задания отображения S. Следовательно, утверждение о том, что функция $g(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 1$ не может быть R-функцией, доказано.

Случай конечных множеств. Отметим, что для любого конечного множества построение такого примера невозможно в силу следующей теоремы.

Теорема. *Для любого конечного множества X всегда можно подобрать такую сюръекцию S_k, относительно которой заданное отображение $f \colon X^n \to$ $\to X^m$ будет R-отображением.*

Доказательство. Положим $k = |X|$ и выберем в качестве S_k какую-нибудь биекцию между множествами X и B_k. Отображение f запишем через координатные отображения:

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})),$$

где

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad x_i \in X.$$

Искомая функция F k-значной логики однозначно определяется своими координатными функциями F_i:

$$F(\bar{b}) = (F_1(\bar{b}), F_2(\bar{b}), \ldots, F_m(\bar{b})),$$

где

$$\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n), \qquad b_i \in B_k.$$

Равенство (1) эквивалентно серии тождеств

$$F_i(S_k(x_1), S_k(x_2), \ldots, S_k(x_n)) = S_k(f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Определим функции F_i следующим образом:

$$F_i(b_1, b_2, \ldots, b_n) = S_k(f_i(S_k^{-1}(b_1), S_k^{-1}(b_2), \ldots, S_k^{-1}(b_n))), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Поскольку S является биекцией, правая часть (9) определяется однозначно для всех значений логических переменных, и, следовательно, функции F_i определены корректно. Выбранные функции удовлетворяют равенствам (8), а значит, искомые сюръекция S_k и функция логики F найдены.

Теорема доказана.

Заключение. В данной работе построен конкретный пример функции, которая не может быть R-функцией ни при каком выборе сюръекции. Предложенный метод можно легко обобщить для доказательства того факта, что функции вида $ax_1x_2 \ldots x_n + b$ при $n > 1$ и $ab \neq 0$ не могут быть R-функциями. В дальнейшем планируется получение классов функций, элементы которых не могут быть R-функциями. Представляет интерес и получение общего критерия того, является ли заданная функция R-функцией.

1. *Рвачев В. Л.* Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов // Докл. АН УССР. – 1963. – **153**, № 4. – С. 765 – 767.
2. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
3. *Рвачев В. Л., Синекоп Н. С.* Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наук. думка, 1990. – 216 с.
4. *Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. – М.: Физматлит, 2006. – 416 с.
5. *Кравченко В. Ф., Юрин А. В.* Применение теории R-функций и вейвлетов к решению краевых задач эллиптического типа // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2009. – № 3. – С. 4 – 39.
6. *Слесаренко А. П., Сафонов Н. А.* R-функции, вариационно-структурный и итерационные методы в идентификации и математическом моделировании нелинейных процессов теплопроводности в областях с источниками энергии // Доп. НАН України. – 2007. – № 1. – С. 94 – 99.
7. *Kurpa L., Pigun G., Amabili M.* Nonlinear vibrations of shallow shells with complex boundary: R-functions method and experimental // J. Sound and Vibration. – 2007. – **306**, Issues 3-5. – P. 580 – 600.
8. *Mathieu Hursin, Shanjie Xiao, Tatjana Jevremovic.* Synergism of the method of characteristic, R-functions and diffusion solution for accurate representation of 3D neutron interactions in research reactors using the AGENT code system // Ann. Nuclear Energy. – 2006. – **33**, Issue 13. – P. 1116 – 1133.

Получено 03.07.09,
после доработки — 19.11.09